序

PREFACE

马尔可夫过程是在任一时刻具有马尔可夫性的随机过程。本书所要研究的马尔可夫骨架过程，是指在一系列固定或随机时刻具有马尔可夫性的随机过程，自然包括马尔可夫过程为其特例。

严格说来，任何系统的发展演化均可用随机过程来刻画。因此，自随机过程的概念诞生以来，各种各样的模型不断涌现，理论和应用都得到迅猛的发展，从事理论研究和实际应用的队伍在迅速增加。随机过程的研究大都集中在两大类上：一类是描写事物渐进变化的“轨道连续过程”，另一类是描写事物的飞跃与突变（质变）的“跳跃过程”。然而，事物的发展总是从量变到质变，再从质变到量变这样交替发展变化的过程。所以，近 20 年来，各种既有连续的渐进变化又有瞬间的跳跃的混杂系统模型的研究，得到了众多的学者特别是应用随机过程的诸多领域（如系统建模，随机控制，金融保险等）学者的关注。1954 年，Lévy 和 Smith 将一惯用（最小）马尔可夫链描写事物的飞跃与突变的“跳跃过程”发展成半马尔可夫过程。1984 年，英国学者 Davis 成功地提出了一个混杂系统模型——逐段决定马尔可夫过程。这类过程后来得到了较深入的发展和广泛的应用。还有，如半再生过程、逐段线性过程、马尔可夫决策漂移过程、跳线性系统以及时滞跳线性系统等均是近 20 年来提出的混杂系统模型。尽管如此，还有许许多多属混杂系统方面的实际问题被拒之在外，除半马尔可夫过程和逐段决定马尔可夫过程外，其余模型均未得到较好（更不用说充分）的发展。有

鉴于此,在总结各种现存混杂随机模型的基础上,1997 年侯振挺、刘再明、邹捷中提出了马尔可夫骨架过程概念,它几乎囊括了所有现存备受关注的混杂系统。近几年来,侯振挺及其同事们对这类过程及其应用进行了一系列研究。更可喜的是这种过程与其他数学分支与其他学科相结合,可产生一系列新学科分支或研究方向,如与数学生态学模型相结合产生了数学生态学随机模型,与各种(脉冲)微分方程相结合产生了随机脉冲(微分方程、泛函微分方程)理论,与孤波理论相结合产生了随机干扰对孤波影响理论,与地震学相结合产生新的地震理论,与人口理论相结合产生新的人口理论等等。本书就是我们对马尔可夫骨架过程及其应用研究成果的总结,其中大部分还都是第一次发表。但是,还有许多深层次及难度较大或很大的问题均未涉及或虽有涉及但还未能整理出来以收入书中。例如,马尔可夫骨架过程的条件概率 $P(x,t,A)=P(X(t)\in A\mid X(0)=x)$ 在 $t=0$ 的性质(连续性,可微性等),$P(x,t,A)$ 在 $t\to\infty$ 时的性质及当 $t\to\infty$ 时的各种收敛速度以及平稳分布,这些问题的研究十分重要而且有相当大的难度,就连马尔可夫链中的最简单的特例——(不能连续流入的)生灭过程的条件概率 $P_{ij}(t)=P(X(t)=j\mid X(0)=i)$,当 $t\to\infty$ 时的几种主要收敛性(指数收敛、强收敛、多项式收敛)还未研究清楚;又如,马尔可夫骨架过程的控制理论也是一个大的研究方向;又如,马尔可夫骨架过程与鞅论及随机分析的联系,这方面工作刚刚开始;又如,马尔可夫骨架过程在解线性和非线性微分-积分方程方面的应用,这是一个很有潜力的,有十分广阔发展前景的课题,这方面工作也是刚刚开始;又如,马尔可夫骨架过程在应用方面非常广泛,但由于作者的知识面所限及成书时间仓促,许多应用领域未能涉及或虽涉及也未能深入发挥。所以,马尔可夫骨架过程有十分丰富的内涵,在应用上有广阔的发展前景,这块新园地有待一批批学者努力耕耘。如果本书能起到引玉之砖的作用,我们将备感欣慰。

马尔可夫骨架过程的提出和研究属开拓性工作,个中艰辛让人难忘。令人鼓舞的是,我们自始自终得到了王寿仁、梁之舜、王

梓坤、严士健、苗邦均、陈希孺、严加安、马志明、黄起常、陈培德、胡迪鹤、吴荣、戴永隆、刘文、陈木法、吴今培、李致中、肖果能、陈安岳、范延勤、温泉、何其美、张健康、孙加明、袁肖瑾、张敏、张欣帆、李学伟、罗交晚、于贵穴、方小斌、胡达轩、言军、黄炳炎等前辈、同行和同事们的支持、指教和帮助；Suresh Sethi，Jerzy Filar，Ulrich Reider，Percy Brill，Meiling Huang 等教授在我应邀访问他们的时候对这一研究工作提出许多宝贵意见；一代宗师 Eugene Dynkin 教授和概率大师 Shinzo Watanabe 教授在 1999 年长沙举行的“马氏过程与受控马氏链国际会议”上也对这一研究表示关注；中南大学特别是原长沙铁道学院的领导对我们的科研工作一直关怀备至；湖南科学技术出版社及胡海清编审为本书的出版倾注了大量的精力，在此一并致谢。

由于作者才疏学浅，完稿也很仓促，书中不当之处在所难免，唯望各位专家和读者不吝指正。

侯振挺

2000 年春

目录
CONTENTS

绪　论

MARKOV SKELETON PROCESSES

不言而喻，马尔可夫过程是最为重要的一类随机过程，近百年来在众多数学家的努力下，马尔可夫过程在理论与应用两方面都得到了迅速而深入的发展，所谓马尔可夫过程是对一切常值停时具有马尔可夫性的随机过程.在马尔可夫过程的研究中发现，马尔可夫过程大都有(可以看出或稍加修正或通过证明)更强的马尔可夫性，而且这个子类才真正有极为丰富的内涵.基于此，又引入了强马尔可夫过程的概念.因此可以说马尔可夫过程的研究，实质上是对强马尔可夫过程的研究.对于这类过程的研究过去已经，当前正在并且将来还会迅猛的向前发展.所谓强马尔可夫过程是对一切停时具有马尔可夫性的(马尔可夫)过程.在现实中，一个随机过程是否是马尔可夫过程或强马尔可夫过程往往并非一目了然，而且有许许多多随机过程也确实不是马尔可夫过程，但有不少过程$(X_t, t < \tau)$，它们虽然未必是(强)马尔可夫过程，但却很容易看出存在一系列停时$0 \equiv \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \cdots \tau_n \uparrow \tau$，过程$(X_t)$在$\tau_n(n \geqslant 0)$上具有马氏性.我们把$(X_t)$或者说$(\tau_n)$的这种性质叫做性质(H).下面我们举一些这方面的例子.

例1　设$(X_t, t < +\infty)$是任一马尔可夫过程.

令$\tau_n = n \quad (n = 0, 1 \cdots)$，

则$(\tau_n, n \geqslant 0)$显然有性质(H).

例 2　设$(X_t, t < \tau)$是最小齐次可列马尔可夫过程(图 1).

以τ_n表示$\{X_t\}$的第n个跳跃点,于是$\tau_n \uparrow \tau$,显然$(\tau_n, n \geq 0)$有性质(H).

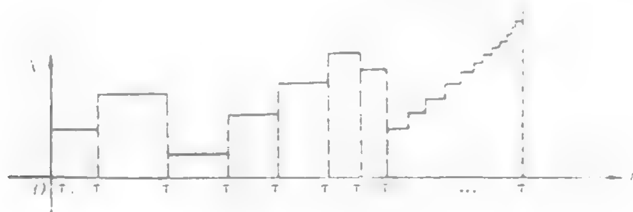


图 1　最小齐次可列马尔可夫过程

例 3　设$(X_t, t < \tau)$是 Doob 过程(图 2).

以τ_n表示$\{X_t\}$的第 n 个飞跃点,于是$\tau_n \uparrow \tau$,显然$\{\tau_n, n \geq 0\}$有性质(H),其中$X(\tau_n)(n \geq 1)$有相同的分布.

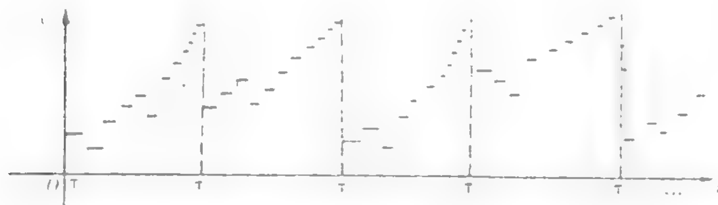


图 2　Doob 过程

例 4　设$(X_t, t < \tau)$是一阶 Q 过程(图 2).

以τ_n表示$\{X_t\}$的第 n 个飞跃点,于是$\tau_n \uparrow \tau$,显然$(\tau_n, n \geq 0)$有性质(H).

例 5　设$(N(t), t \geq 0)$是 GI/G/1 排队系统的输入过程(徐光辉[2]),即$N(t)$表示系统在t以前顾客到达的个数. $\tau_0 \equiv 0, \tau_n(n \geq 1)$表示第$n$个顾客到达的时刻,于是$\tau_n \uparrow +\infty$,显然$(\tau_n, n \geq$

0) 有性质(H). 并且,除 $\tau_{n+1}-\tau_n(n\geqslant 0)$ 为负指数分布外,$N(t)$ 必不是马尔可夫过程.

例 6 设 $(L(t),t\geqslant 0)$ 是 M/G/1 排队系统的排队过程(徐光辉[2]),即 $L(t)$ 表示系统在时刻 t 的队伍长度. $\tau_0\equiv 0,\tau_n(n\geqslant 1)$ 表示第 n 个顾客离开系统的时刻,于是 $\tau_n\uparrow+\infty$,易知,$(\tau_n,n\geqslant 0)$ 有性质(H).

例 7 设 $(L(t),t\geqslant 0)$ 是 GI/M/n 排队系统的排队过程(徐光辉[2]),$\tau_0\equiv 0,\tau_n(n\geqslant 1)$ 表示第 n 个顾客到达的时刻,于是 $\tau_n\uparrow+\infty$,易知 $(\tau_n,n\geqslant 0)$ 有性质(H).

例 8 设 $(L(t),t\geqslant 0)$ 是 GI/G/1 排队系统的排队过程(徐光辉[2]),$\tau_0\equiv 0,\tau_n(n\geqslant 1)$ 表示第 n 个忙期的开始时刻,于是 $\tau_n\uparrow+\infty(n\uparrow+\infty)$,易知 $(\tau_n,n\geqslant 0)$ 有性质(H).

例 9 设 $(W(t),t\geqslant 0)$ 是 GI/G/1 排队系统的等待过程,即 $W(t)$ 表示在时刻 t 到达的顾客的等待时间(包括对其服务的时间). $\tau_0\equiv 0,\tau_n(n\geqslant 1)$ 表示第 n 个顾客的到达的时刻,于是 $\tau_n\uparrow+\infty(n\uparrow+\infty)$,易知 $(\tau_n,n\geqslant 0)$ 具有性质(H)(图 3).

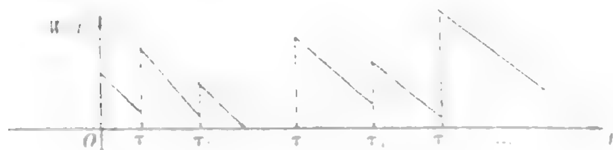


图 3 等待过程

例 10 风险决策模型(图 4)

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i,$$

其中 $N(t)$ 表示在 $[0,t]$ 时间内发生索赔的次数,X_i 为一正随机变量. $U(t)$ 有性质(H).

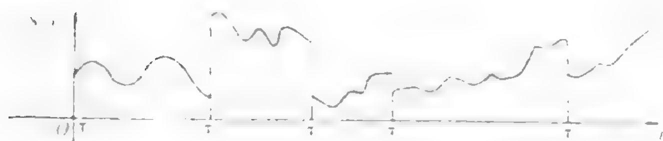
图 4　风险决策模型

例 11　带随机干扰的风险决策模型

$$U(t) = u + ct + W(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

其中 $W(t)$ 是布朗运动. $U(t)$ 有性质(H).

例 12　期权定价模型(图 5):



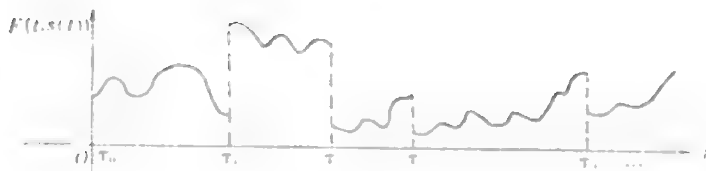


图 5　期权定价模型

$S(t)$ 表示股票价格. $F(t,S(t))$ 是 t,s 的二元连续函数,表示股票在 t 时刻期权的理论价格. $S(t)$ 与 $F(t,S(t))$ 都有性质(H).

例 13 水库积水模型(图 6):

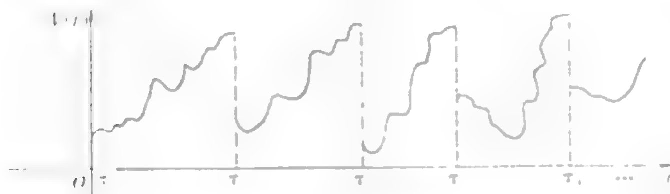


图 6 水库积水模型

$V(t)$ 有性质(H).

上面所举诸例表明,在实践中确有不少随机过程都具有性质(H)(容易看出或容易证明),但未必都是马尔可夫过程.从对马尔可夫过程的研究中我们也觉察出,许多结果的证明并不需要用到过程对一切停时都有马尔可夫性,而只要求过程有性质(H)就可以了.例如,最小 Q 过程的转移概率满足柯氏向后及向前方程,最小 Q 过程和一阶 Q 过程的第一次到达时间和积分型泛函的分布和矩都是某一非负线性方程的最小非负解等结果的导出就是如此.所以,具有性质(H)的过程在实践中大量存在且可用研究(强)马尔可夫的方法去研究它.就是说,到目前为止,具有性质(H)的过程的研究既必要而且有可能.基于此,我们把具有性质(H)的过程从随机过程中区分出来命名为马尔可夫骨架过程并加以研究.由例 1,我们把马尔可夫骨架过程叫做拟马尔可夫过程也未尝不可.

现在让我们回忆一下从马尔可夫过程的定义及研究到马尔可夫骨架过程定义的引入这段历史.

马尔可夫过程的原型马尔可夫链,由俄国数学家 A · A · 马尔可夫[1]于 1906 年提出.从此,开始对马尔可夫过程进行了源源不断的研究,写下了一首又一首光辉篇章.特别是对强马尔可夫过程的研究,成果丰富深刻.其中最简单且研究得最详尽的模型就是最小马氏链 $\{X(t,\omega), t < \tau\}$(图 1).

$0 = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \cdots \leqslant \tau_n \leqslant \cdots \tau_n \uparrow \tau, \tau_i (i = 1,2,\cdots)$ 是 $X(t)$ 的第 i 个跳跃点，τ 是其飞跃点，周知

（Ⅰ）$\tau_n(n = 0,1,2,\cdots)$ 有性质(H)；

（Ⅱ）$X(t) = X(\tau_n), \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1} (n = 0,1,2,\cdots)$；

（Ⅲ）$\tau_{n+1} - \tau_n (n = 0,1,2,\cdots)$ 服从负指数分布(参数依赖于 X_{τ_n})，即

$$P(\tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X_{\tau_n} = i) = \begin{cases} 1 - e^{-q_i}, t \geqslant 0; \\ 0, \quad t < 0. \end{cases}$$

$$q_i \geqslant 0 \quad (i \in E).$$

反之，若上述三条同时成立，则 $X(t)$ 必是一个强马尔可夫过程，但在应用中存在许多很重要的随机过程，它有性质（Ⅰ）、（Ⅱ），但不具备性质（Ⅲ）. 于是到了 1955 年 Lévy[1] 等人放弃性质（Ⅲ）而引入半马氏过程概念并加以研究. 到了 80 年代，M.H.A,Davis[2,4] 把性质（Ⅱ）放宽：$X(t)$ 在 $[\tau_n, \tau_{n+1})$ 中只取一个常值的假设改为一段光滑的曲线，而引入了逐段决定的马尔可夫过程概念并加以研究，得到这类过程的无穷小母元. 上面提到的例 9 和例 10 一些特殊情况就是逐段决定的马尔可夫过程的范例. 但仍有许多应用上十分有意义的随机过程不在考虑之列：在一般情况下例 9 和例 10 不是马尔可夫过程，更谈不上是 Davis 所定义的逐段决定马尔可夫过程；还有一些随机过程，有性质(H) 或曰上述性质（Ⅰ），而在两个相邻马氏时间 τ_n 和 τ_{n+1} 之间过程的轨道不一定是一段确定的光滑曲线，而是一段随机过程. 如：上面提到的例 3、例 4、例 6、例 7、例 8、例 11、例 12 以及例 13 就是这类过程的范例，其中例 3 和例 4 是马尔可夫过程，但其他六个例子一般说来就不是马尔可夫过程了，对于例 6 和例 7 实际上在 50 年代末 D.G.Kendall[1,2] 首先注意到 $L(\tau_n)(n \geqslant 0)$ 构成一个马氏链并加以研究. 不久，L. Takács[1] 不但研究了例 6 中 $L(\tau_n)$，而且（实际上）利用性质(H) 得到 $L(t)$ 的概率分布的拉氏变换的母函数的明显表达式及平稳分布的表达式. 之后，吴方[1]、徐光辉[1,2]、U.N.Bhat[1] 对例 7（实际上）利

用性质(H)也得到了 $L(t)$ 的概率分布的拉氏变换的母函数的明显表达式及平稳分布的表达式. 本书作者在前人及本人工作的基础上,并且仅仅抓住上述诸例中的共性(H),于 1997 年(侯振挺、刘再明、邹捷中[2,3])引入了现在我们命名的马尔可夫骨架过程的概念并加以研究,得到马尔可夫骨架过程的概率分布所满足的向后和向前方程. 近几年我们对这类过程及其应用进行了一系列但又是十分基础性的研究,使这类过程的理论基础的奠基工作已初步完成.

周知,马氏链和布朗运动这两类过程是马尔可夫过程或曰随机过程的两大支柱和两个极端情形:马氏链的轨道为全间断的,而布朗运动的轨道是连续的,经过数学家们的长期耕耘马氏链已发展成为内容丰富、结果深刻及应用广泛的跳过程及无穷粒子系统等,而布朗运动发展成扩散过程、随机微分方程一直到今天称之为的随机分析,这条研究之路,已经成为概率论发展的一大主流. 事物在它的发展过程中,有量变(即渐变),有质变(即突变),量变发展到一定程度就会发生质变,质变之后接着又重新向前发展(量变),事物的发展过程就是量变和质变重复交替发生的过程,事物在一系列的质变处重新开始(即有性质(H)). 跳过程刻画事物的质变过程,扩散过程刻划事物的量变过程. 事实上,应当把量变和质变同时考虑,把量变和质变融为一体,才能准确地、全面地把握事物的发展,为此,我们必须研究其轨道有连续段(未必是一段水平线)和跳跃点交互出现的"混合型"随机过程(或称混杂系统),跳跃点对应着事物的质变,事物经质变之后又重新按原来规律向前发展,就是说,在质变之处过程显示出马氏性,因此我们引入的马尔可夫骨架过程,为这种混合型随机过程的研究提供了一个合适的模型,上面例 13(水库积水模型)就是一则典例. 正因为量变和质变的交替出现贯穿于每个事物发展的全过程,所以许多领域(如排队系统、存储系统、水库管理系统、保险金融系统、生态系统、人口理论模型以及经济市场等)为马尔可夫骨架过程提供了广阔的应用前景.

第 [illegible] 篇

马尔可夫骨架过程

1 马尔可夫骨架过程的向后和向前方程

§1 马尔可夫骨架过程的概念及性质

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一完备概率空间,$(E,\mathscr{E})$是一可测空间,$\mathscr{F}.=\{\mathscr{F}_t,t\geqslant 0\}$是$\mathscr{F}$的一个$\sigma$-域流,$X=\{X(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega)\}$是定义于$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于$(E,\mathscr{E})$的关于$\mathscr{F}_t$适应的随机过程.

为了叙述方便,我们在状态空间E中增加一个孤立点b,令$\hat{E}=E\cup\{b\}$.按惯例构成新的可测空间$(\hat{E},\hat{\mathscr{E}})$,并把$X$扩张为随机过程$\hat{X}=\{\hat{X}(t,\omega),0\leqslant t<\infty\}$,其中

$$\hat{X}(t,\omega)=\begin{cases}X(t,\omega), & t<\tau(\omega);\\ b, & \tau(\omega)\leqslant t<\infty.\end{cases}\tag{1}$$

定义 1 称随机过程$X=\{X(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega)\}$为马尔可夫骨架过程,如果存在一列$\mathscr{F}$—停时$\{\tau_n\}_{n\geqslant 0}$满足:

(C1) $\{\tau_n\}_{n\geqslant 0}$为一严格增列,(即$\forall n\geqslant 0,\tau_n<\tau\Rightarrow\leqslant\tau_n<\tau_{n+1}$)且$\tau_0=0,\tau_n\uparrow\tau$,P-a.e

(C2) 对于每个τ_n及定义于$\hat{E}^{[0,\infty)}$上的任一$\hat{\mathscr{E}}^{[0,\infty)}$可测有界函数$f$,有

$$\mathbf{E}[f(\hat{X}(\tau_n+\cdot,\omega))\mid\mathscr{F}_{\tau_n}]=\mathbf{E}[f(\hat{X}(\tau_n+\cdot,\omega))\mid\hat{X}(\tau_n)]$$

在 $\Omega_{\tau_n}=\{\omega:\tau_n(\omega)<\infty\}$上P-a.e成立. (2)

如果把条件(C2)进一步加强为

$$\mathbf{E}[f(\hat{X}(\tau_n+\cdot,\omega))\mid\mathscr{F}_{\tau_n}]=\mathbf{E}_{\hat{X}(\tau_n)}[f(\hat{X}(\cdot,\omega))]\tag{3}$$

在 Ω_- 上 $P-a.e$ 成立,则称 X 为齐次马尔可夫骨架过程.

注 1　今后将假定,E 为一 Polish 空间,$\mathscr{E}$ 为其 Borelσ - 代数.设 Ω 为定义于 R_+ 取值于 E 的右连续函数的空间.

我们考虑定义在 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上取值于 E 的右连续过程 $X=\{X(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega)\}$. 由于 E 为 Polish 空间,Kolmogorov 存在定理保证上述对样本空间 Ω 的限制不失一般性. 设 $F^0=(\mathscr{F}_t^0)_{t\geqslant 0}$ 为过程 X 的自然流,$\mathscr{F}_t^0=\sigma(X_s,0\leqslant s\leqslant t)$,$\mathscr{F}_\infty^0=\bigvee_{t=0}^{\infty}\mathscr{F}_t^0$;假定存在 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一族概率测度 $P_x,x\in E$,满足对任意 $A\in\mathscr{F}_\infty^0$,$x\to P_x(A)$ 为 $\mathscr{E}$ - 可测的,且对任意的 $x\in E$,

$$P_x(A)=P(A\mid X_0=x),A\in\mathscr{F}_\infty^0,$$

对任意 E 上的概率测度 μ,我们定义 $(\Omega,\mathscr{F}_\infty^0)$ 上的概率测度 P_μ,$P_\mu(\cdot)=\int_E P_x(\cdot)\mu(\mathrm{d}x)$. 再令 $\mathscr{F}_t^\mu$ 为 $\mathscr{F}_t^0$ 关于测度 P_μ 的完备化. 定义

$$\mathscr{F}_t=\bigcap_{\mu\in\mathscr{P}(E)}\mathscr{F}_t^\mu,t\geqslant 0,$$

其中 $\mathscr{P}(E)$ 为 E 上的概率测度的集合.

注 2　由于 $\hat{X}$ 是取值于距离可测空间中的右连续随机过程,从而是循序可测的,故 $\hat{X}(\tau_n,\omega)$ 和 $f(\hat{X}(\tau_n+\cdot,\omega)$ 均是可测的.

设 $X=\{X(t,\omega),0\leqslant t<\tau\}$ 为马尔可夫骨架过程. 引进取值于可测空间 $(\mathrm{R}_+\times E_\Delta,\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)\times\mathscr{E}_\Delta)$ 中的随机变量序列 $\eta_n=(\sigma_n,\hat{X}(\tau_n)),n\geqslant 0$. 其中 $\sigma_0=0,\sigma_n=\tau_n-\tau_{n-1},n\geqslant 1$(约定 $\infty-\infty=0$).

定理 1　设 $X=\{X(t,\omega),0\leqslant t<\tau\}$ 为马尔可夫骨架过程. 则序列

$$\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_n,\cdots,\eta_0=(0,\hat{X}(0)),\eta_n=(\sigma_n,\hat{X}(\tau_n))$$

构成状态空间为 $\bar{\mathrm{R}}_+\times E_\Delta$ 的马尔可夫序列,且转移概率 $P(\eta_{n+1}\in B\mid\eta_n)=P(\eta_{n+1}\in B\mid\hat{X}_{\tau_n})(B\in\mathscr{B}(\bar{\mathrm{R}}_+)\times\mathscr{E}_\Delta,n\geqslant 0)$ 与 η_n 的第一个分量 σ_n 无关.

证明　对任意的 $B \in \mathscr{B}(\mathrm{R}_+) \times \mathscr{E}_\Delta$，事件 $(\eta_{n+1} \in B) \in \sigma(\hat{X}(\tau_n + t, \cdot), t \geq 0)$. 因此，由马尔可夫骨架过程 $\hat{X}$ 关于停时 $\tau_n (n \geq 0)$ 的马尔可夫性(即(2)式)，有

$$
\begin{aligned}
& P(\eta_{n+1} \in B \mid \eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n) = \\
& \mathbf{E}[P(\eta_{n+1} \in B \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) \mid \eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n] = \\
& \mathbf{E}[P(\eta_{n+1} \in B \mid \hat{X}_{\tau_n}) \mid \eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n] = \\
& P(\eta_{n+1} \in B \mid \hat{X}_{\tau_n}).
\end{aligned}
$$

这便证明了随机序列 $(\eta_n)_{n \geq 0}$ 为马尔可夫序列，且转移概率 $P(\eta_{n+1} \in B \mid \eta_n) = P(\eta_{n+1} \in B \mid \hat{X}_{\tau_n}) (B \in \mathscr{B}(\bar{R}_+) \times \mathscr{E}_\Delta, n \geq 0)$ 与 η_n 的第一个分量 σ_n 无关. 证毕.

如果进一步假定马尔可夫骨架过程 X 为齐次的，则由(3)知，$P_x\{\eta_{n+1} \in B \mid \hat{X}_{\tau_n}\} = P_{\hat{X}_{\tau_n}}(\eta_1 \in B)$. 进一步地，对任意 $t \in \mathrm{R}_+, n \geq 0$ 有

$$
P_x(\sigma_{n+1} > t \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) = P_{\hat{X}_{\tau_n}}(\tau_1 > t), \mathrm{P}_x - \text{a.s.} 于 \Omega_{\tau_n} \quad x \in E,
$$

其中 $\Omega_{\tau_n} = (\tau_n < \infty)$. 于是我们得到下面推论的(i)和(ii). (iii)的证明亦是平凡的，略去.

推论 1　如果马尔可夫骨架过程 $X = (x(t, \omega), 0 \leq t < \tau(\omega))$ 是齐次的，则

1) 序列 $\{\eta_n\}_{n \geq 0}$ 构成取值于 $\bar{\mathrm{R}}_+ \times E_\Delta$ 上的齐次马尔可夫序列，且转移概率

$$
P_x(\eta_{n+1} \in B \mid \eta_n) = P_{\hat{X}_{\tau_n}}(\eta_1 \in B). \mathrm{P}_x - \text{a.s.}, x \in E;
$$

2) 对任意 $t \in R_+, n \geq 0$ 有

$$
P_x(\sigma_{n+1} > t \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) = P_{\hat{X}_{\tau_n}}(\tau_1 > t), \mathrm{P}_x - \text{a.s.} 于 \Omega_{\tau_n}, \quad x \in E;
$$

3) 对任意的 $C_i \in \mathscr{B}(\mathrm{R}_+), i = 1, 2, \cdots, n; n \geq 0$，有

$$
\begin{aligned}
& P_x(\sigma_1 \in C_1, \cdots, \sigma_n \in C_n \mid \hat{X}_0, \hat{X}_{\tau_1}, \cdots, \hat{X}_{\tau_n}) = \\
& P_x(\sigma_1 \in C_1 \mid \hat{X}_0, \hat{X}_{\tau_1}) P_x(\sigma_2 \in C_2 \mid \hat{X}_{\tau_1}, \hat{X}_{\tau_2}) \cdots
\end{aligned}
$$

$$P(\sigma_n \in C_n \mid X_{\tau_{n-1}}, \hat{X}_{\tau_n}),$$

$$P_x - \text{a.s.}, x \in E.$$

上面定理1及其推论、以及关于停时列$(\tau_n)_{n\geq 0}$的马尔可夫性(C1)、(C2),就是把满足定义1中条件的过程称为马尔可夫骨架过程的原因. 序列$(\eta_n)_{n\geq 0}$就称为该过程的**马尔可夫骨架**. 称$(\hat{X}_{\tau_n})_{n\geq 0}$为过程的**嵌入链**. 鉴于$(\eta_n)_{n\geq 0}$与$(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n})_{n\geq 0}$相互唯一决定,亦称$(\tau_n, \hat{X}_{\tau_n})_{n\geq 0}$为该过程的马尔可夫骨架,$(\tau_n \geq 0)$称为$X$的骨架时序列.

设$X = \{X(t,\omega), 0 \leq t < \tau(\omega)\}$为最小$Q$过程(其中$\tau$为第一次飞跃时刻). 则$X$为齐次马尔可夫骨架过程,其马尔可夫骨架为$(\sigma_n, X_{\tau_n})_{n\geq 0}$,其中,$\sigma_n = \tau_n - \tau_{n-1}$,$\tau_n$为过程第$n$次跳跃时刻,$\{X_{\tau_n}\}$为过程的嵌入链. 我们说,马尔可夫骨架较嵌入链来得重要. 这是因为嵌入链只给出了过程当跳发生时的跳转移去向,没有反映在一状态的逗留时间;而最小Q过程的马尔可夫骨架不仅给出了过程的跳转移去向,而且给出了过程在任一状态的逗留时间. 实际上,最小Q过程的马尔可夫骨架与最小Q过程相互唯一决定. 另外,从转移核的角度看,嵌入链的转移矩阵(q_{ij}/q_i)(约定$(q_{ii}/q_i) = 0$)不能唯一决定Q-矩阵(q_{ij}),而马尔可夫骨架的转移核与Q-矩阵相互唯一决定.

下面引入相关跳跃过程的概念.

定义2 称如下定义的过程$Y = (Y(t,\omega), 0 \leq t < \tau(\omega))$为马尔可夫骨架过程$X = (X(t,\omega), 0 \leq t < \tau(\omega))$的**相关跳跃过程**:

$$Y(t,\omega) = X_{\tau_n}, \text{若 } \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, n \geq 0. \tag{4}$$

记马氏序列$(\eta_n)_{n\geq 0}$的转移核列为$(q_n(x, dt, dx))_{n\geq 0}$,由严加安[1]的11.50注知$q_n$存在. 又记$F_n(x, dt) = q_n(x, dt, E_\Delta)$,$n \geq 0$. 对任一$B \in \mathscr{E}_\Delta$,$q_n(x, dt, dx) \ll F_n(x, dt)$,故

$$q_n(x, dt, B) = Q_n(x, t, B) F_n(x, dt),$$

其中 $q_n(x,\mathrm{d}t,B)$ 关于 $F_n(x,\mathrm{d}t)$ 的 Radon-Nikodym 导数 $Q_n(x,t,B)$ 可取得对固定的 (x,t)，$Q_n(x,t,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}_\Delta$ 上的概率测度，而对固定的 $B\in\mathscr{E}_\Delta$，$Q_n(\cdot,\cdot,B)$ 是 $\mathscr{E}_\Delta\times\mathscr{B}(\bar{\mathrm{R}}_+)$- 可测的. 事实上，我们有

$$q_n(\hat{X}_{\tau_n},\mathrm{d}t,\mathrm{d}x) = P_x(\sigma_{n+1}\in\mathrm{d}t,\hat{X}_{\tau_{n+1}}\in\mathrm{d}x\mid\hat{X}_{\tau_n}),$$

$$\mathrm{P}_x-\mathrm{a.s.},x\in E_\Delta,n\geqslant 0;$$

$$F_n(\hat{X}_{\tau_n},\mathrm{d}t) = P_x(\sigma_{n+1}\in\mathrm{d}t\mid\hat{X}_{\tau_n}),$$

$$c\mathrm{P}_x-\mathrm{a.s.},x\in E_\Delta,n\geqslant 0;$$

$$Q_n(\hat{X}_{\tau_n},\sigma_{n+1},\mathrm{d}x) = P_x(\hat{X}_{\tau_{n+1}}\in\mathrm{d}x\mid\hat{X}_{\tau_n},\sigma_{n+1})$$

$$\mathrm{P}_x-\mathrm{a.s.},x\in E_\Delta,n\geqslant 0.$$

最后，我们来讨论马尔可夫骨架过程的结构. 定义马尔可夫骨架过程 $X=(x(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega))$ 的子过程列 $X^{(n)}=(X^{(n)}(t,\omega),0\leqslant t<\sigma_n(\omega)),n\geqslant 1$，如下：

$$X^{(n)}(t,\omega) = X(\tau_{n-1}+t,\omega),0\leqslant t<\sigma_n(\omega),n\geqslant 1.$$

容易见得，马尔可夫骨架过程 X 是这样演化的：从初始状态 X_0 出发，首先按第一个子过程 $X^{(1)}$ 演化至时刻 τ_1（τ_1 的分布为 $F_0(X_0,\cdot)$），并按转移核 $Q_0(X_0,\tau_1,\cdot)$ 跳转移至状态 X_{τ_1}；再从 X_{τ_1} 出发，按第二个子过程 $X^{(2)}$ 演化至 τ_2（$\tau_2-\tau_1$ 的分布为 $F_1(X_{\tau_1},\cdot)$），又按转移核 $Q_1(X_{\tau_1},\tau_2-\tau_1,\cdot)$ 跳转移至状态 X_{τ_2}；…，依此类推，直至时刻 τ 过程 X 中断.

§2　正规马尔可夫骨架过程的定义及向后和向前方程

定义 1　称齐次马氏骨架过程 $X=\{X(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega)\}$ 为正规的，如果存在 $(h(x,t,A))$ 满足条件

$$\mathbf{E}[X(\tau_n+t)\in A,\tau_{n+1}-\tau_n>t\mid X(\tau_n)] = h(X(\tau_n),t,A)\quad \mathrm{P}-\mathrm{a.e.}\quad A\in\mathscr{E},t\geqslant 0,n\geqslant 0.$$

$h(x,t,A)$ 当 A 固定时是二元可测的，当 x,t 固定时是 $(E,\mathscr{E})$ 上的准分布．

特别，$h(x,t,A)=P(X(t)\in A,\tau_1>t\mid X(0)=x)$ $q(x,t,A)=P(X(\tau_1)\in A,\tau_1\leqslant t\mid X(0)=x)$，这里 $q(x,t,A)$ 为 (η_n) 的转移概率 $q(x,t,A)=\int_0^t q(x,\mathrm{d}t,A)$．

令 $q(x,A)=\lim\limits_{t\to\infty}q(x,t,A)$，$G(x,t)=q(x,t,E)=P(\tau_1\leqslant t\mid X(0)=x)$．

以下如无特别声明只考虑正规马氏骨架过程，并把"正规"二字省略．

令 $\mathscr{M}\triangleq\{R\mid R(x,A)$ 是 $E\times\mathscr{E}$ 上非负函数，A 固定时是 $\mathscr{E}$ 可测的，x 固定时是 $(E,\mathscr{E})$ 上的非负测度$\}$．在 $\mathscr{M}$ 中定义乘积如下：$\forall R,S\in\mathscr{M}$

$$R\cdot S(x,A)\triangleq\int_E R(x,\mathrm{d}y)S(y,A),\quad x\in E,A\in\mathscr{E}.\quad(1)$$

显然，$R\cdot S\in\mathscr{M}$，且 $\mathscr{M}$ 中乘积满足结合律，特别，$\forall R\in\mathscr{M}$，

$$\begin{cases}R^0(x,A)\triangleq\delta_A(x);\\ R^{n+1}(x,A)\triangleq\int_E R(x,\mathrm{d}y)R^n(y,A),\quad x\in E,A\in\mathscr{E};\\ =\int_E R^n(x,\mathrm{d}y)R(y,A).\end{cases}\quad(2)$$

令

$$P(x,t,A)\triangleq P(X(t)\in A\mid X(0)=x),\quad t\geqslant 0,x\in E,A\in\mathscr{E}.$$

$$P_\lambda(x,A)\triangleq\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}P(x,t,A)\mathrm{d}t,\quad \lambda>0,x\in E,A\in\mathscr{E}.$$

定理 1 $\forall\lambda>0$，$\{P_\lambda(x,A),x\in E,A\in\mathscr{E}\}$ 是非负方程

$$Z(x,A)=\int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y)Z(y,A)+h_\lambda(x,A),\quad x\in E,A\in\mathscr{E}\quad(3)$$

的最小非负解,即

$$P_\lambda(x,A) = (\sum_{n=0}^{\infty} Q^n \cdot H)(x,A), \tag{4}$$

其中

$$H = (h_\lambda(x,A), x \in E, A \in \mathscr{E}),$$
$$Q = (q_\lambda(x,A), x \in E, A \in \mathscr{E}), \tag{5}$$

$$h_\lambda(x,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(x,t,A)\mathrm{d}t, q_\lambda(x,A) =$$
$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathrm{d}q(x,t,A). \tag{6}$$

注 由以上定理知,过程 X 的分布由 H,Q 唯一决定,且在应用上一般只要知道过程的分布就够了.故我们把 X 叫做(H,Q)过程.

为证明定理1,先给出两个引理

引理1 $\forall t \geq 0, A \in \mathscr{E}, n \geq 0$

$$E[X(t) \in A, \tau_n \leq t < \tau_{n+1} \mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)] =$$
$$h(X(\tau_n), t - \tau_n, A) \cdot I_{\{\tau_n \leq t\}} \quad \mathrm{P-a.e.} \tag{7}$$

其中 I_C 表示 C 的示性函数.

证明 先对 A 为闭集证明(7)式.设 A 为闭集,令

$$A_l \triangleq \{x : \mathrm{d}(x,A) < \frac{1}{l}\},$$

$$\overline{A_l} \triangleq \{x : \mathrm{d}(x,A) \leq \frac{1}{l}\}, \quad l = 1,2,\cdots$$

$$B_i^{(k)} \triangleq \{w \in \Omega, \frac{i}{2^k}t \leq t - \tau_n < \frac{i+1}{2^k}t\},$$
$$i = 0,\cdots,2^k - 1; k \geq 1.$$

注意 X 右连续及 $A = \bigcap_{l=1}^{\infty} A_l = \bigcap_{l=1}^{\infty} \overline{A_l}$ 可知,

$$\{X(t) \in A, \tau_n \leq t < \tau_{n+1}\} =$$
$$\{X(\tau_n + t - \tau_n) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n > t - \tau_n\} \cap$$

$$\{\tau_n \leqslant t\} = \bigcap_{l=1}^{\infty}(\{X(\tau_n + t - \tau_n) \in A_l, \tau_{n+1} - \tau_n > t - \tau_n\} \cap \{\tau_n \leqslant t\}) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{K=1}^{\infty} \bigcap_{k=K}^{\infty} (\bigcup_{i=0}^{2^k-1} \{X(\tau_n + \frac{i+1}{2^k}t) \in A_l, \tau_{n+1} - \tau_n > \frac{i+1}{2^k}t\} \cap B_i^{(k)} \cap \{\tau_n \leqslant t\}. \tag{8}$$

另一方面,

$$\{X(t_n + t - \tau_n) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n > t - \tau_n\} \cap \{\tau_n \leqslant t\} = \bigcap_{l=1}^{\infty}(\{X(\tau_n + t - \tau_n) \in \overline{A_l}, \tau_{n+1} - \tau_n > t - \tau_n\} \cap \{\tau_n \leqslant t\}) \supset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{k=K}^{\infty} (\bigcup_{i=0}^{2^k-1} \{X(\tau_n + \frac{i+1}{2^k}t) \in A_l, \tau_{n+1} - \tau_n > t - \tau_n\} \cap B_i^{(k)} \cap \{\tau_n \leqslant t\}) \supset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{k=K}^{\infty} (\bigcup_{i=0}^{2^k-1} \{X(\tau_n + \frac{i+1}{2^k}t) \in A_l, \tau_{n+1} - \tau_n > \frac{i+1}{2^k}t\} \cap B_i^{(k)} \cap \{\tau_n \leqslant t\}). \tag{9}$$

由(8) 和(9) 得,

$$I_{\{X(t) \in A, \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}\}} = \lim_{l \to \infty} \lim_{k \to \infty} (\sum_{i=0}^{2^k-1} I_{\{X(\tau_n + \frac{i+1}{2^k}t) \in A_l, \tau_{n+1} - \tau_n > \frac{i+1}{2^k}t\}} \cdot I_{B_i^{(k)}} \cdot I_{\{\tau_n \geqslant t\}}) \quad P-a.e. \tag{10}$$

注意(10) 的右端是关于 l 的单调下降序列的极限,以及

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{2^k-1} I_{\{X(\tau_n + \frac{i+1}{2^k}t) \in A_l, \tau_{n+1} - \tau_n > \frac{i+1}{2^k}t\}} \cdot I_{B_i^{(k)}} \cdot I_{\{\tau_n \leqslant t\}} \leqslant 1 \quad P-a.e.$$

并由单调收敛定理、控制收敛定理和条件数学期望的性质得

$$E[X(t) \in A, \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1} \mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)] =$$

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{2^k-1}\mathbf{E}[X(\tau_n+\frac{i+1}{2^k}t)\in A_l,\tau_{n+1}-\tau_n>$$

$$\frac{i+1}{2^k}t\mid X(\tau_n),\tau_n,X(0)]\cdot I_{B_i^{(k)}}\cdot I_{\{\tau_n\leqslant t\}}=$$

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{2^k-1}\mathbf{E}[X(\tau_n+\frac{i+1}{2^k}t)\in A_l,$$

$$\tau_{n+1}-\tau_n>\frac{i+1}{2^k}t\mid X(\tau_n)]\cdot I_{B_i^{(k)}}\cdot I_{\{\tau_n\leqslant t\}}=$$

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{2^k-1}h(X(\tau_n),\frac{i+1}{2^k}t,A_l)\cdot I_{B_i^{(k)}}\cdot I_{\{\tau_n\leqslant t\}}=$$

$$\lim_{l\to\infty}h(X(\tau_n),t-\tau_n,A_l)\cdot I_{\{\tau_n\leqslant t\}}=$$

$$h(X(\tau_n),t-\tau_n,\bigcap_{l=1}^{\infty}A_l)\cdot I_{\{\tau_n\leqslant t\}}=$$

$$h(X(\tau_n),t-\tau_n,A)\quad \mathrm{P-a.e.}$$

以上最后第三个等号成立,利用了不等式

$$h(X(\tau_n),t-\tau_n,A_l)\cdot I_{\{\tau_n\leqslant t\}}\leqslant$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{2^k-1}h(X(\tau_n),\frac{i+1}{2^k}t,A_l)\cdot I_{B_i^{(k)}}\cdot I_{\{\tau_n\leqslant t\}}\leqslant$$

$$h(X(\tau_n),t-\tau_n,\overline{A_l})\cdot I_{\{\tau_n\leqslant t\}}.$$

以及当 $l\to\infty$ 时两边的极限相同.

至此,我们证明了(7)式对一切闭集 A 成立,注意 $h(x,t,A)$ 关于 A 为准分布及条件期望的性质,在(7)中使用 $\lambda-\pi$ 系方法易证明对一切 $A\in\mathscr{E}$,(7)式成立.引理1证毕.

引理2 $\forall A\in\mathscr{E},t\geqslant 0,x\in E.$

$$P(X(\tau_n)\in A,\tau_n\leqslant t\mid X(0)=x)=q^{*n}(x,t,A),\tag{11}$$

其中

$$\begin{cases}q^{*0}(x,t,A)\triangleq\delta_A(x),q^{*1}(x,t,A)\triangleq q(x,t,A);\\ q^{*n}(x,t,A)\triangleq\int_E\int_0^t q^{*n-1}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)q(y,t-s,A),\quad n\geqslant 2.\end{cases}\tag{12}$$

证明　$n=1$时，

$$P(X(\tau_1)\in A,\tau_1\leqslant t\mid X(0)=x)=$$
$$q(x,t,A)=q^{*1}(x,t,A)$$

假设 $n=k$ 时，(11) 成立，$n=k+1$ 时

$$P(X(\tau_{k+1})\in A,\tau_{k+1}\leqslant t\mid X(0)=x)=$$

$$\int_\Omega P[X(\tau_{k+1})\in A,\tau_{k+1}-\tau_k\leqslant t-\tau_k\mid X(\tau_k),\tau_k,X(0)=x]\cdot$$

$$I_{\{\tau_k\leqslant t\}}\cdot P(\mathrm{d}\omega\mid X(0)=x)=$$

$$\int_\Omega q(X(\tau_k),t-\tau_k,A)\cdot I_{\{\tau_k\leqslant t\}}\cdot P(\mathrm{d}\omega\mid X(0)=x)=$$

$$\int_E\int_0^t q(y,t-s,A)\cdot P(X(\tau_k)\in \mathrm{d}y,\tau_k\in \mathrm{d}s\mid X(0)=x)=$$

$$\int_E\int_0^t q(y,t-s,A)\cdot q^{*k}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)=q^{*k+1}(x,t,A).$$

以上最后第三个等号成立，利用了积分变换

$$T:\Omega\to E\times[0,\infty),\quad T(\omega)\triangleq(X(\tau_k),\tau_k).$$

引理 2 证毕.

定理 1 的证明　先说明只要证明了下列等式就证明了定理 1

$$P(X(t)\in A\mid X(0)=x)=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_E\int_0^t h(y,t-s,A)q^{*n}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).\tag{13}$$

事实上，在上式中取拉氏变换即得

$$P_\lambda(x,A)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}P(X(t)\in A\mid X(0)=x)\mathrm{d}t=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_E h_\lambda(y,A)q_\lambda^{*n}(x,\mathrm{d}y),\tag{14}$$

其中

$$q_\lambda^{*0}(x,A)=\delta_A(x),$$

$$q_\lambda^{*n}(x,A)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}q^{*n}(x,\mathrm{d}t,A)=$$

$$\underbrace{\int_E \cdots \int_E}_{n-1} q_\lambda(x, \mathrm{d}y_1) q_\lambda(y_1, \mathrm{d}y_2) \cdots q_\lambda(y_{n-1}, A), \quad n \geqslant 1.$$

因此,(14) 式变为了(4) 式,即方程(3) 的最小非负解.

以下证明(13) 式:

$$P(X(t) \in A \mid X(0) = x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X(t) \in A, \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1} \mid X(0) = x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega \mathbf{E}[X(t) \in A,$$

$$\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1} \mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)] P(\mathrm{d}w \mid X(0) = x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega h(X(\tau_n), t - \tau_n, A) \cdot I_{\{\tau_n \leqslant t\}} \cdot P(\mathrm{d}w \mid X(0) = x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_E \int_0^t h(y, t - s, A) \cdot$$

$$P(X(\tau_n) \in \mathrm{d}y, \tau_n \in \mathrm{d}s \mid X(0) = x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_E \int_0^t h(y, t - s, A) \cdot q^{*n}(x, \mathrm{d}s, \mathrm{d}y).$$

以上第三个等号应用了引理 1,第四个等号使用了积分变换,最后一个等号使用了引理 4.

从而(13) 式成立,定理 1 证毕.

定义 2 方程(3) 称为(H, Q) 过程 X 的向后方程.

定义 3 若 $\forall \lambda > 0$,存在 $\hat{Q} = (\hat{q}_\lambda(x, A), x \in E, A \in \mathscr{E}) \in \mathscr{M}$满足 $H \cdot \hat{Q} = Q \cdot H$,即

$$\int_E h_\lambda(x, \mathrm{d}y) \hat{q}_\lambda(y, A) =$$

$$\int_E q_\lambda(x, \mathrm{d}y) h_\lambda(y, A), \quad x \in E, A \in \mathscr{E}, \tag{15}$$

则称非负方程

$$\hat{Z}(x, A) = \int_E \hat{Z}(x, \mathrm{d}y) \hat{q}_\lambda(y, A) +$$

$$h_\lambda(x,A), \quad x \in E, A \in \mathscr{E}, \lambda > 0 \tag{16}$$

为(H,Q)过程 X 的向前方程.

命题 1 若 H 在 $\mathscr{M}$ 中存在右逆,即 $\forall \lambda > 0$,存在 $H_r^{-1} \in \mathscr{M}$ 使

$$H \cdot H_r^{-1}(x,A) = \delta_A(x) \quad \forall x \in E, A \in \mathscr{E}$$

则向前方程(16)存在,此时 $\hat{Q} = H_r^{-1} \cdot Q \cdot H$

证明 $\forall \lambda > 0$,存在 $H_r^{-1} \in \mathscr{M}$ 令

$$\hat{Q} = H_r^{-1} \cdot Q \cdot H$$

注意 $\mathscr{M}$ 中乘积满足结合律可知

$$H \cdot \hat{Q} = H \cdot (H_r^{-1} \cdot Q \cdot H) = (H \cdot H_r^{-1}) \cdot (Q \cdot H) =$$
$$(\delta_A(x)) \cdot (Q \cdot H) = Q \cdot H$$

由定义 3 知向前方程(16)存在.

定理 2 如果(H,Q)过程的向前方程存在,则向前方程和向后方程有相同的最小非负解.因此,$P_\lambda(x,A)$ 也是向前方程的最小非负解,即

$$P_\lambda(x,A) = (\sum_{n=0}^{\infty} H \cdot \hat{Q}^n)(x,A)$$

证明 易知向后方程(3)和向前方程(16)的最小非负解可用下列迭代方法得到

$$Z(x,A) = \lim_{n\to\infty} Z^{(n)}(x,A), \quad \hat{Z}(x,A) = \lim_{n\to\infty} \hat{Z}^{(n)}(x,A)$$

其中,

$$\begin{cases} Z^{(0)}(x,A) \equiv 0, & x \in E, A \in \mathscr{E}; \\ Z^{(n+1)}(x,A) = \int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y) Z^{(n)}(y,A) + h_\lambda(x,A), & x \in E, A \in \mathscr{E}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{Z}^{(0)}(x,A) \equiv 0, & x \in E, A \in \mathscr{E}; \\ \hat{Z}^{(n+1)}(x,A) = \int_E \hat{Z}^{(n)}(x,\mathrm{d}y) \hat{q}_\lambda(y,A) + h_\lambda(x,A), & x \in E, A \in \mathscr{E}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

注意(15),由 $Z^{(0)} \equiv \hat{Z}^{(0)}$ 递推可得

$$Z^{(n)}(x,A) \equiv \hat{Z}^{(n)}(x,A), \quad n \geq 0.$$

定理证毕.

§3 (H,Q) 过程的正则性准则

定义 1 (H,Q) 过程 $X=\{X(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega)\}$ 称为正则的,若对每个 $x\in E$,有

$$P(\tau=\infty\mid X(0)=x)=1. \tag{1}$$

定理 1 (H,Q) 过程 X 为正则的充分必要条件是对每个 $x\in E$,及任意 $t>0$,有

$$P(x,t,E)=1 \tag{2}$$

或等价地,对每个 $x\in E$,及任意 $\lambda>0$,有

$$\lambda P_\lambda(x,E)=1. \tag{3}$$

证明 结论明显.

令 $B_E\triangleq\{f:f$ 是$(E,\mathscr{E})$ 上有界可测实函数$\}$.

引理 1 若 $0\leqslant f\in B_E$,且对某 $\lambda>0$,存在 $0\leqslant u\in B_E$,使

$$f(x)-\int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y)f(y)=\int_E h_\lambda(x,\mathrm{d}y)u(y)\geqslant 0, \tag{4}$$

则

$$f(x)\geqslant\int_E P_\lambda(x,\mathrm{d}y)u(y),\quad \forall x\in E. \tag{5}$$

进一步,若方程

$$\begin{cases}g(x)=\int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y)g(y), & x\in E;\\ 0\leqslant g\in B_E.\end{cases} \tag{6}$$

只有零解,则(5) 成为等号,即

$$f(x)=\int_E P_\lambda(x,\mathrm{d}y)u(y),\quad \forall x\in E. \tag{7}$$

证明 对于引理中的 $\lambda>0$,易知 $\forall A\in\mathscr{E},\{P_\lambda(x,A),x\in E\}$ 是非负方程

$$Z(x)=\int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y)X(y)+h_\lambda(x,A),\quad x\in E. \tag{8}$$

的最小非负解：使用定理 2.2(这里定理 2.2 是指本章 §2 的定理 2. 下面第 3 章 §1 命题 1 的证明中引用的定义 1.3.1 是指第 1 章 §3 的定义 1. 对于引理和推论等的引用类此). 证明中求最小非负解的迭代法不难证明：$\{\int_E P_\lambda(x,\mathrm{d}y)u(y), x\in E\}$ 是非负方程

$$Z(x) = \int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y)Z(y) + \int_E h_\lambda(x,\mathrm{d}y)u(y), \quad x\in E \quad (9)$$

的最小非负解.而由引理的条件得

$$f(x) = \int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y)f(y) + \int_E h_\lambda(x,\mathrm{d}y)u(y), \quad x\in E.$$

从而(3.5)成立.

$\forall x\in E$,令

$$g(x) \triangleq f(x) - \int_E P_\lambda(x,\mathrm{d}y)u(y),$$

则 $0\leqslant g\in B_E$,且 g 满足方程(6).故若(6)只有零解,则 $g\equiv 0$,即(7)成立.

定理 2 (H,Q) 过程 X 正则的充分必要条件是方程

$$\begin{cases} f(x) = \int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y)f(y), \\ 0\leqslant f\leqslant 1, f\in B_E, \end{cases} \quad x\in E, \lambda>0 \quad (10)$$

只有零解.

证明 充分性：在(9)中令 $u(y)\equiv\lambda$,可知 $\{\lambda P_\lambda(x,E), x\in E\}$ 是非负方程

$$\begin{cases} Z(x) = \int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y)Z(y) + \lambda h_\lambda(x,E), \\ 0\leqslant Z\leqslant 1, Z\in B_E, \end{cases} \quad x\in E \quad (11)$$

的最小非负解.由于(10)只有零解,从而(11)只有唯一解 $\{\lambda P_\lambda(x,E), x\in E\}$.

由定义 2.1(i)和(ii)知,$\forall x\in E$,

$$q(x,t,E) + h(x,t,E) = 1,$$

从而

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}dq(x,t,E)+\int_0^\infty e^{-\lambda t}h(x,t,E)dt=\frac{1}{\lambda}$$

即

$$q_\lambda(x,E)+\lambda h_\lambda(x,E)=1, \qquad (12)$$

从而 $Z(x)\equiv 1$ 也是(11)的解.因此,

$$\lambda P_\lambda(x,E)=1, \forall x\in E.$$

由定理1知,(H,Q) 过程 X 正则.

必要性:由于 $\{\lambda P_\lambda(x,E), x\in E\}$ 和 $Z(x)\equiv 1$ 分别是(11)的最小解和最大解,因此 $\{1-\lambda P_\lambda(x,E), x\in E\}$ 是(10)的最大解.事实上,(10)的最大解可从如下迭代得到:

$$f^{(0)}(x)\equiv 1,$$

$$f^{(1)}(x)=\int_E q_\lambda(x,dy)f^{(0)}(y)=$$

$$q_\lambda(x,E)=1-\lambda h_\lambda(x,E).$$

$$f^{(2)}(x)=\int_E q_\lambda(x,dy)f^{(1)}(y)=$$

$$q_\lambda(x,E)-\lambda\int_E q_\lambda(x,dy)h_\lambda(y,E)=$$

$$f^{(1)}(x)-\lambda\int_E q_\lambda(x,dy)h_\lambda(y,E)=$$

$$1-\lambda[h_\lambda(x,E)+\int_E q_\lambda(x,dy)h_\lambda(y,E)]\cdots$$

$$f^{(n+1)}(x)=\int_E q_\lambda(x,dy)f^{(n)}(y)=$$

$$f^{n}(x)-\lambda\int_E q_\lambda(x,dy_1)\underbrace{\int_E\cdots\int_E}_{n} q_\lambda(y_{n-1},dy_n)h_\lambda(y_n,E)=$$

$$1-\lambda(\sum_{k=0}^{n}Q^k\cdot H)(x,E),$$

从而

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)=$$

$$1-\lambda\Big(\sum_{k=0}^{\infty} Q^{k}\cdot H\Big)(x,E)=1-\lambda P_{\lambda}(x,E).$$

由于 (H,Q) 过程正则,由定理 1 知,$\lambda P_{\lambda}(x,E)=1$,从而(10)只有零解.定理证毕.

以下给出一个较易检验的充分条件.

定理 3 如果 $q_{\lambda}(x,A)$ 满足条件

$$\beta(\lambda)\triangleq\sup_{x\in E} q_{\lambda}(x,E)<1,\quad \forall\lambda>0, \tag{13}$$

则 (H,Q) 过程 $X=\{X(t,\omega)\},0\leqslant t<\tau\}$ 正则.

证明 由(13)及方程(10)的最大解迭代求解法知,

$$f^{(1)}(x)=q_{\lambda}(x,E)\leqslant\beta(\lambda).$$

$$f^{(2)}(x)=$$

$$\int_{E} q_{\lambda}(x,\mathrm{d}y)f^{(1)}(y)\leqslant\beta(\lambda)q_{\lambda}(x,E)\leqslant\beta^{2}(\lambda)\cdots$$

$$f^{(n+1)}(x)=$$

$$\int_{E} q_{\lambda}(x,\mathrm{d}y)f^{(n)}(y)\leqslant\beta^{n}(\lambda)q_{\lambda}(x,E)\leqslant\beta^{n+1}(\lambda),$$

从而

$$0\leqslant f(x)=\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)\leqslant\lim_{n\to\infty}\beta^{n}(\lambda)=0,\quad\forall x\in E,$$

故(10)只有零解,由定理 2 知 X 正则.

推论 1 如果状态空间 E 有限,且 $\forall x\in E$

$$P(\tau_1>0\mid X(0)=x)>0 \tag{14}$$

则 (H,Q) 过程 $X=\{X(t),0\leqslant t<\tau\}$ 正则.

证明 由 E 有限及(14)可得(13)成立.

§4 若干重要特殊情况

(A) $(H,G.q)$ 过程

分离性条件 (D):

$$q(x,t,A)=G(x,t)q(x,A), \tag{1}$$

即

$$P(X(\tau_1) \in A, \tau_1 \leqslant t \mid X(0) = x) =$$
$$P(\tau_1 \leqslant t \mid X(0) = x) \cdot P(X(\tau_1) \in A \mid X(0) = x). \quad (2)$$

定义 1 若(H,Q)过程满足分离性条件(D),则称为$(H,G.q)$过程.

由侯振挺、郭青峰[1]的引理 9.3.1 知,最小齐次可列马氏过程是$(H,G.q)$过程.令

$$G_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(x,t), \quad (3)$$

于是分离性条件(D)变成

$$q_\lambda(x,A) = G_\lambda(x) q(x,A). \quad (4)$$

对于$(H,G.q)$过程向后方程变成

$$Z(x,A) = G_\lambda(x) \int_E q(x,dy) Z(y,A) + h_\lambda(x,A),$$
$$0 \leqslant \lambda + \infty, \quad x \in E, A \in \mathscr{E}. \quad (5)$$

定理 3.2(正则性准则)变成下列定理

定理 1 $(H,G.q)$过程 X 正则的充要条件是方程

$$\begin{cases} f(x) = G_\lambda(x) \int_E q(x,dy) f(y), \\ 0 \leqslant f \leqslant 1, f \in B_E, \end{cases} \quad x \in E, \lambda > 0 \quad (6)$$

只有零解.

(B) 广义 Doob 过程

若分离性条件(D)成立且

$$q(x,A) = q(A), x \in E, A \in \mathscr{E}, \quad (7)$$

则把过程 X 称为广义 Doob 过程.马尔可夫过程中的 Doob 过程(侯振挺、郭青峰[1])是广义 Doob 过程.

对于广义 Doob 过程向后方程变成

$$Z(x,A) = G_\lambda(x) \int_E q(dy) Z(y,A) + h_\lambda(x,A), \quad (8)$$

于是

$$\int_E q(\mathrm{d}y)Z(y,A) = \int_E G_\lambda(y)q(\mathrm{d}y)\cdot$$

$$\int_E q(\mathrm{d}y)Z(y,A) + \int_E h_\lambda(y,A)q(\mathrm{d}y), \tag{9}$$

故

$$\int_E q(\mathrm{d}y)Z(y,A) = \frac{\int_E h_\lambda(y,A)q(\mathrm{d}y)}{1-\int_E G_\lambda(y)q(\mathrm{d}y)}. \tag{10}$$

由(8)、(9)、(10)及定理 2.1 得

$$P_\lambda(x,A) = h_\lambda(x,A) + \frac{G_\lambda(x)\int_E h_\lambda(y,A)q(\mathrm{d}y)}{1-\int_E G_\lambda(y)q(\mathrm{d}y)}. \tag{11}$$

(C) 半马尔可夫过程

定义 2 设 $X=\{X(t),t<\tau\}$ 是马尔可夫骨架过程. $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ 是它的骨架时序列. 若 E 为可列集及

$$X(t) = X(\tau_n),\quad \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1},\quad n\geqslant 0, \tag{12}$$

则称 X 为半马尔可夫过程.

(D) 逐段决定的马尔可夫骨架过程

定义 3 设 $X=\{X(t,\omega),t<\tau\}$ 是(非齐次)马尔可夫骨架过程, 若存在定义在 $R_+\times E$ 上取值于 E 的关于 t 右连续的 $\mathscr{B}(R_+)\times\mathscr{E}$ 可测函数 $\varphi_n(x,t)$, 使得

$$X(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t-\tau_n,X(\tau_n))I_{\tau_n\leqslant t<\tau_{n+1}},\quad 0<t<\tau.$$

则称 X 为逐段决定的马尔骨架过程.

(E) 逐段决定的马尔可夫过程

定义 4 若一逐段决定的马尔可夫骨架过程是一个马尔可夫过程, 则称其为逐段决定的马尔可夫过程.

(F) Davis 意义下的逐段决定马尔可夫过程(PDMP)

由后面的例 11.5.3 就可知道, Davis[2,4] 定义的逐段决定马尔可夫过程(PDMP)是我们现在定义的逐段决定马尔可夫过程的

一个真子类.一个逐段决定马尔可夫过程成为Davis定义的马尔可夫过程必要条件是 $F(x,t)=P(\tau_1>t\mid X(0)=x)$ 绝对连续.初看起来,Davis引入的PDMP模型内涵不够丰富,限制在马尔可夫过程的框架之内.但在处理实际问题时,却表现出很大的广泛性和优越性,他往往通过引入补助变量的技巧把一个非马尔可夫过程($F(x,t)=P(\tau_1>t\mid X(0)=x)$ 绝对连续的逐段决定马尔可夫骨架过程)化为PDMP模型来处理.所以国际上公认Davis对马尔可夫过程的贡献是巨大的.

(G) 马尔可夫型骨架过程

若马尔可夫骨架过程又是一个马尔可夫过程,则称其为马尔可夫型骨架过程.

(H) 带跳的随机过程

由布朗运动、扩散过程同可列马尔可夫过程及生灭过程组合成的马尔可夫骨架过程和马尔可夫型骨架过程将名为扩散跳过程,马氏型扩散跳过程,布朗生灭过程等等,总称为带跳的随机过程.它为定量研究"量变和质变的交替出现贯穿于每个事物发展的全过程"这一普遍而基本的规律提供了合适的数学模型.因此它们的研究在理论和应用上都十分重要.

(I) 可列马尔可夫骨架过程

当 E 为可列集时,我们把马尔可夫骨架过程叫做可列马尔可夫骨架过程.如,半马尔可夫过程及M/G/1,GI/G/1等排队系统的队长 $L(t)$ 就是这类过程.

这类过程的向后方程变成

$$X_{ij}=\sum_{k\in E}q_{ik}(\lambda)X_{kj}+h_{ij}(\lambda)\quad(\lambda>0,i,j\in E).\tag{14}$$

向前方程变成

$$X_{ij}=\sum_{k\in E}X_{ik}\hat{q}_{kj}(\lambda)+h_{ij}(\lambda)\quad(\lambda>0,i,j\in E),\tag{15}$$

其中

$$h_{ij}(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}P(X(t)=j,\tau_1>t\mid X(0)=i)dt,\tag{16}$$

$$q_{ij}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} P(X(\tau_1) = j, \tau_1 \leqslant t \mid X(0) = i)\mathrm{d}t. \quad (17)$$

$\hat{Q} = (\hat{q}_{ij}(\lambda))$ 满足

$$\sum_{k \in E} h_{ik}(\lambda)\hat{q}_{kj}(\lambda) = \sum q_{ik}(\lambda) h_{kj}(\lambda), \quad (i,j \in E). \quad (18)$$

§5 补充与注记

马尔可夫骨架过程的概念(定义 1.1) 及其向后和向前方程于 1997 年由侯振挺、刘再明、邹捷中[2,3,5] 首次引入. 本章(也是全书) 的主要结果是决定马尔可夫骨架过程一维概率分布的定理 2.1 和定理 2.2(其有穷维分布在一维分布的基础上于第 3 章给出). 它们属于侯振挺、刘再明、邹捷中[2,3,5], 是马尔可夫骨架过程理论中的关键性定理. 因为我们研究任何一个随机过程首要问题是如何去决定它的分布, 特别是一维分布. 此前, 人们只建立了纯间断(或曰跳) 马尔可夫过程和分枝马尔可夫过程(见 Ikeda N, Nagasawa M and Watanabe S[1]) 的(柯氏) 向后方程和向前方程以及半马尔可夫过程的向后方程, 它们都是定理 2.1 中向后方程(2.3) 或向前方程(2.16) 的特例. 侯振挺、郭青峰[1] 中用于计算最小 Q 过程的转移概率的十分简单的公式(9.2.3) 和用于计算一阶 Q 过程的转移概率的相当复杂的公式(10.2.16) 现在被本章引入的向后方程(2.3) 统一起来. 后面逐一出现的, 如半马尔可夫过程的向前方程, 逐段决定马尔可夫骨架过程、GI/M/1 排队系统的队长 $L(t)$ 以及 GI/G/1 排队系统的等待时间 $W(t)$ 的向后方程, G/M/1 排队系统队长 $L(t)$ 的向前方程等等都是(2.3) 或(2.6) 的新特例. 所以说, 我们的向后和向前方程大大拓广了马尔可夫过程中的(柯氏) 向后和向前方程的应用范围.

马尔可夫骨架过程的向后方程的推导(确切说是定理 2.1 的

推导）与以前的柯氏向后方程的推导一样，都是用到一个停时（τ_1）的马氏性，简明扼要，而前人对纯间断马尔可夫过程的（柯氏）向前方程的推导较充分和较艰难地用了过程的马氏性．由于马尔可夫骨架过程的马氏性远比马尔可夫过程要少得多，所以我们放弃了概率方法，而改用算子理论中惯用的思路，得到过程的向前方程．

2 马尔可夫骨架过程的矩

§1 各阶矩

随机变量的矩是反映随机变量取值分布规律的重要数字特征.对矩的计算与研究是概率论的重要研究内容之一.本章讨论(H,Q)过程的矩的计算问题.给出了(H,Q)过程的矩函数是一线性积分方程的零初始迭代解.设$X=\{X_t,t<\tau\}$是(H,Q)过程,$\{\tau_n\}$为其一个骨架时序列.令$\mathscr{L}=\{V(x):E\to R;V$是$\mathscr{E}$可测的有界或非负函数$\}$,对任意给定的$V\in\mathscr{L}$,记

$$f_n(x,t)=E_xV(X_t)I_{[t<\tau_n]},$$

$$h_n(x,t,A)=P(X_t\in A,t<\tau_n\mid X_0=x).$$

$$x\in E,t\geqslant 0,A\in\mathscr{E};n=1,2,\cdots.$$

$$f(x,t)=E_xV(X_t)I_{[t<\tau]}.$$

注意X为(H,Q)过程有

$$h(x,t,A)=P(X_t\in A,t<\tau_1\mid X_0=x),$$

$$q(x,t,A)=P(X_{\tau_1}\in A,\tau_1\leqslant t\mid X_0=x),$$

$$x\in E,t\geqslant 0,A\in\varepsilon.$$

引理1 $\{h_n\}$满足下面递推公式

$$h_{n+1}(x,t,A)=$$

$$h_1(x,t,A)+\int_E\int_0^t h_n(y,t-s,A)q(x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)=$$

$$h_1(x,t,A) + q * h_n(x,t,A). \tag{1}$$

$n = 1,2,\cdots$,其中 $*$ 表示卷积运算.

证明　对 n 用归纳法.

$n = 1$ 时,

$$\begin{aligned} &h_{n+1}(x,t,A) = h_2(x,t,A) = \\ &P(X_t \in A, t < \tau_2 \mid X_0 = x) = \\ &P(X_t \in A, t < \tau_1 \mid X_0 = x) + \\ &P(X_t \in A, \tau_1 \leqslant t < \tau_2 \mid X_0 = x). \end{aligned} \tag{2}$$

由引理 1.2.1 得

$$\begin{aligned} &P(X_t \in A, \tau_1 \leqslant t < \tau_2 \mid X_0) = \\ &\mathbf{E}[P(X_t \in A, \tau_1 \leqslant t < \tau_2 \mid X_{\tau_1}, \tau_1, X_0) \mid X_0] = \\ &\mathbf{E}[h(X_{\tau_1}, t - \tau_1, A) I_{[\tau_1 \leqslant t]} \mid X_0] = \\ &\int_E \int_0^t h(y, t-s, A) q(X_0, \mathrm{d}s, \mathrm{d}y) = q * h(X_0, t, A). \end{aligned} \tag{3}$$

将(3)代入(2)并注意到 $h_1 = h$,得:

$$\begin{aligned} &h_2(x,t,A) = \\ &h_1(x,t,A) + \int_E \int_0^t h_1(y, t-s, A) q(x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}s) = \\ &h_1(x,t,A) + q * h_1(x,t,A). \end{aligned}$$

故(1)对 $n = 1$ 成立.

设(1)对 $n = k$ 时成立.当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} &h_{k+1+1}(x,t,A) = P(X_t \in A, t < \tau_{k+2} \mid X_0 = x) = \\ &P(X_t \in A, t < \tau_{k+1} \mid X_0 = x) + \\ &P(X_t \in A, \tau_{k+1} \leqslant t < \tau_{k+2} \mid X_0 = x). \end{aligned} \tag{4}$$

由引理 1.2.1 得:

$$\begin{aligned} &P(X_t \in A, \tau_{k+1} \leqslant t < \tau_{k+2} \mid X_0) = \\ &\mathbf{E}[P(X_t \in A, \tau_{k+1} \leqslant t < \tau_{k+2} \mid x_{\tau_{k+1}}, \tau_{k+1}, X_0) \mid X_0] = \\ &\mathbf{E}[h(X_{\tau_{k+1}}, t - \tau_{k+1}, A) I_{[\tau_{k+1} \leqslant t]} \mid X_0] = \end{aligned}$$

$$\int_E\int_0^t h(y,t-s,A)q^{*(k+1)}(X_0,\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)=$$

$$q^{*(k+1)}*h(X_0,t,A)\quad(q^{*(n)}\text{ 是 } q \text{ 的 } n \text{ 重卷积}).\qquad(5)$$

由卷积满足结合律得:

$$q^{*(k+1)}*h(X_0,t,A)=q*q^{*(k)}*h(X_0,t,A)=$$

$$\int_E\int_0^t q^{*(k)}*h(y,t-s,A)q(X_0,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)=$$

$$\int_E\int_0^t P(X_{t-s}\in A,\tau_k\leqslant t-s<\tau_{k+1}\mid X_0=y)\cdot$$

$$q(X_0,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\qquad(6)$$

将(6)代入(4)并用归纳法证得:

$$h_{k+2}(x,t,A)=h_{k+1}(x,t,A)+$$

$$\int_E\int_0^t P(X_{t-s}\in A,\tau_k\leqslant t-s<\tau_{k+1}\mid X_0=y)q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)=$$

$$h_1(x,t,A)+\int_E\int_0^t h_k(y,t-s,A)q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)+$$

$$\int_E\int_0^t P(X_{t-s}\in A,\tau_k\leqslant t-s<\tau_{k+1}\mid X_0=y)q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)=$$

$$h_1(x,t,A)+\int_E\int_0^t[P(X_{t-s}\in A,t-s<\tau_k\mid X_0=y)+$$

$$P(X_{t-s}\in A,\tau_k\leqslant t-s<\tau_{k+1}\mid X_0=y)]\cdot q(x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)=$$

$$h_1(x,t,A)+\int_E\int_0^t h_{k+1}(y,t-s,A)q(x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)=$$

$$h_1(x,t,A)+q*h_{k+1}(x,t,A),$$

故(1)对 $n=k+1$ 也成立,从而对任意自然数 n 成立.

定理 1 $\{f_n\}$ 满足下面递推公式:

$$f_{n+1}(x,t)=f_1(x,t)+\int_E\int_0^t f_n(y,t-s)q(x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}s).\qquad(7)$$

$n=1,2,\cdots,$

证明 令 $L=\{V\in\mathscr{L}$:由 V 确定的$\{f_n\}$满足(7)$\}$.
则 L 是一个 $\mathscr{L}$ 系.事实上,若 $V\equiv 1$,则

$$f_n(x,t) = h_n(x,t,E), \quad n = 1,2,\cdots$$

由引理1即知 $1 \in L$.

显然 L 对于有限线性组合运算是封闭的.

若 $V = V_n \in L, n = 1,2,\cdots$,且 $V_n \uparrow V, V \in \mathscr{L}$,则由单调收敛定理即知 $V \in L$.

由函数形式的单调定理即知 $\mathscr{L} \subset L$.

定理 2 $f(x,t)$ 是下面积分方程的零初值迭代解.

$$\varphi(x,t) = f_1(x,t) + \int_E \int_0^t \varphi(y,t-s) q(x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \quad (8)$$

进一步,若 V 是非负的,则 f 是(8)的最小非负解.

证明 若 V 是有界可测的,则由控制收敛定理立得 $f(x,t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,t)$. 在定理1给出的 f_n 的递推式中,用控制收敛定理即得 f 满足方程(8)且为其零初值迭代解.

若 V 是非负可测的,则 $f_n \uparrow f$,在定理1给出的递推式中用单调收敛定理即知 f 是(8)的零行值迭代解. 显然 f 是(8)的最小非负解.

定理 3 若 X 的状态空间 $E = R$,且对固定的 $p \in [0,\infty)$, $\mathbf{E}_x X_t^p I_{[t<\tau]}$ 存在,记

$$V(x,t,p) = \mathbf{E}_x X_t^p I_{[t<\tau]},$$
$$\tilde{V}(x,t,p) = \mathbf{E}_x |X_t|^p I_{[t<\tau]}, x \in E, t \geq 0,$$

则 $V(x,t,p)$ 是方程组

$$\varphi(x,t,p) = \varphi_1(x,t,p) + \int_E \int_0^t \varphi(y,t-s,p) q(x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \quad (9)$$

的零初值迭代解, $\varphi_1(x,t,p) = E_x X_t^p I_{[t<\tau_1]}$. 而 $\tilde{V}(x,t,p)$ 是方程组

$$\tilde{V}(x,t,p) = \tilde{\varphi}_1(x,t,p) + \int_E \int_0^t \varphi(y,t-s,p) q(x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \quad (10)$$

的最小非负解，其中 $\varphi_1(x,t,p) = E_x|X_t^p|I_{[t<\tau_1]}$.

证明 取 $V_m(x):E\rightarrow R$ 有界连续函数，$V_m(X_t)\xrightarrow{a.e.}X_t^p$，则由定理 2 及控制收敛定理即得 V 是(9)的零初值迭代解.

用类似的方法可以证明 $\tilde{V}$ 是(10)的最小非负解.

§2 补充与注记

本章结果属于刘万荣、刘再明和侯振挺.

3 马尔可夫骨架过程的有穷维分布

§1 严马尔可夫骨架过程的定义

设(Ω,F,P)是一完备概率空间,$(E,\mathscr{E})$是 Polish 空间.

定义1 称马氏骨架过程 $X=\{X(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega)\}$ 为严马氏骨架过程,如果对于骨架时序列$\{\tau_n\}_{n\geqslant 0}$,存在 $S=\{S(t_1,t_2,\cdots,t_k;x;A_1,\cdots,A_k),S_\infty(t_1,t_2,\cdots,t_k;x;A_1,\cdots,A_k)\mid 0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k;x\in E;A_i\in\mathscr{E},i=1,\cdots,k;k=1,2,\cdots\}$,满足

(i)

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[X(\tau_{n+1})\in A_1,\tau_{n+1}-\tau_n\leqslant t_1\mid X(\tau_n)]=\\&S(t_1;X(\tau_n);A_1)\quad\forall n\geqslant 0,t_1\geqslant 0,A_1\in\mathscr{E}.\end{aligned}\tag{1}$$

(ii)

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[X(\tau_n+t_1)\in A_1,\cdots,X(\tau_n+t_{k-1})\in A_{k-1};\\&X(\tau_{n+1})\in A_k;t_{k-1}<\tau_{n+1}-\tau_n\leqslant t_k\mid X(\tau_n)]=\\&S(t_1,\cdots,t_k;X(\tau_n);A_1,\cdots,A_k),\\&\forall n\geqslant 0,k\geqslant 2;0\leqslant t_1<\cdots<t_k;\\&\qquad A_i\in\mathscr{E},i=1,\cdots,k.\end{aligned}\tag{2}$$

(iii)

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}[X(\tau_n+t_1)\in A_1,\cdots,\\&X(\tau_n+t_k)\in A_k,\tau_{n+1}-\tau_n=\infty.\\&\mid\mathscr{F}_{\tau_n}]=\mathbf{E}[X(\tau_n+t_1)\in A_1,\cdots,\end{aligned}$$

$$X(\tau_n + t_k) \in A_k, \tau_{n+1} - \tau_n = \infty \mid X(\tau_n)] =$$
$$S_\infty(t_1, \cdots, t_k; X(\tau_n); A_1, \cdots, A_k)$$
$$\forall n \geqslant 0, k \geqslant 1; 0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k;$$
$$A_i \in \mathscr{E}, i = 1, \cdots k. \qquad (3)$$

其中，$S(t_1, \cdots, t_k; x; A_1, \cdots, A_k)$ 和 $S_\infty(t_1, \cdots, t_k; x; A_1, \cdots, A_k)$ 当 $A_1, \cdots, A_k \in \mathscr{E}$ 固定时，关于 $t_1, \cdots, t_k, x$ 是 $D^{(k)} \times E$ 上的可测函数，$D^{(k)} = \{(t_1, \cdots, t_k) \mid 0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k\}$ 是 $[0, \infty)^k$ 的 Borel 可测集；当 $t_1, \cdots, t_k, x$ 固定时，关于 $A_1, \cdots, A_k$ 是 $\mathscr{E}^k$ 上的准分布.

直观上，我们用一列递增的马氏时刻 $\{\tau_n\}$ 把过程 X 分成可列段 $\{X(t, \omega), \tau_n \leqslant t \leqslant \tau_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$，而每一段过程 $\{X(\tau_n + t, \omega), 0 \leqslant t \leqslant \tau_{n+1} - \tau_n\}$ 在条件概率 $P(\cdot \mid X(\tau_n) = x)$ 之下的有穷维分布相同，由 S 按(1) ~ (3) 给出.

注记：若 τ_1 几乎处处有限(从而，$\forall\ n \geqslant 0, \tau_{n+1} - \tau_n$ 几乎处处有限)，则 $\forall k \geqslant 1$
$$S_\infty(t_1, \cdots, t_k; x; A_1, \cdots, A_k) \equiv 0.$$

$\forall k \geqslant 1$，令
$$S(t_1, \cdots, t_{k-1}, \infty; x; A_1, \cdots, A_k) =$$
$$\lim_{t_k \uparrow \infty} S(t_1, \cdots, t_{k-1}, t_k; x; A_1, \cdots, A_k) =$$
$$\mathbf{E}[X(t_1) \in A_1, \cdots, X(t_{k-1}) \in A_{k-1};$$
$$X(\tau_1) \in A_k; t_{k-1} < \tau_{n+1} - \tau_n < \infty \mid X(0) = x]. \qquad (4)$$

命题 1 设 $X = \{X(t, \omega), 0 \leqslant t < \tau(\omega)\}$ 为严马氏骨架过程，则

(i) X 必为 (H, Q) - 过程，且
$$q(t, x, A) = S(t; x; A), \qquad (5)$$
$$h(t, x, A) = S(t, \infty; x; A, E) + S_\infty(t; x; A). \qquad (6)$$

(对于 $P(X(t) \in A, \tau_1 > t, \mid X(0) = x)$ 这个量在有些章中用 $h(x, t, A)$ 表示(如在第 1, 第 2 章中)，为了方便，而在另一些章中用 $h(t, x, A)$ 表示(如在第 3 章)，对于 $P(X(\tau_1) \in A, \tau_1 \leqslant t \mid$

$X(0)=x$）也有两个记号 $q(x,t,A)$ 和 $q(t,x,A)$）.特别,当 τ_1 几乎处处有限时,

$$h(t,x,A)=S(t,\infty;x;A,E). \tag{6$'$}$$

(ii) $\forall 0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k<\infty;x\in E;A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{E}$;则

$$S'(t_1,\cdots,t_k;x;A_1,\cdots,A_k)\triangleq P(X(\tau_n+t_1)\in A_1,\cdots,$$
$$X(\tau_n+t_k)\in A_k,t_k<\tau_{n+1}-\tau_n\mid X(\tau_n)=x) \tag{7}$$

与 n 无关,且有

$$S'(t_1,\cdots,t_k;x;A_1,\cdots,A_k)=$$
$$S(t_1,\cdots,t_k,\infty;x;A_1,\cdots,A_k,E)+S_\infty(t_1,\cdots,t_k;x;A_1,\cdots,A_k). \tag{8}$$

特别,当 τ_1 几乎处处有限时,

$$S'(t_1,\cdots,t_k;x;A_1,\cdots,A_k)=$$
$$S(t_1,\cdots,t_k,\infty;x;A_1,\cdots,A_k,E). \tag{8$'$}$$

证明 由定义1及定义1.1.1和定义1.3.1可直接得出以上结论.

命题2 设 $X=\{X(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega)\}$ 为严马氏骨架过程,则

(i)

$$P(X(\tau_n+t)\in A\mid X(\tau_n)=x)=$$
$$P(X(t)\in A\mid X(0)=x)=$$
$$P(t,x,A)\quad\forall n\geqslant 0,t\geqslant 0,x\in E,A\in\mathscr{E}. \tag{9}$$

(ii)

$$P(X(t)\in A,\tau_n\leqslant t\mid\mathscr{F}_{\tau_n})=$$
$$P(X(t)\in A,\tau_n\leqslant t\mid X(\tau_n),\tau_n,$$
$$X(\tau_{n-1}),\tau_{n-1},\cdots,X(0))=$$
$$P(X(t)\in A,\tau_n\leqslant t\mid X(\tau_n),\tau_n)=$$
$$P(t-\tau_n,X(\tau_n),A)1_{\{\tau_n\leqslant t\}}\quad\forall n\geqslant 0,t\geqslant 0,A\in\mathscr{E}. \tag{10}$$

证明 (i) 由定义 1.1.1 和定义 1.3.1 类似于(1.3.13) 的证明,可得

$$P(X(\tau_n + t) \in A \mid X(\tau_n) = x) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t\int_E h(t-s,y,A)q^{*k}(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y) =$$

$$P(X(t) \in A \mid X(0) = x) = P(t,x,A).$$

(ii) 注意$\{X(t),\tau_n \leqslant t\}$ 属于 τ_n 后σ一域,由定义 1.2.1 知(10) 中前两个等号成立.使用(i) 的结果,类似于引理 1.3.3 的证明方法,可证(10) 中第三个等号成立.

§2 严马尔可夫骨架过程的有穷维分布

本节我们来给出严马氏骨架过程有穷维分布的递推计算公式.

设 $X = \{X(t,\omega);0 \leqslant t < \tau(\omega)\}$ 为严马氏骨架过程.$\forall 0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n < \infty; x \in E; A_1,\cdots A_m \in \mathscr{E}$;令

$$P(t_1,\cdots,t_m,x,A_1,\cdots,A_m) \triangleq$$

$$P(X(t_1) \in A_1,\cdots,X(t_m) \in A_m \mid X(0) = x) \quad n \geqslant 1, m \geqslant 1. \tag{1}$$

下述定理是本文的主要结果.

定理 1 若 X 为严马氏骨架过程,则

$$P(t_1,x,A_1) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{t_1}\int_E q^{*n}(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y)S^{\cdot}(t_1-s,y,A_1),$$

$$\forall 0 \leqslant t_1, x \in E, A_1 \in \mathscr{E}. \tag{2}$$

$$P(t_1,t_2,x,A_1,A_2) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{t_1}\int_E q^{*n}(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y)[S^{\cdot}(t_1-s,t_2-s;y,A_1,A_2) +$$

$$\int_{t_1-s}^{t_2-s}\int_E S(t_1-s,\mathrm{d}u;y;A_1,\mathrm{d}z)P(t_2-s-u,z,A_2)],$$

$$\forall 0 \leqslant t_1 < t_2; x \in E, A_1, A_2 \in \mathscr{E}. \tag{3}$$

……

$$P(t_1,\cdots,t_m,x,A_1,\cdots,A_m) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{t_1}\int_E q^{*n}(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y)[S^{\cdot}(t_1-s,\cdots,t_m-s;y;A_1,\cdots,A_m) +$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}\int_{t_k-s}^{t_{k+1}-s}\int_E S(t_1-s,\cdots,t_k-s,\mathrm{d}u;y;A_1,\cdots,A_k,\mathrm{d}z)\cdot$$

$$P(t_{k+1}-s-u,\cdots,t_m-s-u,z,A_{k+1},\cdots,A_m)].$$

$$\forall m \geqslant 2, 0 \leqslant t_1 < \cdots < t_m; x \in E; A_1,\cdots,A_m \in \mathscr{E}. \tag{4}$$

其中,$q(t,x,A)$、$S^{\cdot}(t_1,\cdots,t_k;x;A_1,\cdots,A_k)$由(5)～(8)给出(由$S$唯一决定);而$q^{*n}(t,x,A)$表示$q$自身的$n$重卷积,即

$$\begin{cases} q^{*0}(t,x,A) = \delta_A(x)\delta_{\{0\}}(t); \\ q^{*1}(t,x,A) = q(t,x,A); \\ q^{*n}(t,x,A) = \int_0^t q(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y)q^{*n-1}(t-s,y,A), \quad n \geqslant 2. \end{cases} \tag{5}$$

为证明上述定理,先给出以下引理.

引理1 若X为严马氏骨架过程,则$\forall n \geqslant 0, k \geqslant 1, 0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k; t > t_k - t_1; A_1,\cdots,A_k,A_{k+1} \in \mathscr{E}$有

$$\begin{aligned} &P(X(t_1) \in A_1,\cdots,X(t_k) \in A_k, \\ &X(\tau_{n+1}) \in A_{k+1}, \tau_n \leqslant t_1, t_k < \tau_{n+1}, \tau_{n+1}-\tau_n \leqslant t \mid \\ &X(\tau_n),\tau_n,X(\tau_{n-1}),\tau_{n-1},\cdots,X(0)) = \\ &P(X(t_1) \in A_1,\cdots,X(t_k) \in A_k, \\ &X(\tau_{n+1}) \in A_{k+1}, \tau_n \leqslant t_1, t_k < \tau_{n+1}, \tau_{n+1}-\tau_n \leqslant t \mid \\ &X(\tau_n),\tau_n) = S(t_1-\tau_n,\cdots,t_k-\tau_n,t;X(\tau_n);A_1,\cdots, \\ &A_k,A_{k+1})1_{\{\tau_n \leqslant t_1\}}\cdot 1_{\{t_k-\tau_n<t\}}. \end{aligned} \tag{6}$$

特别,当$K=1$时有

$$P(X(t_1)\in A_1, X(\tau_{n+1})\in A_2,$$
$$\tau_n\leqslant t_1<\tau_{n+1}, \tau_{n+1}-\tau_n\leqslant t\mid X(\tau_n),$$
$$\tau_n, X(\tau_{n-1}), \tau_{n-1}, \cdots, X(0))=$$
$$P(X(t_1)\in A_1, X(\tau_{n+1})\in A_2, \tau_n\leqslant$$
$$t_1<\tau_{n+1}, \tau_{n+1}-\tau_n\leqslant t\mid X(\tau_n), \tau_n)=$$
$$S(t_1-\tau_n, t; X(\tau_n); A_1, A_2)1_{\{\tau_n\leqslant t_1\}}\cdot 1_{\{t_1-\tau_n<t\}}. \tag{7}$$

证明 由定义 1.1 中(1.2)式,类似于引理 1.3.3 的证明方法,可以证明,对于任意闭集 $A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{E}$,(6)式成立.注意 S 关于 $A_1,\cdots,A_k$ 为准分布及条件期望的性质,使用 $\lambda-\Pi$ 系方法可证明,对于任意 $A_1,\cdots,A_k\in\mathscr{E}$,(6)成立.

以下证明定理 1,我们先证明(2)、(3)两式,然后证明(4).

从命题 1.1 的(1.6)和(1.8)知 $h(t,x,A)=S'(t,x,A)$ 由定理 1.3.2 证明中的(1.3.13)得

$$P(t_1,x,A_1)=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{t_1}\int_E q^{*n}(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y)h(t_1-s,y,A_1)=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{t_1}\int_E q^{*n}(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y)S'(t-s,x,A_1).$$

即(2)成立.

$\forall 0\leqslant t_1<t_2; x\in E, A_1, A_2\in\mathscr{E}$ 显然有

$$P(t_1,t_2;x;A_1,A_2)=$$
$$P(X(t_1)\in A_1, X(t_2)\in A_2\mid X(0)=x)=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}[P(X(t_1)\in A_1, X(t_2)\in A_2,$$
$$\tau_n\leqslant t_1<\tau_{n+1}\mid X(0)=x)=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}[P(X(t_1)\in A_1, X(t_2)\in A_2,$$
$$\tau_n\leqslant t_1<t_2<\tau_{n+1}\mid X(0)=x)+$$
$$P(X(t_1)\in A_1, X(t_2)\in A_2, \tau_n\leqslant$$

$$t_1 < \tau_{n+1} \leqslant t_2 \mid X(0) = x)] =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [I_1(n) + I_2(n)], \tag{8}$$

而

$$I_1(n) = P(X(t_1) \in A_1, X(t_2) \in$$
$$A_2, \tau_n \leqslant t_1 < t_2 < \tau_{n+1} \mid X(0) = x) =$$
$$\int_\Omega \mathbf{E}[X(\tau_n + t_1 - \tau_n) \in A_1, X(\tau_n + t_2 - \tau_n) \in$$
$$A_2, 0 \leqslant t_1 - \tau_n < t_2 - \tau_n < \tau_{n+1} -$$
$$\tau_n \mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)] P(d\omega \mid X(0) = x) =$$
$$\int_\Omega S'(t_1 - \tau_n, t_2 - \tau_n); A_1, A_2) 1_{\{\tau_n \leqslant t_1\}} P(d\omega \mid X(0) = x) =$$
$$\int_0^{t_1} \int_E S'(t_1 - s, t_2 - s; y; A_1, A_2) P(X(\tau_n) \in$$
$$0(y, dy), \tau_n \in 0(s, ds) \mid X(0) = x) =$$
$$\int_0^{t_1} \int_E q^{*n}(ds, x, dy) S'(t_1 - s, t_2 - s; y; A_1, A_2) \tag{9}.$$

其中,上面第三个等号的证明类似于引理1.3.3的证明;第四个等号中作了积分变换 $T: \Omega \to [0, \infty) \times E, T(\omega) = (\tau_n, X(\tau_n)) = (s, y)$ 并使用了正则条件概率的存在性;最后一个等号由引理1.3.4得到.

$$I_2(n) = P(X(t_1) \in A_1, X(t_2) \in A_2, \tau_n \leqslant$$
$$t_1 < \tau_{n+1} \leqslant t_2 \mid X(0) = x) =$$
$$\int_\Omega \mathbf{E}[X(t_1) \in A_1, X(t_2) \in A_2, \tau_n \leqslant$$
$$t_1 < \tau_{n+1} \leqslant t_2 \mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)] \cdot$$
$$P(d\omega \mid X(0) = x) = \int_\Omega \mathbf{E}\{\mathbf{E}[X(t_1) \in A_1, X(t_2) \in$$
$$A_2, \tau_n \leqslant t_1 < \tau_{n+1} \leqslant t_2 \mid \mathscr{F}_{\tau_{n+1}}]$$
$$\mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)\} \cdot P(d\omega \mid X(0) = x) =$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}\{\mathbf{E}[X(t_2) \in A_2, \tau_{n+1} \leqslant t_2 \mid \mathscr{F}_{\tau_{n+1}}] \cdot$$

$$\mathbf{1}_{\{X(t_1) \in A_1\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n \leqslant t_1 < \tau_{n+1}\}}$$

$$\mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)\} \cdot P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = x) =$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}\{P(t_2 - \tau_{n+1}, X(\tau_{n+1}), A_2) \cdot$$

$$\mathbf{1}_{\{\tau_{n+1} \leqslant t_2\}} \cdot \mathbf{1}_{\{X(t_1) \in A_1\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n \leqslant t_1 < \tau_{n+1}\}}$$

$$\mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)\} \cdot P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = x) =$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}\{P(t_2 - \tau_n - (\tau_{n+1} - \tau_n), X(\tau_{n+1}), A_2) \cdot$$

$$\mathbf{1}_{\{X(t_1) \in A_1\}} \cdot \mathbf{1}_{\{t_1 - \tau_n < \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t_2 - \tau_n\}} \cdot$$

$$\mathbf{1}_{\{\tau_n \leqslant t_1\}} \mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)] \cdot P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = x) =$$

$$\int_{\Omega} P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = x)[\int_0^{\infty} \int_E \int_E P(t_2 - \tau_n - u, z, A_2) \mathbf{1}_{\{y \in A_1\}} \cdot$$

$$\mathbf{1}_{\{t_1 - \tau_n < u \leqslant t_2 - \tau_n\}} \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n \leqslant t_1\}} \cdot$$

$$P(\tau_{n+1} - \tau_n \in 0(u, \mathrm{d}u), X(t_1) \in 0(y, \mathrm{d}y)$$

$$X(\tau_{n+1}) \in 0(z, \mathrm{d}z) \mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)) =$$

$$\int_{\Omega} P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = x) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n \leqslant t_1\}} \cdot$$

$$[\int_{t_1 - \tau_n}^{t_2 - \tau_n} \int_E P(t_2 - \tau_n - u, z, A_2) \cdot$$

$$P(\tau_{n+1} - \tau_n \in 0(u, \mathrm{d}u), X(t_1) \in$$

$$A_1, X(\tau_{n+1}) \in 0(z, \mathrm{d}z), \tau_n \leqslant t_1 < \tau_{n+1}$$

$$\mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)] =$$

$$\int_{\Omega} P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = x) \cdot \mathbf{1}_{\{\tau_n \leqslant t_1\}} \cdot$$

$$[\int_{t_1 - \tau_n}^{t_2 - \tau_n} \int_E S(t_1 - \tau_n, \mathrm{d}u; X(\tau_n); A_1, \mathrm{d}z) \cdot$$

$$P(t_2 - \tau_n - u, z, A_2)] =$$

$\int_0^{t_1}\int_E[\int_{t_1-s}^{t_2-s}\int_E S(t_1-s,\mathrm{d}u;y;A_1,\mathrm{d}z)P(t_2-s-u,z,A_2)]\cdot$

$P(\tau_n\in 0(s,\mathrm{d}s),X(\tau_n)\in 0(y,\mathrm{d}y)\mid X(0)=x)=$

$\int_0^{t_1}\int_E q^{*n}(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y)\int_{t_1-s}^{t_2-s}\int_E\cdot$

$$S(t_1-s,\mathrm{d}u;y;A_1,\mathrm{d}z)P(t_2-s-u,z,A_2)]. \tag{10}$$

其中，上面第四个等号使用了 $1_{\{X(t_1)\in A_1\}}\cdot 1_{\{\tau_n\leqslant t_1<\tau_{n+1}\}}$ 关于 $\mathscr{F}_{\tau_{n+1}}$ 可测；第五个等号由命题 1.2(ii) 得到；第七个等号利用了正则条件概率 $P(\cdot\mid X(\tau_n),\tau_n,X(0))$ 的存在性及积分变换 $T:\Omega\to[0,\infty)\times E\times E,T(\omega)\stackrel{\wedge}{=}(\tau_{n+1}-\tau_n,X(t_1),X(\tau_{n+1}))=(u,y,z)$；第九个等号由引理 1 得到；第十个等号中作了积分变换 $T':\Omega\to[0,\infty)\times E,T'(\omega)\stackrel{\wedge}{=}(\tau_n,X(\tau_n))=(s,y)$；最后一个等号由引理 1.3.4 得到.

结合(8)、(9) 和(10) 知(3) 成立.

以下证明(4).当 $m=2$ 时,(4) 变成(3),设 $m>2$.

$P(t_1,t_2,\cdots,t_m,x,A_1,A_2,\cdots,A_m)=$

$P(X(t_1)\in A_1,X(t_2)\in A_2,\cdots,$

$X(t_m)\in A_m\mid X(0)=x)=$

$\sum_{n=0}^{\infty}[P(X(t_1)\in A_1,X(t_2)\in A_2,\cdots,$

$X(t_m)\in A_m,\tau_n\leqslant t_1<\tau_{n+1}\mid X(0)=x)=$

$\sum_{n=0}^{\infty}[P(X(t_1)\in A_1,X(t_2)\in A_2,\cdots,$

$X(t_m)\in A_m,\tau_n\leqslant t_1<t_2<t_m<\tau_{n+1}\mid X(0)=x)+$

$\sum_{k=1}^{m-1}[P(X(t_1)\in A_1,X(t_2)\in A_2,\cdots,$

$X(t_m)\in A_m,\tau_n\leqslant t_1<\cdots t_k<\tau_{n+1}\leqslant t_{k+1}\mid X(0)=x)]=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[q_1(n)+\sum_{k=1}^{m-1}[q_2(n,k)]. \tag{11}$$

类似于(3)的证明中 $I_1(n)$ 的计算,有

$$q_1(n) = P(X(t_1)\in A_1, X(t_2)\in A_2,\cdots,$$
$$X(t_m)\in A_m, \tau_n \leqslant t_1 < \cdots < t_m < \tau_{n+1} \mid X(0)=x) =$$
$$\int_0^{t_1}\int_E q^{*n}(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y)S'(t_1-s,t_2-s,\cdots,$$
$$t_m-s;y;A_1,A_2,\cdots,A_m). \tag{12}$$

类似于(3)的证明中 $I_2(n)$ 的计算,有

$$q_2(n,k) = P(X(t_1)\in A_1, X(t_2)\in A_2,\cdots,$$
$$X(t_m)\in A_m, \tau_n \leqslant t_1 < \cdots < t_k < \tau_{n+1} \leqslant$$
$$t_{k+1} \mid X(0)=x) =$$
$$\int_\Omega \mathbf{E}[X(t_1)\in A_1, X(t_2)\in A_2,\cdots,$$
$$X(t_m)\in A_m, \tau_n \leqslant t_1 < \cdots < t_k < \tau_{n+1} \leqslant$$
$$t_{k+1} \mid X(\tau_n),\tau_n,X(0)]\cdot P(\mathrm{d}\omega \mid X(0)=x) =$$
$$\int_\Omega \mathbf{E}\{\mathbf{E}[X(t_1)\in A_1, X(t_2)\in A_2,\cdots,$$
$$X(t_m)\in A_m, \tau_n \leqslant t_1 < \cdots < t_k < \tau_{n+1} \leqslant$$
$$t_{k+1} \mid \mathscr{F}_{\tau_{n+1}}] \mid X(\tau_n),\tau_n,X(0)\}P(\mathrm{d}\omega \mid X(0)=x) =$$
$$\int_\Omega \mathbf{E}\{\mathbf{E}[X(t_{k+1})\in A_{k+1},\cdots,$$
$$X(t_m)\in A_m, \tau_{n+1}\leqslant t_{k+1} \mid \mathscr{F}_{\tau_{n+1}}]\cdot 1_{\{X(t_1)\in A_1,\cdots,X(t_k)\in A_k\}}\cdot$$
$$1_{\{\tau_n\leqslant t_1<\cdots<t_k<\tau_{n+1}\}} \mid X(\tau_n),\tau_n,X(0)\}\cdot$$
$$P(\mathrm{d}\omega \mid X(0)=x) = \int_\Omega \mathbf{E}\{P(t_{k+1}-\tau_{n+1},\cdots,$$
$$t_m-\tau_{n+1},X(\tau_{n+1}),A_{k+1}\cdots,A_m)\cdot$$
$$1_{\{X(t_1)\in A_1,\cdots,X(t_k)\in A_k\}}\cdot 1_{\{\tau_n\leqslant t_1\}}\cdot$$
$$1_{\{t_k-\tau_n\leqslant t_{k+1}-\tau_n\}} \mid X(\tau_n),\tau_n,X(0)\}\cdot$$

$$P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = x) = \int_\Omega P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = x) \cdot 1_{\{\tau_n \leqslant t_1\}} \cdot$$

$$[\int_{t_k-\tau_n}^{t_{k+1}-\tau_n} \int_E P(t_{k+1} - \tau_n - u, \cdots,$$

$$t_m - \tau_n - u, z, A_{k+1}, \cdots, A_m) \cdot P(\tau_{n+1} -$$

$$\tau_n \in 0(u, \mathrm{d}u), X(t_1) \in A_1, \cdots, X(t_k) \in A_k, X(\tau_{n+1}) \in$$

$$0(z, \mathrm{d}z), \tau_n \leqslant t_1, t_k < \tau_{n+1} \mid X(\tau_n), \tau_n, X(0)] =$$

$$\int_\Omega P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = x)[1_{\{\tau_n \leqslant t_1\}} \cdot$$

$$\int_{t_k-\tau_n}^{t_{k+1}-\tau_n} \int_E P(t_{k+1} - \tau_n - u, \cdots,$$

$$t_m - \tau_n - u, z, A_{k+1}, \cdots, A_m) S(t_1 - \tau_n, \cdots,$$

$$t_k - \tau_n, \mathrm{d}u; X(\tau_n); A_1, \cdots, A_k, \mathrm{d}z)] =$$

$$\int_0^{t_1} \int_E P(\tau_n \in 0(s, \mathrm{d}s), X(\tau_n) \in$$

$$0(y, \mathrm{d}y) \mid X(0) = x)[\int_{t_k-s}^{t_{k+1}-s} \int_E s(t_1 - s, \cdots,$$

$$t_k - s, \mathrm{d}u; y; A_1, \cdots, A_k, \mathrm{d}z) \cdot$$

$$P(t_{k+1} - s - u, \cdots, t_m - s - u, z, A_{k+1}, \cdots, A_m)] =$$

$$\int_0^{t_1} \int_E q^{*n}(\mathrm{d}s, x, \mathrm{d}y)[\int_{t_k-s}^{t_{k+1}-s} \int_E S(t_1 - s, \cdots,$$

$$t_k - s, \mathrm{d}u; y; A_1, \cdots, A_k, \mathrm{d}z) \cdot P(t_{k+1} - s - u, \cdots,$$

$$t_m - s - u, z, A_{k+1}, \cdots, A_m). \tag{13}$$

结合(11)、(12)和(13)知(4)成立.

定理 1 证毕.

§3 补充与注记

本章结果属于侯振挺、刘再明和邹捷中[4].

4 马尔可夫骨架过程的构造

§1 引言

设 E 为 Polish 空间,$(W,\mathscr{B})$ 是可测空间,给定其上一概率测度族$\{P_x;x\in E\}$,$\mu(w,\mathrm{d}y)$ 为$(W,\mathscr{B})\times(E,\mathscr{B}(E))$上的随机核,令 $\Omega=W\times E,\mathscr{F}=\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}(E),\tilde{\Omega}=\prod_{j=1}^{\infty}\Omega_j(\Omega_j=\Omega,j=1,2,\cdots)$,并赋乘积 Borel 域 $\bigotimes_{j=1}^{\infty}\mathscr{F}_j(\mathscr{F}_j=\mathscr{F},j=1,2,\cdots)$.进而,我们定义$(E,\mathscr{B}(E))\times(\Omega,\mathscr{F})$上的随机核 $\pi(x,\mathrm{d}\omega)$ 如下:

$$\pi(x,A)=\iint_A P_x(\mathrm{d}w)\mu(w,\mathrm{d}y),A\in\mathscr{F},\tag{1}$$

其中 $\omega=(w,y)$,下面的定理是 Ionescu – Tulcea定理的直接推论.

定理 1 存在$(\tilde{\Omega},\bigotimes_{j=1}^{\infty}\mathscr{F}_j)$上唯一的概率测度族$\{\tilde{P}_x;x\in E\}$,使得对任何$(\prod_{j=1}^{n}\Omega_j,\bigotimes_{j=1}^{n}\mathscr{F}_j)(n=1,2,\cdots)$上的可测函数 $F(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$,有

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[F(\omega_1,\cdots,\omega_n)]=$$

$$\int_{\Omega\times\cdots\times\Omega}\cdots\int\pi(x,\mathrm{d}\omega_1)\pi(x,\mathrm{d}\omega_2)\cdots\pi(x_{n-1},\mathrm{d}\omega_n)F(\omega_1,\cdots,\omega_n),\tag{2}$$

其中 $\omega_j=(w_j,x_j)$.

§2 过程的构造

以下我们假定 $X=(X_t,(w))$ 为定义在 $(W,\mathscr{B})$ 上取值于 E 的右连续随机过程. $\{\mathscr{B}_t;t\geqslant 0\}$ 为其自然 σ - 域流, $\{P_x;x\in E\}$ 为 $(W,\mathscr{B})$ 上的概率测度族. 为以下叙述方便起见, 我们记为 $X=\{W,\mathscr{B}_t,P_x,x\in E,X_t(w)\}$(与通常不同, 这里 X 未必是马尔可夫过程). 另外我们还假定 $\mathscr{B}_t=\overline{\mathscr{B}}_{t+0}$($\overline{\mathscr{B}}_t$ 为 $\mathscr{B}_t$ 的完全化). 同时还假定 X 具有极点 $\Delta\in E$; 生存时间 $\zeta(w)$ 以正概率有限.

现在, 我们来定义一个新的过程 $Y_t(\tilde{\omega}),\tilde{\omega}\in\tilde{\Omega}$, 首先我们令 $\omega=(w,y)\in\Omega=W\times E$, 对 $\tilde{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots)\in\tilde{\Omega}$, 其中 $\omega_j=(w_j,y_j)$, 定义

$$N(\tilde{\omega})=\begin{cases}\inf\{j;\zeta(w_j)=0\};\\ \infty, & \text{反之}.\end{cases}\tag{1}$$

我们在 $(\tilde{\Omega},\bigotimes_{j=1}^{\infty}\mathscr{F}_j)$ 上定义 $Y_t(\tilde{\omega})$ 如下:

$$Y_t(\tilde{\omega})=\begin{cases}\dot{X}_t(\omega_1), & \text{若 } 0\leqslant t\leqslant\zeta(w_1);\\ \dot{X}_{t-\zeta(\omega_1)}(\omega_2), & \text{若 } \zeta(\omega_1)<t\leqslant\zeta(w_1)+\zeta(w_2);\\ \cdots & \\ \dot{X}_{t-\sum_{j=1}^{n}\zeta(w_j)}(\omega_{n+1}), & \text{若 } \sum_{j=1}^{n}\zeta(w_j)<t\leqslant\sum_{j=1}^{n+1}\zeta(w_j);\\ \cdots & \\ \triangle, & \text{若 } t\geqslant\sum_{j=1}^{N(\tilde{\omega})}\zeta(w_j).\end{cases}\tag{2}$$

其中对 $\omega=(w,y)\in\Omega$, $\dot{X}_t(\omega)$ 如下定义

$$\dot{X}_t(\omega)=\begin{cases}X_t(w), t<\zeta(w);\\ y, t\geqslant\zeta(w).\end{cases}$$

于是 $Y_t(\tilde{\omega})$ 的生存时间为

$$\tilde{\zeta}(\tilde{\omega}) = \sum_{j=1}^{N(\tilde{\omega})} \zeta(w_j). \tag{3}$$

进一步,我们引入一列随机时刻 $\{\tau_n(\tilde{\omega}); n = 0,1,\cdots\}$:

$$\tau_0(\tilde{\omega}) = 0, \tau(\tilde{\omega}) \equiv \tau_1(\tilde{\omega}) =$$

$$\zeta(w_j), \cdots, \tau_n(\tilde{\omega}) = \sum_{j=1}^{n\wedge N(\tilde{\omega})} \zeta(w_j). \tag{4}$$

注 1 若 $\mu(w, E\setminus\{\triangle\}) = 1$, 则 $\tilde{P}_x(\tau_n < \tilde{\zeta}) = 1, x \in E\setminus\{\triangle\}$.

引理 1 设 $\{\tilde{P}_x; x \in E\}$ 如定理 1.1,若令

$$\tilde{\Omega}_0 = \{\tilde{\omega}; Y_t(\tilde{\omega}) \text{ 关于 } t \text{ 右连续}\},$$

则 $\tilde{P}_x(\tilde{\Omega}_0) = 1$.

证明见 Ikeda N, Nagasawa M and Watanabe S[1].

根据上述引理 1,我们可将 $\tilde{\Omega}$ 限制到 $\tilde{\Omega}_0$.

设 φ_k 是 $\tilde{\Omega} \to \prod_{j=1}^{k} \Omega_j (\Omega_j = \Omega)$ 的投影映射,并定义

$$\tilde{\mathscr{B}}_{\tau_k} = \varphi_k^{-1}(\bigotimes_{j=1}^{k} \mathscr{F}_j)/\tilde{\Omega}_0,$$

$$\tilde{\mathscr{B}} = \bigvee_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathscr{F}}_{\tau_k} = \bigotimes_{j=1}^{\infty} \mathscr{F}_j/\tilde{\Omega}_0,$$

$$\tilde{\mathscr{N}}_t = \sigma\{\tilde{\Omega}_0, \mathscr{B}(E); Y_s(\tilde{\omega}), s \leqslant t\}.$$

其中 $\mathscr{F}_j = \mathscr{F} = \mathscr{N}_\infty \otimes \mathscr{B}(E)$, $\mathscr{N}_t = \sigma\{X_s; s \leqslant t\}$, $\mathscr{B}/\tilde{\Omega}_0 = \{B \cap \tilde{\Omega}_0; B \in \mathscr{B}\}$.

为了引入新的 Borel 域,我们需要

定义 1 设 $T(\tilde{\omega})$ 为定义在 $\tilde{\Omega}_0$ 上取值于 $[0, \infty]$ 的随机时刻, $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}' \in \tilde{\Omega}_0$ 称为 R_T - 等价的,并记为 $\tilde{\omega} \sim \tilde{\omega}'(R_T)$,如果

(a) $T(\tilde{\omega}) = T(\tilde{\omega}')$;

(b) $X_s(\tilde{\omega}) = X_s(\tilde{\omega}'), \forall s \leqslant T(\tilde{\omega})$;

(c) 若 $\tau_k(\tilde{\omega}) \leqslant T(\tilde{\omega}) < \tau_{k+1}(\tilde{\omega}) \leqslant \tilde{\zeta}(\tilde{\omega})$, 则 $\tau_k(\tilde{\omega}') \leqslant$

$T(\tilde{\omega}') < \tau_{k+1}(\tilde{\omega}') \leqslant \tilde{\zeta}(\tilde{\omega}')$ 且 $\tau_j(\tilde{\omega}') = \tau_j(\tilde{\omega}), \forall j \leqslant k$；同时，若 $T(\tilde{\omega}) \geqslant \tilde{\zeta}(\tilde{\omega})$，则 $T(\tilde{\omega}') \geqslant \tilde{\zeta}(\tilde{\omega}')$ 且 $\tau_j(\tilde{\omega}) = \tau_j(\tilde{\omega}'), \forall j > 0$.

其次我们定义

$$\widetilde{\mathscr{B}}_T = \{A; A \in \widetilde{\mathscr{B}}$$

且若

$$\tilde{\omega} \in A, \tilde{\omega} \sim \tilde{\omega}'(R_T), \text{则 } \tilde{\omega}' \in A\}. \tag{5}$$

显然，$\widetilde{\mathscr{B}}_T$ 是 $\tilde{\Omega}_0$ 上的 Borel 域，且 $\widetilde{\mathscr{B}}_T$ 具有如下性质：

引理 2 (i) $\{\widetilde{\mathscr{B}}_t; t \geqslant 0\}$ 是 $\tilde{\Omega}_0$ 上递增 Borel 域流. 即 $\widetilde{\mathscr{B}}_s \subset \widetilde{\mathscr{B}}_t (s \leqslant t)$，且 $\widetilde{\mathscr{N}}_t \subset \widetilde{\mathscr{B}}_t$，其中 $\widetilde{\mathscr{B}}_t$ 由 $T(\tilde{\omega}) = t$ 定义；

(ii) 对每个 n，τ_n 是 $\widetilde{\mathscr{B}}_t$ – 马氏时刻；

(iii) $T(\tilde{\omega})$ 是 $\widetilde{\mathscr{B}}_t (\widetilde{\mathscr{B}}_{t+0})$ – 马氏时刻当且仅当：

(a) $T(\tilde{\omega})$ 是 $\widetilde{\mathscr{B}}$ – 可测的；

(b) 若 $T(\tilde{\omega}) \leqslant t$（相应地，$T(\tilde{\omega}) < t$），$\tilde{\omega} \sim \tilde{\omega}'(R_t)$，则 $T(\tilde{\omega}) = T(\tilde{\omega}')$；

(iv) 若 T 是 $\widetilde{\mathscr{B}}_t$ – 马氏时刻，则

$\widetilde{\mathscr{B}}_T = \{B; B \in \widetilde{\mathscr{B}}$ 使得 $B \cap \{T \leqslant t\} \in \widetilde{\mathscr{B}}_t$ 对所有 $t \geqslant 0$ 成立$\}$.

证明 (i) 显然，往证(ii)，设 $T(\tilde{\omega})$ 是 $\widetilde{\mathscr{B}}_t$ – 马氏时刻，假定 $\tilde{\omega} \in \{T \leqslant t\} \in \widetilde{\mathscr{B}}_t$，若 $\tilde{\omega} \sim \tilde{\omega}'(R_t)$，则根据 $\widetilde{\mathscr{B}}_t$ 的定义，我们有 $\tilde{\omega}' \in \{T \leqslant t\}$，即 $T(\tilde{\omega}') \leqslant t$，且若 $T(\tilde{\omega}) \leqslant s < T(\tilde{\omega}') \leqslant t$，则 $\tilde{\omega} \in \{T \leqslant s\}$，$\tilde{\omega}' \sim \tilde{\omega}'(R_s)$，从而 $\tilde{\omega}' \in \{T \leqslant s\}$，矛盾. 因此 $T(\tilde{\omega}) = T(\tilde{\omega}')$. 反之，若 $T(\tilde{\omega})$ 满足(a)和(b)，则显见 $\{T \leqslant t\} \in \widetilde{\mathscr{B}}$；且对 $\tilde{\omega} \in \{T \leqslant t\}$，若 $\tilde{\omega} \sim \tilde{\omega}'(R_t)$，则 $\tilde{\omega}' \in \{T \leqslant t\}$. 因此 $\{T \leqslant t\} \in \widetilde{\mathscr{B}}_t$，即 T 为 $\widetilde{\mathscr{B}}_t$ – 马氏时刻，这便证明了(iii).

往证(iii)，显然 τ_n 是 $\widetilde{\mathscr{B}}$ – 可测的，其次设 $\tilde{\omega} \in \{\tau_n \leqslant t\}$，$\tilde{\omega} \sim \tilde{\omega}'(R_t)$，则由定义 $Y_s(\tilde{\omega}) = Y_s(\tilde{\omega}'), \forall s \leqslant t$，所以 $\tau_n(\tilde{\omega}') \leqslant t$. 进而与(ii)类似可得 $\tau_n(\tilde{\omega}) = \tau_n(\tilde{\omega}')$，因此由(ii)便知 τ_n 为 $\widetilde{\mathscr{B}}_t$ – 马氏时刻.

最后，往证(iv)，设 B 满足 $B \cap \{T \leqslant t\} \in \widetilde{\mathscr{B}}_t, \forall t \geqslant 0$，取 $\tilde{\omega}$

$\in B, \tilde{\omega}' \sim \tilde{\omega}(R_T)$,则我们令 $t = T(\tilde{\omega})$,可得 $\tilde{\omega} \in B \cap \{T = t\} \in \tilde{\mathscr{B}}_t$ 及 $\tilde{\omega}' \sim \tilde{\omega}(R_t)$,因此由 $\tilde{\omega}' \in B \cap \{T = t\}$ 可知 $\tilde{\omega}' \in B$,故 $B \in \tilde{\mathscr{B}}_T$.反之,设 $B \in \tilde{\mathscr{B}}_T$,取 $\tilde{\omega} \in B \cap \{T \leqslant t\}$ 及 $\tilde{\omega}'$,使得 $\tilde{\omega} \sim \tilde{\omega}'(R_t)$,则由(ii)知 $T(\tilde{\omega}) = T(\tilde{\omega}')$,因此 $\tilde{\omega} \sim \tilde{\omega}'(R_T)$,这意味着 $\tilde{\omega}' \in B$ 且 $\tilde{\omega}' \in B \cap \{T \leqslant t\}$.故 $B \cap \{T \leqslant t\} \in \tilde{\mathscr{B}}_t$.

现在我们定义推移算子 $\tilde{\theta}_k : \tilde{\Omega}_0 \to \tilde{\Omega}_0$ 如下:对 $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots)$,令

$$\tilde{\theta}_k \tilde{\omega} = (\omega_{k+1}, \omega_{k+2}, \cdots).$$

由定义可直接验证

$$Y_t(\tilde{\theta}_k \tilde{\omega}) = Y_{\tau_k + t}(\tilde{\omega}), \quad \forall t \geqslant 0, \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}_0$$

因此,我们将马尔可夫骨架过程的构造定理叙述如下:

定理 1 设 $X = \{W, \mathscr{B}_t, P_x, x \in E, X_t\}$ 是 E 上的右连续随机过程($\triangle \in E$ 为其极点),满足 $\mathscr{B}_{t+0} = \mathscr{B}_t$,令 $\mu(w, \mathrm{d}y)$ 是 $(W, \mathscr{B}) \times (E, \mathscr{B}(E))$ 上的一个随机核,则 $Y = \{\tilde{\Omega}_0, \tilde{\mathscr{B}}_{t+0}, \tilde{P}_x, x \in E, Y_t\}$ 是 E 上的右连续马尔可夫骨架过程($\triangle$ 为其极点),$\tilde{\zeta}$ 为其生存时间;且

(i) $\{X_t, t \in \zeta, P_x\}$ 与 $\{Y_t, t < \tau, \tilde{P}_x\}$ 等价;

(ii) $\forall B \in \mathscr{N}_\infty, A \in \mathscr{B}(E)$ 有

$$\tilde{P}_x(\{\tilde{\omega}; w_1 \in B, X_\tau(\tilde{\omega}) \in A\}) = \int_B P_x(\mathrm{d}w)\mu(w, A)$$

定理 2 设 $X = \{W, \mathscr{B}_t, P_x, x \in E, X_t, \zeta\}$ 是 E 上的右连续随机过程($\triangle \in E$ 为其极点),满足 $\mathscr{B}_{t+0} = \mathscr{B}_t$,令 $q(x, \mathrm{d}t, \mathrm{d}y)$ 为定义在 $E \times [0, \infty) \times \mathscr{B}(E)$ 上的转移核,固定 A,$q(x, [0, t], A)$ 关于 x, t 二元可测.固定 x, t,$q(x, [0, t], \cdot)$ 为 $\mathscr{B}(E)$ 上准分布.且 $q(x, \mathrm{d}t, \mathrm{d}y) \ll F(x, \mathrm{d}t) \equiv q(x, \mathrm{d}t, E)$.记 $q(x, \mathrm{d}t, \mathrm{d}y)$ 关于 $F(x, \mathrm{d}t)$ 的 Radon – Nikodym 导数为 $Q(x, t, \mathrm{d}y)$,取

$$\mu(w, \mathrm{d}y) = Q(x, t, \mathrm{d}y), \text{若 } \zeta(w) = t, X_0(\omega) = x$$

则 $Y = \{\tilde{\Omega}_0, \tilde{\mathscr{B}}_{t+0}, \tilde{P}_x, x \in E, Y_t\}$ 是 E 上的右连续马氏骨架过程($\triangle$ 为其极点).$\tilde{\zeta}$ 为其生存时间.且

(i) $\{X_t, t \in \zeta, P_x\}$ 与 $\{Y_t, t < \tau, \tilde{P}_x\}$ 等价;

(ii) $P(Y_{\tau_1} \in A, \tau_1 \leqslant t \mid Y_0 = x) = \int_0^t Q(x, s, A) F(x, \mathrm{d}s)$.

证明由定理 1 立得.

§3 定理的证明

本节我们来证明定理 2.1,为此,首先给出几个引理.

引理 1 对每个 $k = 1,2,\cdots$,有 $\widetilde{\mathscr{B}} = \widetilde{\mathscr{B}}_{\tau_k} \vee \tilde{\theta}_k^{-1}(\widetilde{\mathscr{B}})$.

证明 显然有 $\widetilde{\mathscr{B}} \supset \widetilde{\mathscr{B}}_{\tau_k} \vee \tilde{\theta}_k^{-1}(\widetilde{\mathscr{B}})$. 下面我们将证明 $\widetilde{\mathscr{B}} \subset \widetilde{\mathscr{B}}_{\tau_k} \vee \tilde{\theta}_k^{-1}(\widetilde{\mathscr{B}})$, 为此, 只须证明, $\forall B \in \mathscr{F}$, 有 $\{\tilde{\omega}; \omega_j \in B\} \cap \tilde{\Omega}_0 \in \widetilde{\mathscr{B}}_{\tau_k} \vee \tilde{\theta}_k^{-1}(\widetilde{\mathscr{B}})$ 成立即可, 其中 $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots)$. 事实上, 当 $j > k$ 时, $\{\tilde{\omega}; \omega_j \in B\} \cap \tilde{\Omega}_0 = \{\tilde{\omega}; (\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})_{j-k} \in B\} \cap \tilde{\Omega}_0 \in \tilde{\theta}_k^{-1}(\widetilde{\mathscr{B}})$. 当 $j \leqslant k$ 时, $\{\tilde{\omega}; \omega_j \in B\} \cap \tilde{\Omega}_0 \in \widetilde{\mathscr{B}}_{\tau_j} \subset \widetilde{\mathscr{B}}_{\tau_k}$.

引理 2 设 $T(\tilde{\omega})$ 为 $\tilde{B}_{t+0}$ - 马氏时刻(或 $\widetilde{\mathscr{B}}_t$ - 马氏时刻), 则对每个非负整数 k, 在 $\tilde{\Omega}_0 \times \tilde{\Omega}_0$ 上必存在 $T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$, 满足:

(i) $T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ 为 $\widetilde{\mathscr{B}}_{\tau_k} \otimes \widetilde{\mathscr{B}}$ - 可测的;

(ii) 对固定的 $\tilde{\omega}$, $T_k(\tilde{\omega}, \cdot)$ 为 $\widetilde{\mathscr{B}}_{t+0}$ - 马氏时刻(或 $\widetilde{\mathscr{B}}_t$ - 马氏时刻);

(iii) $T(\tilde{\omega}) \vee \tau_k(\tilde{\omega}) = \tau_k(\tilde{\omega}) + T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\theta}_k\tilde{\omega})$.

证明 设 $T(\tilde{\omega})$ 为 $\widetilde{\mathscr{B}}_{t+0}$ - 马氏时刻, 且记

$$T'_k(\tilde{\omega}) = T(\tilde{\omega}) \vee \tau_k(\tilde{\omega}) - \tau_k(\tilde{\omega}).$$

则由前述引理可知, 存在 $\widetilde{\mathscr{B}}_{\tau_k} \otimes \widetilde{\mathscr{B}}$ 可测函数 $T'_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$, 满足

$$T'_k(\tilde{\omega}) = T'_k(\tilde{\omega}, \tilde{\theta}_k\tilde{\omega}).$$

这里, 我们修正 T'_k, 令

$$T_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') = \begin{cases} T'_k(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), & \text{若 } Y_{\tau_k}(\tilde{\omega}) = Y_0(\tilde{\omega}'); \\ \infty, & \text{若 } Y_{\tau_k}(\tilde{\omega}) \neq Y_0(\tilde{\omega}'). \end{cases}$$

显然，$T_k(\omega,\omega')$ 也是 $\tilde{\mathscr{B}}_t\otimes\mathscr{B}$ − 可测的，余下的只需要证明(ii)，由引理2.2(ii)知，我们只需证明，若 $T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_1)<t$ 且 $\tilde{\omega}_1\sim\tilde{\omega}_2(R_t)$，则 $T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_1)=T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_2)$。令 $\tau_k(\tilde{\omega})=s$，记 $\tilde{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots)$，$\tilde{\omega}_1=(\tilde{\omega}_1^1,\tilde{\omega}_2^1,\cdots)$，$\tilde{\omega}_2=(\tilde{\omega}_1^2,\tilde{\omega}_2^2,\cdots)$，则由 $T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_1)<t$ 及 $\tilde{\omega}_1\sim\tilde{\omega}_2(R_t)$ 可知，$Y_{\tau_k}(\tilde{\omega})=Y_0(\tilde{\omega}_1)=Y_0(\tilde{\omega}_2)$。因此，若取

$$\tilde{\omega}'_1=(\omega_1,\cdots,\omega_k,\omega_1^1,\omega_2^1,\cdots),$$
$$\tilde{\omega}'_2=(\omega_1,\cdots,\omega_k,\omega_1^2,\omega_2^2,\cdots).$$

注意到 $\tau_k(\tilde{\omega}'_1)=\tau_k(\tilde{\omega}'_2)=\tau_k(\tilde{\omega})=s$。我们便得

$$\tilde{\omega}\sim\tilde{\omega}'_1\sim\tilde{\omega}'_2(R_{\tau_k}). \tag{1}$$

此外，我们还有

$$\tilde{\theta}_k\tilde{\omega}'_i=\tilde{\omega}_i\quad(i=1,2). \tag{2}$$

这样，由(1)、(2) 两式及 $\tilde{\omega}'_1\sim\tilde{\omega}'_2(R'_{t+s})$ 得

$$\begin{aligned}&T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_i)=T_k(\tilde{\omega}_i,\tilde{\theta}_k\tilde{\omega}'_i)=\\&\tau_k(\tilde{\omega}'_i)\vee T(\tilde{\omega}'_i)-\tau_k(\tilde{\omega}'_i)=\\&\tau_k(\tilde{\omega}'_i)\vee T(\tilde{\omega}'_i)-s,\quad i=1,2\end{aligned} \tag{3}$$

及

$$\tau_k(\tilde{\omega}'_1)\vee T(\tilde{\omega}'_1)=\tau_k(\tilde{\omega}'_1)+T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_1)<s+t. \tag{4}$$

根据引理 2.2(ii)，由(4)、(2) 两式可得

$$\tau_k(\tilde{\omega}'_1)\vee T(\tilde{\omega}'_1)=\tau_k(\tilde{\omega}'_2)\vee T(\tilde{\omega}'_2). \tag{5}$$

由(3) 式即得 $T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_1)=T_k(\tilde{\omega},\tilde{\omega}_2)$。

同理可证 T 为 $\tilde{\mathscr{B}}_t$ − 马氏时刻的情形。

引理 3 (i) 对任意 $B\in\tilde{\mathscr{B}}$ 及 $A\in\tilde{\mathscr{B}}_{\tau_k}$，成立

$$\tilde{P}_x(A,\tilde{\theta}_k\tilde{\omega}\in B)=\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{P}_{Y_{\tau_k}}(B);A]. \tag{6}$$

(ii) 令 $g(\tilde{\omega},t)$ 为 $\tilde{\Omega}_0\times[0,\infty]$ 上的有界 $\tilde{B}\otimes\tilde{\mathscr{B}}[0,\infty]$ 可测函数，若 $\sigma(\tilde{\omega})\geqslant0$ 为 $\tilde{\mathscr{B}}_{\tau_k}$ − 可测的，$A\in\tilde{\mathscr{B}}_{\tau_k}$，则有

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[g(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega},\sigma);A]=\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[g(\cdot,s)]|_{\sigma=s};A]. \tag{7}$$

(iii) 设 $g(\omega,\omega')$ 为 $\Omega_0\times\Omega_0$ 上的有界 $B_{\tau_k}\otimes\tilde{\mathscr{B}}$－可测函数，则对任意 $A\in B_{\tau_k}$，有

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[g(\tilde{\omega},\tilde{\theta}_k\tilde{\omega});A]=\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[g(u,\cdot)]|_{\tilde{\omega}=u};A]. \tag{8}$$

证明　为证明(i)，取 $A_j\in\mathscr{F}$，$j=1,2,\cdots,n$，由 $\tilde{P}_x$ 的定义可知

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_x(\{\tilde{\omega};\omega_j\in A_j,j=1,\cdots,n\})=\\&\int_{A_1}\cdots\int_{A_k}\pi(x,\mathrm{d}\omega_1)\pi(Y_{\tau_1}(\tilde{\omega}),\mathrm{d}\omega_2)\cdots\pi(Y_{\tau_{k-1}}(\tilde{\omega}),\mathrm{d}\omega_k)\cdot\\&\int_{A_{k+1}}\cdots\int_{A_n}\pi(Y_{\tau_k}(\tilde{\omega}),\omega_{k+1})\cdots\pi(Y_{\tau_{n-1}}(\tilde{\omega}),\mathrm{d}\omega_n)=\\&\int_{A_1}\cdots\int_{A_k}\pi(x,\mathrm{d}\omega_1)\pi(Y_{\tau_1},\mathrm{d}\omega_2)\cdots\pi(Y_{\tau_{k-1}},\mathrm{d}\omega_k)\cdot\\&\tilde{P}_{Y_{\tau_k}}(\{\tilde{\omega}_j;\tilde{\omega}_j\in A_j,j=k+1,\cdots,n\}).\end{aligned}$$

这便证明了(6)式对 $A=\{\tilde{\omega}_j,\omega_1\in A_1,\cdots,\omega_k\in A_k\}$ 及 $B=\{\tilde{\omega}_j,\omega_1\in A_{k+1},\cdots,\omega_{n-k}\in A_n\}$ 成立．按通常方法可证(6)式对 $A\in\tilde{\mathscr{B}}_{\tau_k}$ 及 $B\in\tilde{\mathscr{B}}$ 成立．(ii) 可由(i) 按标准方法证得．

往证(iii)，我们首先假定 $g(\tilde{\omega},\tilde{\omega}')=g_1(\tilde{\omega})g_2(\tilde{\omega}')$，其中 g_1 为 $\tilde{\mathscr{B}}_{\tau_k}$－可测的有界函数，$g_2$ 为 $\tilde{\mathscr{B}}$－可测的有界函数，则由(i) 立得结论成立，再根据标准方法可得(8) 式．

引理4　设 $g(x,t)$ 为 $E\times[0,\infty)$ 上的有界可测函数，则对任意 k 及 $A\in\tilde{\mathscr{B}}_{\tau_k+0}$，有

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbf{E}}_x[g(Y_{\tau(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})}(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega}),\tau(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})),A]=\\&\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[g(Y_\tau,\tau)];A].\end{aligned}\tag{9}$$

证明

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[g(Y_\tau,\tau)];A]=\\&\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_0(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})}[g(Y_\tau,\tau)];A].\end{aligned}$$

由引理 3 可知上式等于

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_1}}\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_0}[g(Y_\tau,\tau)]];A]=$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[g(Y_\tau,\tau)];A]=$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[g(Y_{\tau(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})}(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega}),\tau(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega}));A].$$

定理 2.1 的证明 根据马尔可夫骨架过程的定义及引理 2，我们只需要证明 $Y=(Y_t,\tilde{P}_x,\tilde{\mathscr{B}}_{t+0})$ 在每个 τ_k 处的马氏性. 设 f 为 E 上的有界可测函数，满足 $f(\triangle)=0$. 显然 τ_k 为 $\tilde{\mathscr{B}}_{t+0}$ – 马氏时刻，设 $A\in\tilde{\mathscr{B}}_{\tau_k+0}$，下面我们来证明

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[f(Y_{\tau_k+t});A]=\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[f(Y_t)];A]. \tag{10}$$

令

$$\mathrm{I}=\tilde{\mathbf{E}}_x[f(Y_{\tau_k+t});A\cap\{\tau_{k+1}\leqslant\tau_k+t\}],$$

$$\mathrm{II}=\tilde{\mathbf{E}}_x[f(Y_{\tau_k+t});A\cap\{\tau_k+t<\tau_{k+1}\}],$$

则显然(10)式左边等于 I + II，而

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[f(Y_{\tau_k+t});\tau_k+t<\tau_{k+1},A]=$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[f(Y_t(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega}));t<\tau(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega}),A].$$

由引理 3(iii)，上式等于

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[I_A\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[f(Y_t);t<\tau]]=$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[f(Y_t);t<\tau];A].$$

其次，需要证明

$$I=\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[f(Y_t);\tau\leqslant t];A].$$

事实上，

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[f(Y_t);\tau\leqslant t];A]=$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[f(Y_{t-\tau_1}(\tilde{\theta}_1\tilde{\omega}));\tau_1\leqslant t];A].$$

由引理 3 知上式等于

$$\tilde{\mathbf{E}}_x[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_k}}[\tilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_1}}[f(Y_{t-u})]\mid_{\tau_1=u};\tau_1\leqslant t];A].$$

再由引理 4, 上式又等于

$$\widetilde{\mathbf{E}}_x[\widetilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_1(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})}(\tilde{\theta}_k\omega)}[f(Y_{t-u})]|_{\tau_1(\theta_k\omega)=u};\tau_1(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})\leqslant t;A].$$

因为 $\tau_1(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega}) = \tau_{k+1} - \tau_k$,所以

$$\widetilde{\mathbf{E}}_x[\widetilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_1(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})}(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})}[f(Y_{t-u})]|_{\tau_1(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})=u};\tau_1(\tilde{\theta}_k\tilde{\omega})\leqslant t;A] =$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}_x[\widetilde{\mathbf{E}}_{Y_{\tau_{k+1}}}[f(Y_{t-u})]|_{\tau_{k+1}-\tau_k=u};\tau_{k+1}-\tau_k\leqslant t;A].$$

由于 $\{\tau_{k+1} - \tau_k \leqslant t\} \cap A$ 是 $\widetilde{\mathcal{B}}_{\tau_{k+1}}$ – 可测的,根据引理 3 可知上式等于

$$\widetilde{\mathbf{E}}_x[I_{\{\tau_{k+1}-\tau_k\leqslant t\}\cap A}f(Y_{t+\tau_k-\tau_{k+1}}(\tilde{\theta}_{k+1}\tilde{\omega}))] =$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}_x[I_{\{\tau_{k+1}\leqslant\tau_k+t\}\cap A}f(Y_{\tau_k+t})] =$$

$$\widetilde{\mathbf{E}}_x[f(Y\tau_k + t);A \cap \{\tau_{k+1} \leqslant \tau_k + t\}] = I.$$

§4　补充与注记

本章的内容是侯振挺、李俊平、刘万荣和刘再明新近的工作.

5 马尔可夫骨架过程的变换

§1 引言与定义

随机过程的随机时变换在理论上和应用中都有着十分重要的意义. Dynkin[1] 提出了一类变换马尔可夫过程为马尔可夫过程的随机时变换,这类变换被用来由 Wiener 过程构造广义 Brownion 运动. Feller[1] 提出了另一类变换马尔可夫过程为马尔可夫过程的随机时变换,并用于由 Wiener 过程构造对称稳定过程. Richard. F, serfozo[1] 研究了半马尔可夫过程的随机时变换问题,给出了变换一个半马尔可夫过程为半马尔可夫过程的随机时变换.

本章讨论马尔可夫骨架过程的变换问题. §2 讨论了变换一个马尔可夫骨架过程为马尔可夫骨架过程的问题(一般情形), §3 讨论变换一个齐次马尔可夫骨架过程为齐次马尔可夫骨架过程的随机时变换. §4 讨论了对概率 P 的变换, §5 讨论了马尔可夫骨架过程的样本空间的变换. 其中 $\hat{X}$ 的定义见本书第 1 章.

定义 1 设 $\{\tau_t, t \geq 0\}$ 是定义于概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一右连续, 非负实值随机过程, 且对任一 $t \geq 0$, τ_t 是 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时. X 是定义于 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 的一马尔可夫骨架过程, 记 $X'_t = \hat{X}_{\tau_t}, t \geq 0$, 则称 $X' = \{X'_t, t \geq 0\}$ 为马尔可夫骨架过程 X 的由随机时 $\{\tau_t, t \geq 0\}$ 确定的随机时变换.

本章中假定 $\{\varphi_t, t \geq 0\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上取值于 $(([0, \infty),$

为$[0,\infty)$的$\mathscr{F}_t$适应过程，具有单调递增的右连续轨道．不妨设$\varphi_0 = 0, \varphi_t \nearrow \infty$ a.e, $t \to \infty$时．设

（A1） 对a.e.$\omega \in \Omega$，映射$s \to \varphi_s(\omega)$在点$T_n(\omega), \tau(\omega), n = 0,1,2,\cdots$处连续．（其中$T_n, n = 0,1,2,\cdots$是马尔可夫骨架过程$X = \{X(t), t < \tau\}$的一骨架时序列．若$\varphi_t$连续，则（A1）显然成立）．

（A2） 对任意自然数n，令$\tilde{\varphi}_t = \varphi_{T_n+t} - \varphi_{T_n}$，则$\tilde{\varphi}_t$是$\sigma(\hat{X}_{T_n+s}, s \geqslant 0)$可测的．

§2 一般马尔可夫骨架过程的随机时变换

本节讨论一般马尔可夫骨架过程的随机时变换．

定理1 若X是一马尔可夫骨架过程，$\{\mathscr{F}_t\}$右连续，$\{\varphi_s\}$满足条件（A1）、（A2），则X的由随机时$\{\tau_t = \inf\{s, \varphi_s > t\}, t \geqslant 0\}$确定的随机时变换$X'$是一马尔可夫骨架过程．

在给出定理1的证明之前，先给出几个引理．

引理1 若$\{\mathscr{F}_t\}$是一右连续的σ－域流，T是$\{\mathscr{F}_t\}$停时，则

$$\Lambda \in \mathscr{F}_T \Leftrightarrow \text{对} \ \forall t \geqslant 0, \ \Lambda \ (\tau < t) \in \mathscr{F}_t.$$

证明由测度论的常规方法即得．

引理2 在定理1的条件下，对任意$t \geqslant 0$，有τ_t是$\{\mathscr{F}_t\}$停时，X'是$\mathscr{F}'_t \triangleq \mathscr{F}_{\tau_t}, t \geqslant 0$适应的右连左极过程．

证明不难利用引理1得出．

引理3 记$T'_n = \varphi_{T_n}, n = 0,1,2,\cdots$，则$T'_n$是$\{\mathscr{F}'_t\}$停时且$\mathscr{F}'_{T'_n} = \mathscr{F}_{T_n}, n = 0,1,2,\cdots$．

证明 由τ_t的定义及φ_s在T_n处的连续性得：对$\forall t \geqslant 0$，有

$$\{\varphi_{T_n} < t\} = \{\tau_t > T_n\}.$$

所以对$\forall s, t \geqslant 0$有

6 马尔可夫骨架过程积分型泛函的分布和矩及其应用举例

§1 引言

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一完备概率空间,$(E,\mathscr{E})$是 Polish 空间,$X=\{X(t,\omega);0\leqslant t<\tau(\omega)\}$是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于$E$中的马尔可夫骨架过程.本章只考虑具有齐次马尔可夫骨架随机过程的积分型泛函,并将"齐次"二字省略.

设$V(\cdot)$为E上非负有限可测函数,令

$$\xi(\omega)=\int_0^{\tau(\omega)}V(X(t,\omega))\mathrm{d}t. \tag{1}$$

$$\xi^{(n)}(\omega)=\int_0^{\tau_n(\omega)}V(X(t,\omega))\mathrm{d}t. \tag{2}$$

易知ξ和$\xi^{(n)}(n=1,2,\cdots)$是随机变量且以概率1有$\xi^{(n)}\uparrow\xi(n\uparrow\infty)$.

关于积分型泛函的研究始于王梓坤[3],他完全解决了生灭过程的积分型泛函的分布和矩的计算问题,侯振挺、郭青峰[1]对齐次可列马尔可夫过程解决了上述问题;新近,侯振挺、刘国欣、周弋将侯振挺、郭青峰[1]的结果移植于半马尔可夫过程.本章对马尔可夫骨架过程讨论上述问题.令

$$F_n(t,x,A)=P(\xi^{(n)}\leqslant t,X(\tau_n)\in A\mid X(0)=x), \tag{3}$$

$$F(t,x)=P(\xi\leqslant t\mid X(0)=x), \tag{4}$$

$$\Phi_n(\lambda,x,A)=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}F_n(\mathrm{d}t,x,A), \tag{5}$$

$$\Phi(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} F(dt, x), \tag{6}$$

$$\psi_n(\lambda, x, A) = 1 - \Phi_n(\lambda, x, A), \tag{7}$$

$$\psi(\lambda, x) = 1 - \Phi(\lambda, x), \tag{8}$$

$$T_{n,p}(x, A) = \mathbf{E}[(\xi^{(n)})^p, X(\tau_n) \in A \mid X(0) = x], \tag{9}$$

$$T_{n,p}(x) = T_{n,p}(x, E), \tag{10}$$

$$T_p(x) = \mathbf{E}[\xi^p \mid X(0) = x]. \tag{11}$$

并设 $\sigma_0 = 0, \sigma_n = \tau_n - \tau_{n-1}, n \geqslant 1$,令

$$G_n(t, x, A) =$$

$$P(\int_0^{\sigma_n} V(X(s))ds \leqslant t, X(\sigma_n) \in A \mid X(0) = x). \tag{12}$$

引理 1 $F_n(t, x, A)$ 满足如下递推公式:

$$F_n(t, x, A) = F^{*(n)}(t, x, A), \tag{13}$$

其中

$$\begin{cases} F^{*(0)}(t, x, A) \triangleq \delta_{[0,\infty)}(t)\delta_A(x); \\ F^{*(1)}(t, x, A) \triangleq F_1(t, x, A) = G_1(t, x, A); \\ F^{*(n)}(t, x, A) \triangleq \int_E \int_0^t F^{*(n-1)}(ds, x, dy) G_n(t - s, y, A). \end{cases} \tag{14}$$

证明 $n = 1$ 时,(13) 显然;设(13) 对 n 成立,则

$$F_{n+1}(t, x, A) =$$

$$P(\int_0^{\tau_{n+1}} V(X(s))ds \leqslant t, X(\tau_{n+1}) \in A \mid X(0) = x) =$$

$$\int_\Omega \mathbf{E}[\int_0^{\tau_{n+1}} V(X(s))ds \leqslant t, X(\tau_{n+1}) \in A \mid X(\tau_n), \tau_n, X(0) = x] \cdot$$

$$1_{\{\int_0^{\tau_n} V(X(s))ds \leqslant t\}} P(d\omega \mid X(0) = x) =$$

$$\int_E \int_0^t \mathbf{E}_y[\int_0^{\sigma_{n+1}} V(X(s))ds \leqslant t - u, X(\sigma_{n+1}) \in A] \cdot$$

$$P(\int_0^{\tau_n} V(x(s))ds \in du, X(\tau_n) \in dy \mid X(0) = x) =$$

$$\int_E \int_0^t F^{*(n)}(\mathrm{d}u, x, \mathrm{d}y) G_{n+1}(t-u, y, A) =$$

$$F^{*(n+1)}(t, x, A).$$

推论 1 如果 $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ 为独立同分布的非负随机变量序列，则

$$F^{*(n)}(t, x, A) = \int_E \int_0^t F^{*(n-1)}(\mathrm{d}s, x, \mathrm{d}y) G(t-s, y, A),$$

其中

$$G(t, x, A) \triangleq$$

$$P\left(\int_0^{\sigma_1} V(X(s))\mathrm{d}s \leq t, X(\sigma_1) \in A \mid X(0) = x\right)$$

$$F^{*(1)}(t, x, A) = G(t, x, A).$$

引理 2 $\Phi_n(\lambda, x, A)$ 由次之递推公式唯一决定：

$$\Phi_n(\lambda, x, A) = \int_E \Phi_{n-1}(\lambda, x, \mathrm{d}y) g_n(\lambda, y, A), \tag{15}$$

其中

$$\Phi_0(\lambda, x, A) = \delta_A(x),$$

$$g_n(\lambda, x, A) = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} G_n(\mathrm{d}t, x, A).$$

证明 由引理 1 取 Laplace 变换即得.

引理 3 $T_{n,p}(x, A)$ 由次之递推公式唯一决定：

$$T_{1,p}(x, A) = \int_0^{\infty} t^p F_1(\mathrm{d}t, x, A), \tag{16}$$

$$T_{n,p}(x, A) = \sum_{l=0}^{p} C_p^l \int_E T_{n-1,l}(x, \mathrm{d}y) G_{n,p-l}(y, A), \tag{17}$$

其中 $G_{n,k}(y, A) = \int_0^{\infty} t^k G_n(\mathrm{d}t, y, A)$.

证明

$$T_{1,p}(x, A) =$$

$$\mathbf{E}\left[\left(\int_0^{\tau_1} V(X(s))\mathrm{d}s\right)^p, X(\tau_1) \in A \mid X(0) = x\right] =$$

$$\int_0^{\infty} t^p F_1(\mathrm{d}t, x, A).$$

利用 X 在 τ_n 的马尔可夫性可得 $T_{n,p}(x,A)$.

§2 (H,Q) 过程的积分型泛函

定理 1 设 X 为 (H,Q) 过程，则 $F_n(t,x,A)$ 由次之递推公式唯一决定：

$$F_n(t,x,A) = F^{*(n)}(t,x,A), \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases} F^{*(0)}(t,x,A) \triangleq \delta_{[0,\infty)}(t)\delta_A(x), \\ F^{*(1)}(t,x,A) \triangleq P\left(\int_0^{\tau_1} V(X(s))\mathrm{d}s \leqslant t, X(\tau_1) \in A \mid X(0) = x\right), \\ F^{*(n)}(t,x,A) \triangleq \int_E \int_{0-}^{t} G(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y) F^{*(n-1)}(t-s,y,A). \end{cases}$$

证明 由 (H,Q) - 过程的定义，类似于引理 1.1 可证.

定理 2 $\psi_n(\lambda,x,A)$ 由次之递推公式唯一决定：

$$\begin{cases} \psi_0(\lambda,x,A) = 1 - \delta_A(x), \\ \psi_n(\lambda,x,A) = \int_E g(\lambda,x,\mathrm{d}y)\psi_{n-1}(\lambda,y,A) + 1 - g(\lambda,x,E) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $g(\lambda,x,A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} G(\mathrm{d}t,x,A)$.

证明 由定理 1 取 Laplace - stieltjes 变换即可得公式(2).

引理 1 设 $b(x,A)$ 对固定的 A，是 x 的可测函数，当 x 固定时，是 $(\mathbf{E},\mathscr{E})$ 上的准分布；$C(x)$ 是非负可测函数，则非负方程

$$f(x) = \int_E b(x,\mathrm{d}y)f(y) + C(x) \tag{3}$$

的最小非负解存在唯一；若令

$$\begin{cases} f_0 \equiv 0, \\ f_{n+1}(x) = \int_E b(x,\mathrm{d}y)f_n(y) + C(x), n \geqslant 0, \end{cases} \tag{4}$$

则极限

$$V-\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f^*(x) \tag{5}$$

存在,且$\{f^*(x);x\in E\}$为(3)的最小非负解.

证明 (i) $\{f^*(x);x\in E\}$为(3)的最小非负解

显然,$f_1(x)=C(x)\geqslant f_0(x)$;设$f_n(x)\geqslant f_{n-1}(x)$,则由$b(\cdot,\cdot)$的非负性知

$$f_{n+1}(x)=\int_E b(x,\mathrm{d}y)f_n(y)+C(x)\geqslant$$

$$\int_E b(x,\mathrm{d}y)f_{n-1}(y)+C(x)=f_n(x),$$

即$\{f_n\}_{n\geqslant 1}$为单调函数序列,从而(5)的极限存在,再根据(4)及单调收敛定理,便知f^*是(3)的非负解.

其次,若$R(x)$是(3)的任一非负解,则易证$R(x)\geqslant f_n(x)$,从而$R(x)\geqslant f^*(x)$.

(ii) (3)的最小非负解是唯一的

若$R(x)$是(3)的最小非负解,则由(i)

$$R(x)\geqslant f^*(x).$$

但$R(x)$也是最小解,故$R\equiv f^*$.

如果在引理1中取$b(x,A)=g(\lambda,x,A)$,$C(x)=1-g(\lambda,x,\mathbf{E})$,则非负方程

$$f(x)=\int_E g(\lambda,x,\mathrm{d}y)f(y)+1-g(\lambda,x,E) \tag{6}$$

的最小非负解$\{f^*(x);x\in E\}$存在唯一且满足

$$0\leqslant f^*(x)\leqslant 1.$$

引理2 设$C_n(x)\geqslant 0$,$(n\geqslant 1,x\in E)$,且

$$V-\lim_{n\to\infty}C_n(x)=C(x). \tag{7}$$

若令

$$\begin{cases}f_1(x)=C_1(x),\\ f_{n+1}(x)=\int_E b(x,\mathrm{d}y)f_n(y)+C_{n+1}(x),\end{cases} \tag{8}$$

则 $V-\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 存在且为(3)的最小非负解.

证明　注意到 $C_n(x)\uparrow C(x)$,与引理4的证明类似.

引理3　设 $f^*(x)$ 是非负方程

$$f(x)=\int_E b(x,\mathrm{d}y)f(y)+C(x) \tag{9}$$

的最小非负解,$\alpha\geqslant 0$,则 αf^* 是非负方程

$$f(x)=\int_E b(x,\mathrm{d}y)f(y)+\alpha C(x) \tag{10}$$

的最小非负解.

证明略.

引理4　设 $f(x)$ 是非负方程(9)的优方程

$$f(x)\geqslant\int_E b(x,\mathrm{d}y)f(y)+\bar{C}(x) \tag{11}$$

的任意一非负解,其中 $\bar{C}(x)\geqslant C(x)$,则

$$f^*(x)\leqslant f(x). \tag{12}$$

证明　设 $\{f_n(x);n\geqslant 0\}$ 如引理1,则

$$f(x)\geqslant\int_E b(x,\mathrm{d}y)f(y)+\bar{C}(x)\geqslant$$

$$\bar{C}(x)\geqslant C(x)=f_1(x).$$

设 $f(x)\geqslant f_n(x)$,则

$$f(x)\geqslant\int_E b(x,\mathrm{d}y)f(y)+\bar{C}(x)\geqslant$$

$$\int_E b(x,\mathrm{d}y)f_n(y)+C(x)=f_{n+1}(x),$$

故 $f(x)\geqslant f_n(x),\forall n\geqslant 1$,从而 $f(x)\geqslant f^*(x)$.

以下恒设 $q(t,x,E)=P(\tau_1\leqslant t\mid X(0)=x)$,从而

$$G(t,x,E)=P\left(\int_0^{\tau_1}V(X(s))\mathrm{d}s\leqslant t\mid X(0)=x\right).$$

定理3　$\psi(\lambda,x)\triangleq\psi(\lambda,x,E)$ 是非负方程

$$f(x)=\int_E g(\lambda,x,\mathrm{d}y)f(y)+1-g(\lambda,x,E) \tag{13}$$

的最小非负解.

证明 由引理1直接得到.

定理4 设 X 为 (H,Q) 过程,则 $T_{n,p}(x,A)$ 由次之递推公式唯一决定:

$$T_{1,p}(x,A)=\int_0^\infty t^p F_1(\mathrm{d}t,x,A), \tag{14}$$

$$T_{n,p}(x,A)=\sum_{l=0}^{p} C_p^l \int_E G^{(l)}(x,\mathrm{d}y)T_{n-1,p-l}(y,A), \tag{15}$$

其中

$$G^{(l)}(x,A)=$$
$$\mathbf{E}[(\int_0^{\tau_1} V(X(s))\mathrm{d}s)^l;X(\tau_1)\in A \mid X(0)=x]=$$
$$\int_0^\infty t^l G(\mathrm{d}t,x,A).$$

证明 由 $F_1(t,x,A)=P(\int_0^{\tau_1} V(X(s))\mathrm{d}s\leqslant t,X(\tau_1)\in A \mid X(0)=x)$ 立得(14),其次

$$T_{n,p}(x,A)=$$
$$\mathbf{E}[(\int_0^{\tau_n} V(X(s))\mathrm{d}s)^p;X(\tau_n)\in A \mid X(0)=x]=$$
$$\sum_{l=0}^{p} C_p^l \mathbf{E}[(\int_0^{\tau_1} V(X(s))\mathrm{d}s)^l \mathbf{E}[(\int_{\tau_1}^{\tau_n} V(X(s))\mathrm{d}s)^{p-l},X(\tau_n)\in A \mid$$
$$\tau_1,X(\tau_1)] \mid X(0)=x]=$$
$$\sum_{l=0}^{p} C_p^l \int_E G^{(l)}(x,\mathrm{d}y)T_{n-1,p-l}(y,A).$$

定理5 设 X 为 (H,Q) 过程,则 $T_p(x)=\lim\limits_{n\to\infty}T_{n,p}(x,E)$ 是方程

$$f(x)=\int_E \bar{q}(x,\mathrm{d}y)f(y)+\sum_{l=1}^{p} C_p^l \int_E G^{(l)}(x,\mathrm{d}y)T_{p-l}(y) \tag{16}$$

的最小非负解,其中 $\bar{q}(x,A)=P(X(\tau_1)\in A \mid X(0)=x)$.

证明 由定理4知

$$T_{n,p}(x,E) = \int_E G^{(0)}(x,\mathrm{d}y)T_{n-1,p}(y,E) +$$

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l \int_E G^{(l)}(x,\mathrm{d}y)T_{n-1,p-l}(y,E) =$$

$$\int_E \bar{q}(x,\mathrm{d}y)T_{n-1,p}(y,E) +$$

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l \int_E G^{(l)}(x,\mathrm{d}y)T_{n-1,p-l}(y,E).$$

规定 $T_{0,l}(\cdot,\cdot) = 0(l > 0), T_{0,0}(\cdot,E) = 1$,则

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l \int_E G^{(l)}(x,\mathrm{d}y)T_{0,p-l}(y,E) =$$

$$\int_E G^{(p)}(x,\mathrm{d}y) = G^{(p)}(x,E) = T_{1,p}(x,E).$$

根据单调收敛定理及引理 2 即得结论.

定理 6 若 $T(x) \triangleq T_1(x) \leqslant C < +\infty$,且存在 K 使

$$G^{(l)}(x,A) \leqslant KlG^{(1)}(x,E) \cdot G^{(l-1)}(x,A)$$

$$\forall x \in E, A \in \mathscr{E}, l = 2,\cdots,p, \quad (17)$$

则

$$T_p(x) \leqslant p!K^{p-1}C^p. \quad (18)$$

证明 由假设知(18)对 $p = 1$ 成立.设对 $p-1$ 为真,即

$$T_{p-1}(x) \leqslant (p-1)!K^{p-2}C^{p-1}. \quad (19)$$

由定理 5 知,$T_1(x)$ 是方程

$$f(x) = \int_E \bar{q}(x,\mathrm{d}y)f(y) + G^{(1)}(x,E) \quad (20)$$

的最小非负解;由引理 6 知,若 $f^*(x)$ 是方程

$$f(x) = \int_E \bar{q}(x,\mathrm{d}y)f(y) + p! \cdot K^{p-1}C^{p-1}G^{(1)}(x,E) \quad (21)$$

的最小非负解,则

$$f^*(x) = p!K^{p-1}C^{p-1}T_1(x).$$

其次

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l \int_E G^{(l)}(x,\mathrm{d}y) T_{p-l}(y) \leqslant$$

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l G^{(1)}(x,E) \int_E G^{l-1}(x,\mathrm{d}y) T_{p-l}(y) =$$

$$pKG^{(1)}(x,E) \sum_{l=0}^{p-1} C_{p-1}^l \int_E G^{(l)}(x,\mathrm{d}y) T_{p-1-l}(y) \leqslant$$

$$pKG^{(1)}(x,E) T_{p-1}(x) \leqslant p!K^{p-1}C^{p-1}G^{(1)}(x,E),$$

从而由引理4知

$$T_p(x) \leqslant f^*(x) \leqslant p!K^{p-1}C^p.$$

值得指出的是,以上关于积分型泛函的分布和矩的结论,只需要求$\{\tau_n\}_{n\geqslant 0}$不减,而不必要求$\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = \tau$,换言之,我们可以只考虑随机过程的某一小段;此时,上述结论的证明无需更改.

§3 应用举例

作为前述定理的应用,现在我们来讨论几种特殊情形.设E为可数集合,$X = \{X(t); t < \tau\}$为取值于E且关于停时列$\{\tau_n\}_{n\geqslant 0}$是$(H,Q)$过程.$V(\cdot)$为$E$上非负函数,令

$$\xi = \int_0^\tau V(X(t))\mathrm{d}t, \tag{1}$$

$$\xi^{(n)} = \int_0^{\tau_n} V(X(t))\mathrm{d}t, n = 1,2,\cdots \tag{2}$$

$$F_n(t,i,j) = P(\xi^{(n)} \leqslant t, X(t_n) = j \mid X(0) = i), \tag{3}$$

$$F(t,i) = P(\xi \leqslant t \mid X(0) = i), \tag{4}$$

$$\Phi_n(\lambda,i,j) = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} F_n(\mathrm{d}t,i,j), \tag{5}$$

$$\Phi(\lambda,i) = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} F(\mathrm{d}t,i), \tag{6}$$

$$\psi_n(\lambda,i,j) = 1 - \Phi_n(\lambda,i,j), \tag{7}$$

$$\psi(\lambda,i)=1-\Phi(\lambda,i), \tag{8}$$

$$T_{n,p}(i,j)=\mathbf{E}[(\xi^{(n)})^p;X(\tau_n)=j\mid X(0)=i], \tag{9}$$

$$T_{n,p}(i)=T_{n,p}(i,E), \tag{10}$$

$$T_p(i)=\mathbf{E}[\xi^p\mid X(0)=i]. \tag{11}$$

(A) 最小 Q 过程

设 $Q=(q_{ij})$ 是 E 上全稳定保守 Q 矩阵，X 为具有密度矩阵 Q 的任一 Q 过程，令 τ_n 为第 n 次跳跃时刻，$\tau=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n$ 为第一次飞跃时刻，则 X 在 τ 之前的部分为最小 Q 过程，它关于 $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ 是 (H,Q) 过程，且

$$q_\lambda(i,j)=(1-\delta_{ij})\frac{q_{ij}}{\lambda+q_i},h_\lambda(i,j)=\frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}.$$

定理 1 设 Q 保守，$V(\cdot)>0$，则

(i) $\psi_n(\lambda,i,j)$ 由次之递推公式唯一决定

$$\begin{cases}\psi_0(\lambda,i,j)=1-\delta_{ij},\\ \psi_n(\lambda,i,j)=\sum\limits_{k\neq i}\dfrac{q_{ik}}{\lambda V(i)+q_i}\psi_{n-1}(\lambda,k,j)+\dfrac{\lambda V(i)}{\lambda V(i)+q_i}.\end{cases} \tag{12}$$

(ii) $\psi(\lambda,i)$ 是非负方程

$$x_i=\sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda V(i)+q_i}x_k+\frac{\lambda V(i)}{\lambda V(i)+q_i},\quad i\in E \tag{13}$$

最小非负解.

(iii) 若所有 $q_i>0$，则 $T_p(i)$ 是非负方程

$$x_i=\sum_{j\neq i}\frac{q_{ij}}{q_i}x_j+\frac{V(i)p}{q_i}T_{p-1}(i),\quad i\in E \tag{14}$$

的最小非负解.

证明 注意

$$\begin{aligned}&G(t,i,j)=\\&P(V(i)\tau_1\leqslant t,x(\tau_1)=j\mid(0)=i)=\\&(1-\delta_{ij})\frac{q_{ij}}{q_i}(1-\mathrm{e}^{-\frac{q_i}{V(i)}t}),\end{aligned}$$

$$g(\lambda,i,j)=(1-\delta_{ij})\frac{q_{ij}}{\lambda V(i)q_i},$$

于是由定理 2.2,定理 2.3 和定理 2.4 立得定理结论.

定理 1 即侯振挺、郭青峰[1] 的定理 9.5.1 和定理 9.5.2.

一般情况,设 $Q=(q_{ij})$ 为全稳定 Q 矩阵,$d_i=q-\sum_{j\neq i}q_{ij}$ 为非保守量,$X=\{X(t);t<\tau\}$ 为最小 Q 过程,其转移概率为 $(p_{ij}(t))$,Laplace 变换为 $(\varphi_{ij}(\lambda))$.任取 $b\in E$,记 $E_b=E\cup\{b\}$,定义 E_b 上的全稳定保守 Q 矩阵 $Q^b=(\bar{q}_{ij};i,j\in E_b)$ 如下:

$$\bar{q}_{ij}=\begin{cases}q_{ij}, & i,j\in E;\\ \mathrm{d}_i, & i\in E,j=b;.\\ 0, & i=b,j\in E_b\end{cases}\tag{15}$$

引理 1 设 $\bar{X}=\{X(t);t<\sigma\}$ 为最小 Q^b 过程,其转移概率为$(\bar{p}_{ij}(t),i,j\in E_b)$,Laplace 变换为$(\bar{\varphi}_{ij}(\lambda);i,j\in E_b)$,则

$$\bar{\varphi}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}\varphi_{ij}(\lambda), & i,j\in E;\\ \frac{1}{\lambda}, & i=j=b\\ 0, & i=b,j\in E;\\ \frac{1}{\lambda}\sum_{k\in E}\varphi_{ik}(\lambda)\mathrm{d}_k, & i\in E,j=b.\end{cases}\tag{16}$$

或者等价地

$$\bar{p}_{ij}(t)=\begin{cases}p_{ij}(t), & i,j\in E;\\ 1, & i=j=b;\\ 0, & i=b,j\in E;\\ \sum_{k\in E}\mathrm{d}_k\int_0^t p_{ik}(s)\mathrm{d}s, & i\in E,j=b.\end{cases}\tag{17}$$

因此,$\{\bar{X}(t),t>\tau_b\wedge\sigma\}=\{X(t),t<\tau\}$ 为最小 Q 过程,其中 $\tau_b=\inf\{t>0,\bar{X}(t)=b\}$.

证明见侯振挺等[1] 引理 3.11.1.

设 τ_n 为 X 的第 n 个跳跃点,$\bar{\tau}_n$ 为 $\bar{X}$ 的第 n 个跳跃点.

引理 2 设 $V(\cdot)$ 是定义在 E_b 上的正函数，则对任意 $n \geqslant 0$, $i, j \in E$ 及 $t \in [0, \infty)$，有

$$P(\int_0^{\tau_n} V(X(s))\mathrm{d}s \leqslant t \mid X(0) = i) =$$

$$P(\int_0^{\bar{\tau}_n \wedge \tau_b} V(X(s))\mathrm{d}s \leqslant t \mid \bar{X}(0) = i). \tag{18}$$

$$P(\int_0^{\tau_n} V(X(s))\mathrm{d}s \leqslant t, X(\tau_n) = j \mid X(0) = i) =$$

$$P(\int_0^{\bar{\tau}_n} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s \leqslant t \mid \bar{X}(\bar{\tau}_n) = j \mid X(0) = i). \tag{19}$$

证明 由 b 为 $\bar{X}$ 的吸收状态知

$$P(\bar{X}(\bar{\tau}_k) \in E, k < n \mid \bar{X}(0) = i) =$$

$$P(\bar{X}(\bar{\tau}_{n-1}) \in E \mid \bar{X}(0) = i), \tag{20}$$

所以

$$P(\int_0^{\tau_n} V(X(s))\mathrm{d}s \leqslant t \mid X(0) = i) =$$

$$P(\int_0^{\bar{\tau}_n} V(X(s))\mathrm{d}s \leqslant t, \bar{X}(\bar{\tau}_k) \in E, k < n \mid \bar{X}(0) = i) =$$

$$P(\int_0^{\bar{\tau}_n} V(X(s))\mathrm{d}s \leqslant t, \bar{X}(\bar{\tau}_{n-1}) \in E \mid \bar{X}(0) = i) =$$

$$P(\int_0^{\tau_n \wedge \tau_b} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s \leqslant t \mid \bar{X}(0) = i).$$

因此得证(18)式.类似可证(19)式.

定理 2 设 $X = \{X(t); t < \tau\}$ 为最小 Q 过程，$V(\cdot)$ 为 E 上的正函数，则

(i) $\psi_n(\lambda, i, j)$ 由次之递推公式唯一决定：

$$\begin{cases} \psi_0(\lambda, i, j) = 1 - \delta_{ij}; \\ \psi_n(\lambda, i, j) = \sum_{k \neq i} \dfrac{q_{ik}}{\lambda V(i) + q_i} \psi_{n-1}(\lambda, k, j) + \dfrac{\lambda V(i) + \mathrm{d}_i}{\lambda V(i) + q_i}. \end{cases} \tag{21}$$

(ii) $\psi(\lambda, i) = 1 - \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} F(\mathrm{d}t, i)$ 是非负方程

$$y_i = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda V(i) + q_i} y_k + \frac{\lambda V(i)}{\lambda V(i) + q_i}, i \in E \tag{22}$$

的最小非负解;

(iii) 若所有 $q_i > 0$,则对 $p \geqslant 1$, $T_p(i) = \mathbf{E}[(\int_0^\tau V(X(s))\mathrm{d}s)^p \mid X(0) = i]$ 是非负方程

$$y_i = \sum_{j\neq i} \frac{q_{ij}}{q_i} y_j + \frac{V(i)\cdot p}{q_i} \cdot T_{p-1}(i), i \in E \tag{23}$$

的最小非负解.

证明 定义 $V(b) = 1$,由(20)及定理1(i)立得(i),其次令

$\bar{\varphi}_n(\lambda, i) = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} P(\int_0^{\bar{\tau}_n \wedge \tau_b} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s \in \mathrm{d}t \mid \bar{X}(0) = i)$,

$P(\int_0^{\bar{\tau}_n \wedge \tau_b} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s \leqslant t \mid \bar{X}(0) = i) =$

$P(\int_0^{\bar{\tau}_n \wedge \tau_b} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s \leqslant t, \tau_b = \bar{\tau}_1 \mid \bar{X}(0) = i) +$

$P(\int_0^{\bar{\tau}_n \wedge \tau_b} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s \leqslant t, \tau_b > \bar{\tau}_1 \mid \bar{X}(0) = i) =$

$P(V(i)\bar{\tau}_1 \leqslant t, \bar{X}(\bar{\tau}_1) = b \mid \bar{X}(0) = i) +$

$\sum_{k\in E}\int_0^t P(\int_0^{\bar{\tau}_{n-1} \wedge \tau_b} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s \leqslant t - u \mid \bar{X}(0)) = k) \cdot$

$P(V(i)\bar{\tau}_1 \in \mathrm{d}u, \bar{X}(\bar{\tau}_1) = k \mid \bar{X}(0) = i)$.

所以

$$\bar{\varphi}_n(\lambda, i) = \frac{\mathrm{d}_i}{\lambda V(i) + q_i} + \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{\lambda V(i) + q_i} \bar{\varphi}_{n-1}(\lambda, k), \quad i \in E,$$

$$\bar{\varphi}_0(\lambda, i) = 1.$$

由此及引理2便得(ii).

(iii) 令

$$T_{n,p}(i) = \mathbf{E}[(\int_0^{\tau_n} V(X(s))\mathrm{d}s)^p \mid X(0) = i],$$

$$\bar{T}_{n,p}(i) = \mathbf{E}[(\int_0^{\tau_n \wedge \tau_b} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s)^p \mid \bar{X}(0) = i],$$

则由引理 2 知

$$T_{n,p}(i) = \bar{T}_{n,p}(i), \tag{24}$$

$$\bar{T}_{n,p}(i) = \mathbf{E}[(\int_0^{\bar{\tau}_n \wedge \tau_b} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s)^p, \bar{\tau}_1 = \tau_b \mid \bar{X}(0) = i] +$$

$$\sum_{l=0}^{p} C_p^l \mathbf{E}[(\int_0^{\bar{\tau}_1} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s)^l \cdot$$

$$(\int_{\bar{\tau}_1}^{\bar{\tau}_n \wedge \tau_b} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s)^{p-l}, \bar{\tau}_1 < \tau_b \mid \bar{X}(0) = i] =$$

$$\mathbf{E}[(\int_0^{\bar{\tau}_1} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s)^p, \bar{X}(\bar{\tau}_1) = b \mid \bar{X}(0) = i] +$$

$$\sum_{l=0}^{p} C_p^l \sum_{k \in \mathbf{E} \setminus \{i\}} \mathbf{E}[(\int_0^{\bar{\tau}_1} V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s)^l, \bar{X}(\bar{\tau}_1) = k \mid \bar{X}(0) = i]$$

$$T_{n-1,p-l}(k) =$$

$$(\frac{V(i)}{q_i})^p \cdot p!\frac{d_i}{q_i} + \sum_{k \in \mathbf{E} \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} T_{n-1,p}(k) +$$

$$\frac{V(i)p}{q_i}[T_{n-1,p-1}(i) - (\frac{V(i)}{q_i})^{p-1} \cdot (p-1)!\frac{\mathrm{d}_i}{q_i}] =$$

$$\sum_{k \in \mathbf{E} \setminus \{i\}} \frac{q_{ik}}{q_i} T_{n-1,p}(k) + \frac{V(i)p}{q_i} T_{n-1,p-1}(i).$$

$$T_{1,p}(i) = (\frac{V(i)}{q_i})^p \cdot p!.$$

利用引理 2.2 即得(iii).

(B) 一阶 Q 过程

设 $Q = (q_{ij})$ 为 E 上全稳定保守 Q 矩阵,最小 Q 过程中断. $X = \{X(t); t < \tau\}$ 为一个一阶 Q 过程,$(\partial X)_e$ 表示 X 的一级流出边界,$\Pi = \{\Pi(b,j); b \in (\partial X)_e, j \in E\}$ 为 X 的飞跃概率矩阵(见侯振挺、郭青峰[1]),令 $\tau_0 = 0$, τ_n 是 X 的第 n 个飞跃点,则 X 关于 $\{\tau_n\}$ 构成一个(H, G, Π) - 过程(侯振挺、刘再明、邹捷中、李学伟

[1]).此时

$h(t,i,j) = p_{ij}^{\min}(t), \quad i,j \in E.$

$g(t,i,A) =$

$P(X(\tau_1 -) \in A, \tau_1 \leqslant t \mid X(0) = i), i \in E, A \in \mathscr{B}(\partial X)_e,$

$\Pi(b,j) = P(X(\tau_1) = j \mid X(\tau_1 -) = b), b \in (\partial X)_e, j \in E.$

由侯振挺、刘再明、邹捷中、李学伟[1]定理 4.1 知, X 是(H, Q)过程,且

$$q(t,i,j) = \int_{(\partial X)_e} g(t,i,\mathrm{d}b)\Pi(b,j).$$

定理 3 设 X 是一阶 Q 过程, $V(\cdot) \equiv 1$,则

(i) $\psi_n(\lambda,i,j)$ 由次之递推公式唯一决定:

$$\begin{cases} \psi_0(\lambda,i,j) = 1 - \delta_{ij} \\ \psi_n(\lambda,i,j) = \sum_{k \in E} \left(\int_{(\partial X)_e} g_\lambda(i,\mathrm{d}b)\Pi(b,k) \right) \psi_{n-1}(\lambda,k,j) + 1 - q(\lambda,i,E). \end{cases}$$

其中

$$g_\lambda(i,A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}g(t,i,A),$$

$$q(\lambda,i,E) = \int_{(\partial X)_e} g_\lambda(i,\mathrm{d}b)\Pi(b,E).$$

(ii) $\psi(\lambda,i)$ 是非负方程

$$x_i = \sum_{k \in E} \left(\int_{(\partial X)_e} g_\lambda(i,\mathrm{d}b)\Pi(b,k) \right) x_k + 1 - q(\lambda,i,E) \quad (25)$$

的最小非负解.

(iii) $T_p(i) = \mathbf{E}[\tau^p \mid X(0) = i]$ 是非负方程

$$x_i = \sum_{k \in E} \int_{(\partial X)_e} g(i,\mathrm{d}b)\Pi(b,k) x_k + \sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{k \in E} G^{(l)}(i,k) T_{p-l}(k) \quad (26)$$

的最小非负解,其中 $G^{(l)}(i,k) = \int_0^\infty \int_{(\partial X)_e} g(\mathrm{d}t,i,\mathrm{d}b)\Pi(b,k)$.

证明略.

(C) Doob 过程

设 $Q=(q_{ij})$ 为 E 上全稳定保守 Q－矩阵，最小 Q 过程 $\Phi(\lambda)=(\varphi_{ij}(\lambda))$ 中断，即 $X(\lambda)=1-\lambda\Phi(\lambda)1\neq 0$，此时 Doob 过程存在（杨向群[3]），设 $X=\{X(t);t<\tau\}$ 为 (Q,Π)－Doob 过程，转移概率为 $(p_{ij}(t))$，Laplace 变换为 $(\psi_{ij}(\lambda))$，$\Pi=(\Pi_j;j\in E)$ 是飞跃点的分布，令 τ_n 为 X 的第 n 个飞跃点，则 X 是 (H,Q) 过程，此时

$$h(\lambda,i,j)=\varphi_{ij}(\lambda),q(\lambda,i,j)=X_i(\lambda)\Pi_j, \tag{27}$$

而且

$$\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+X_i(\lambda)\frac{\sum\limits_{k\in E}\Pi_k\varphi_{kj}(\lambda)}{1-\sum\limits_{k\in E}\Pi_kX_k(\lambda)}. \tag{28}$$

任取 $b\notin E$，记 $E_b=E\cup\{b\}$，令

$$\bar{q}_{ij}=\begin{cases}q_{ij}, & i,j\in E;\\ 0, & i=b \text{或} j=b.\end{cases} \tag{29}$$

则由 $Q^b=(q_{ij};i,j\in E_b)$ 是全稳定保守 Q 矩阵，由侯振挺等[1]引理 13.1.1 知，最小 Q^b 过程 $(\bar{\varphi}_{ij}(\lambda);i,j\in E_b)$ 由下式给出

$$\bar{\varphi}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}\varphi_{ij}(\lambda), & i,j\in E;\\ \dfrac{1}{\lambda}, & i=j=b;\\ 0, & i\in E,j=b \text{或} i=b,j\in E.\end{cases} \tag{30}$$

令

$$\bar{\psi}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}\psi_{ij}(\lambda), & i,j\in E;\\ \dfrac{1}{\lambda}, & i=j=b;\\ \dfrac{1}{\lambda}\left[1-\lambda\sum\limits_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda)\right], & i\in E,j=b;\\ 0, & i=b,j\in E.\end{cases} \tag{31}$$

引理 3 $(\bar{\psi}_{ij}(\lambda),i,j\in E_b)$ 是不中断 Q^b 过程，记此过程为 $\bar{X}=\{\bar{X}(t);t\geq 0\}$，若 $\bar{\tau}_n$ 为 $\bar{X}$ 的第 n 个飞跃点，则 $\bar{X}$ 关于 $\{\bar{\tau}_n\}_{n\geq 0}$ 是 (H,Q)－过程．且

$$h(\lambda,i,j) = \bar{\varphi}_{ij}(\lambda), q(\lambda,i,j) = \bar{X}_i(\lambda)\bar{\Pi}_j,$$

$$\bar{\psi}_{ij}(\lambda) = \bar{\varphi}_{ij}(\lambda) + \bar{X}_i(\lambda)\frac{\sum_{k\in E_b}\bar{\Pi}_k\bar{\varphi}_{kj}(\lambda)}{1-\sum_{k\in E_b}\bar{\Pi}_k\bar{X}_k(\lambda)}. \tag{32}$$

因此，$\bar{X}$ 还是$(Q^b,\bar{\Pi})$ - Doob 过程，其中 $\Pi = (\bar{\Pi}_j;j\in E_b)$，

$$\Pi_j = \begin{cases}\Pi_j, & j\in E;\\ 1-\sum_{k\in E}\Pi_k, & j = b.\end{cases} \tag{33}$$

$$\bar{X}_j(\lambda) = 1-\lambda\sum_{k\in E_b}\bar{\varphi}_{jk}(\lambda) = \begin{cases}X_j(\lambda), j\in E;\\ 0, \quad j = b.\end{cases} \tag{34}$$

证明 显然$(\bar{\psi}_{ij}(\lambda);i,j\in E_b)$为不中断 Q^b 过程，因此只需验证(32)式

1) 若 $i,j\in E$，则由 $\bar{\psi}_{ij}(\lambda) = \psi_{ij}(\lambda)$，(28)、(30)、(33)及(34)易得(32)；

2) $i = b$，则由 $\bar{X}_b(\lambda) = 0$，(30)及(31)知(32)式成立；

3) 若 $i\in E, j = b$，则

$$\bar{\psi}_{ib}(\lambda) = [1-\lambda\sum_{k\in E}\psi_{ik}(\lambda)]/\lambda =$$

$$\lambda^{-1} - \sum_{l\in E}[\varphi_{il}(\lambda) + X_i(\lambda)\frac{\sum_{k\in E}\Pi_k\varphi_{kl}(\lambda)}{1-\sum_{k\in E}\Pi_kX_k(\lambda)}] =$$

$$[1-\lambda\sum_{l\in E}\varphi_{il}(\lambda) - \bar{X}_i(\lambda)\frac{\sum_{k\in E}\Pi_k(1-X_k(\lambda))}{1-\sum_{k\in E_b}\bar{\Pi}_k\bar{X}_k(\lambda)}]\cdot\frac{1}{\lambda} =$$

$$\bar{X}_i(\lambda)\cdot[1-\frac{\sum_{k\in E}\bar{\Pi}_k - \sum_{k\in E_b}\bar{\Pi}_k\bar{X}_k(\lambda)}{1-\sum_{k\in E_b}\bar{\Pi}_k\bar{X}_k(\lambda)}]\cdot\frac{1}{\lambda} =$$

$$X_i(\lambda)\cdot\frac{\bar{\Pi}_b/\lambda}{1-\sum_{k\in E_b}\bar{\Pi}_k\bar{X}_k(\lambda)}=\bar{X}_i(\lambda)\cdot\frac{\sum_{k\in E_b}\Pi_k\varphi_{kb}(\lambda)}{1-\sum_{k\in E_b}\bar{\Pi}_k\bar{X}_k(\lambda)}.$$

令 $\bar{\tau}_b=\inf\{t>0,\bar{X}(t)=b\}$,则由禁止概率分解定理可知 $\bar{\tau}_b=\tau,\{\bar{X}(t);t<\bar{\tau}_b\}=\{X(t);t<\tau\}$.且与引理2类似可证,对任意 $i\in E,n\geqslant 0,t\in[0,\infty)$ 及 E_b 上的非负函数 $V(\cdot)$,有

$$P\left(\int_0^{\tau_n}V(X(s))\mathrm{d}s\leqslant t\mid X(0)=i\right)=$$

$$P\left(\int_0^{\bar{\tau}_n\wedge\bar{\tau}_b}V(\bar{X}(s))\mathrm{d}s\leqslant t\mid\bar{X}(0)=i\right).\tag{35}$$

定理4 设 $X=\{X(t);t<\tau\}$ 是 (Q,Π) - Doob过程,$\Phi_n(\lambda,i,j)=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}P(\tau_n\leqslant t,X(\tau_n)=j\mid X(0)=i)$,$\Phi_n(\lambda,i)=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}P(\tau_n\leqslant t\mid X(0)=i)$,则

(i) $\psi_n(\lambda,i,j)=1-\Phi_n(\lambda,i,j)$ 由次之递推公式唯一决定.

$$\begin{cases}\psi_0(\lambda,i,j)=1-\delta_{ij},\\ \psi_n(\lambda,i,j)=X_i(\lambda)\sum_{k\in E}\Pi_k\psi_{n-1}(\lambda,k,j)+1-X_i(\lambda)\Pi 1.\end{cases}\tag{36}$$

(ii) $\psi_n(\lambda,i)=1-\Phi_n(\lambda,i)$ 由次之递推公式唯一决定.

$$\begin{cases}\psi_0(\lambda,i)=0,\\ \psi_n(\lambda,i)=X_i(\lambda)\sum_{k\in E}\Pi_k\psi_{n-1}(\lambda,k)+1-X_i(\lambda).\end{cases}\tag{37}$$

(iii) $\psi(\lambda,i)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(\lambda,i)$ 是非负方程.

$$y_i=X_i(\lambda)\sum_{k\in E}\Pi_k y_k+1-X_i(\lambda),\quad i\in E\tag{38}$$

的最小非负解;

(iv) $T(i)=\mathbf{E}[\tau\mid X(0)=i]$ 是非负方程.

$$y_i=\bar{X}_i\sum_{k\in E}\Pi_k y_k+\mathbf{E}[\tau_1\mid X(0)=i],\quad i\in E\tag{39}$$

的最小非负解,其中 $E[\tau_1 \mid X(0)=i]=\int_0^\infty t\mathrm{d}P(\tau_1\leqslant t \mid X(0)=i)$, $X_i=\lim\limits_{\lambda\to 0}X_i(\lambda)$.

证明 考虑 $\bar{X}=\{\bar{X}(t);t\geqslant 0\}$ 在 E 上的限制,利用引理3及(35),与定理2类似可证.

此外由(37)可直接计算得:

$$\psi_n(\lambda,i)=1-\frac{1-\Pi 1+\Pi 1(\Pi X(\lambda))^{n-1}-(\Pi X(\lambda))^n}{1-\Pi X(\lambda)}\cdot X_i(\lambda), \tag{40}$$

$$\psi(\lambda,i)=1-\frac{1-\Pi 1}{1-\Pi X(\lambda)}\cdot X_i(\lambda). \tag{41}$$

从而

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda\tau} \mid X(0)=i]=1-\psi(\lambda,i)=\frac{1-\Pi 1}{1-\Pi X(\lambda)}\cdot X_i(\lambda). \tag{42}$$

(v) 生灭过程

设 $E=\{0,1,2,\cdots\}$,给定 E 上的生灭 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})$,其中 $q_{ij}=0(\mid i-j \mid >1)$, $q_{i\,i+1}=b_i>0(i\geqslant 0)$, $q_{i\,i-1}=a_i>0(i>0)$, $q_{ii}=-(a_i+b_i)\quad(i\geqslant 0, a_0=0)$.

定义

$$z_0=0, z_1=\frac{1}{b_0}, z_n=z_{n-1}+\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{b_0b_1\cdots b_{n-1}}, z=\lim_{n\to\infty}z_n, \tag{43}$$

$$\mu_0=1, \mu_1=\frac{b_0}{a_1}, \mu_n=\frac{b_0a_1\cdots b_{n-1}}{a_1a_2\cdots a_n}, \mu=\sum_n\mu_n, \tag{44}$$

$$\Gamma_{ij}=(z-z_{\max(i,j)})\mu_j, \tag{45}$$

$$N_i=\sum_j\Gamma_{ij}, \tag{46}$$

$$R=N_0, S=\sum z_j\mu_j, \tag{47}$$

对 $\lambda>0$,方程组

$$\begin{cases}(\lambda I-Q)u=0,\\ u_0=1\end{cases} \tag{48}$$

的唯一解$\{u_i(\lambda),i\geqslant 0\}$关于$i$严格递增，且$u_\infty(\lambda)\triangleq\lim\limits_{n\to\infty}u(\lambda)<\infty$当且仅当$R<\infty$，$\sum\limits_i u_i(\lambda)\mu_i<\infty$当且仅当$S<\infty$；函数

$$v_i(\lambda)=u_i(\lambda)\sum_{j=i}^{\infty}\frac{z_{j+1}-z_j}{u_j(\lambda)u_{j+1}(\lambda)},\quad i\geqslant 0. \tag{49}$$

关于i严格减少，令

$$\varphi_{ij}(\lambda)=\begin{cases}u_i(\lambda)v_j(\lambda)\mu_j, & j\geqslant i,\\ v_i(\lambda)u_j(\lambda)\mu_j, & j<i,\end{cases} \tag{50}$$

则$\Phi(\lambda)=(\varphi_{ij}(\lambda))$是最小$Q$过程，而且

$$X_i(\lambda)\triangleq 1-\lambda\sum_j\varphi_{ij}(\lambda)=u_i(\lambda)/u_\infty(\lambda). \tag{51}$$

若$R<\infty$，则每个Q过程$\psi(\lambda)=(\psi_{ij}(\lambda))$必具形式：

$$\psi_{ij}(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+X_i(\lambda)\frac{\sum\limits_k\alpha_k\varphi_{kj}(\lambda)+DX_j(\lambda)\mu_j}{C+\sum\limits_k\alpha_k(1-X_k(\lambda))+D\lambda\sum\limits_k X_k(\lambda)\mu_k}, \tag{52}$$

其中$\alpha=(\alpha_k;k\geqslant 0)$，$C$和$D$均非负，且

$$\alpha\cdot N<\infty;\quad S=\infty\text{ 时 }D=0.$$

我们称$\psi(\lambda)$为(Q,α,C,D)过程.

设$X=\{X(t);t<\sigma\}$是Q过程，不妨设X是典范过程，具有(52)的形式．并令τ_n是X的第n个飞跃点．则$\{X(t);t<\tau_1\}$为最小Q过程，$\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n$为$X$的寿命.

根据杨向群[3]定理11.7.4及定理12.3.1知存在一列(Q,V^m) - Doob过程$\{X^m(t);t<\sigma^m\}$，其转移概率的Laplace变换为

$$\psi_{ij}^m(\lambda)=\varphi_{ij}(\lambda)+X_i(\lambda)\frac{\sum\limits_{k=0}^{m}V_k^m\varphi_{kj}(\lambda)}{1-\sum\limits_{k=0}^{m}V_k^m X_k(\lambda)}, \tag{53}$$

其中

$$\begin{cases} V_{-1}^m = \frac{X_m}{A_m}C, V_j^m = \frac{X_m}{A_m}\alpha_j \quad (0 \leqslant j \leqslant m), \\ V_m^m = Y_m + \frac{X_m}{A_m}\sum_{l=m}^{\infty}\alpha_l C_{lm}. \end{cases} \tag{54}$$

$$\begin{cases} A_m = \sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l C_{lm}; \\ \mathrm{d} = \begin{cases} \frac{D}{z}, & \alpha \neq 0; \\ 1, & \alpha = 0. \end{cases} \\ X_m = \frac{A_m C_{m0}}{(C + A_m)C_{m0} + \mathrm{d}}; \\ Y_m = \frac{\mathrm{d}}{(C + A_m)C_{m0} + \mathrm{d}}; \\ C_{lk} = \begin{cases} 1, & l \leqslant k, \\ \frac{z - z_l}{z - z_k}, & l > k. \end{cases} \end{cases} \tag{55}$$

使得 X^m 强收敛于 X.

定理 5 设 $R < \infty$, X 为 (Q, α, C, D) 过程,则

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda\sigma} \mid X(0) = i] = \frac{CX_i(\lambda)}{C + I(\lambda)}, \tag{56}$$

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda(\sigma-\tau_1)} \mid X(0) = i] = \frac{C}{C + I(\lambda)}. \tag{57}$$

$$P(\sigma = \tau_1 \mid X(0) = i) = \begin{cases} 0, & D > 0; \\ \frac{C}{C + \sum_k \alpha_k}, & D = 0. \end{cases} \tag{58}$$

$$\mathbf{E}[\sigma - \tau_1 \mid X(0) = i] = \frac{\alpha N + D\mu}{C}. \tag{59}$$

其中 $I(\lambda) = \sum_k \alpha_k(1 - X_k(\lambda)) + D\lambda \sum_k X_k(\lambda)\mu_k$.

证明 考虑 (Q, V^m) – Doob 过程 $(\psi_{ij}^m(\lambda))$,由定理 4

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda\sigma^m} \mid X^m(0) = i] =$$

$$1-\psi^m(\lambda,i)=X_i(\lambda)\frac{V^m_{-1}}{1-\sum_k V^m_k X_k(\lambda)}.$$

令 $m\to\infty$，并注意 $\sigma^m\uparrow\sigma$，类似杨向群[3]定理12.2.1的证明便得(56). 其次由 $P(\tau_1<\infty \mid X(0)=i)=1$，可知

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda\sigma^m} \mid X(0)=i]=$$

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1}\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda(\sigma^m-\tau_1)} \mid X^m(\tau_1)\in \mathbf{E}\cup\{-1\}] \mid X^m(0)=i]=$$

$$\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1} \mid X^m(0)=i]\cdot\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda(\sigma^m-\tau_1)} \mid X^m(0)=i]=$$

$$X_i(\lambda)\frac{V^m_{-1}}{1-\sum_k V^m_k X_k(\lambda)}.$$

由于 $\mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_1} \mid X^m(0)=i]=X_i(\lambda)$，令 $m\to\infty$ 即得(57)，由(56)、(57)及 $\varphi_{ij}(\lambda)\uparrow\Gamma_{ij}(\lambda\downarrow 0)$ 便得(58)与(59).

定理5的结论由杨向群[2]首先得到，这里我们利用Doob过程积分型泛函的分布和矩也得到此结论.

(E) 半马尔可夫过程

设 E 可数，$Q(t)=(q_{ij}(t);i,j\in E)$ 是保守半马尔可夫矩阵，X 为相应的半马尔可夫过程 Королюк В.С, Турбин А.Ф[1] 令 τ_n 为第 n 次跳跃时刻，则 X 为 (H,Q) 过程，此时

$$\begin{cases}q(\lambda,i,j)=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}q_{ij}(t),\\ h(\lambda,i,j)=\delta_{ij}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}(1-p_i(t))\mathrm{d}t,\end{cases}\tag{60}$$

其中 $p_i(t)=\sum_{k\in E}q_{ik}(t)$ 是状态 i 的逗留时间分布.

定理6 设 $V(\cdot)$ 为 E 上非负函数，则

(i) $\psi_n(\lambda,i,j)$ 由次之递推公式唯一决定：

$$\begin{cases}\psi_0(\lambda,i,j)=1-\delta_{ij},\\ \psi_n(\lambda,i,j)=\sum_{k\in E}q(\lambda V(i),j,k)\psi_{n-1}(\lambda,k,j)+1-\hat{P}_i(\lambda(V(i))).\end{cases}\tag{61}$$

(ii) $\psi(\lambda,i)$ 是非负方程

$$y_i = \sum_{k \in E} q(\lambda V(i), i, k) y_k + 1 - \hat{P}_i(\lambda V(i)) \tag{62}$$

的最小非负解.

(iii) 对 $p \geqslant 1$, $T_p(i)$ 是非负方程

$$y_i = \sum_{k \in E} p_{ik} y_k + \sum_{j \in E} \sum_{l=1}^{p} C_p^l (V(i))^l u_{ij}^{(l)} T_{p-l}(j) \tag{63}$$

的最小非负解.

其中

$$\begin{cases} \hat{P}_i(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda t} dp_i(t), \\ p_{ik} = q_{ik}(\infty), \\ u_{ij}^{(l)} = \int_{0-}^{\infty} t^l dq_{ij}(t). \end{cases} \tag{64}$$

证明略.

(F) 逐段决定的马氏骨架过程

设$(E, \mathscr{E})$ 是 polish 空间, $X = \{X(t); t < \tau\}$ 为逐段决定的马氏骨架过程,从而存在二元可测函数, $f: E \times [0, \infty) \to E$,满足

1) $\forall x \in E$, $f(x,t)$ 关于 t 右连左极,

2) $\forall n \geqslant 0$, $X(t) = f(X(\tau_n), t - \tau_n)$, $\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}$.

此时

$$h(t,x,A) = \delta_A(f(x,t)) P(\tau_1 > t \mid X(0) = x) = \delta_A(f(x,t))(1 - q(t,x)), \tag{65}$$

$$g(t,x,B) = P(X(\tau_1 -) \in B, \tau_1 \leqslant t \mid X(0) = x) = \int_0^t \delta_B(f(x,s-)) dq(s,x), \quad B \subset (\partial X)_e, \tag{66}$$

$$\Pi(x,A) = P(X(\tau_1) \in A \mid X(\tau_1 -) = x), \tag{67}$$

$$q(t,x,A) = \int_{(\partial X)_e} g(t,x,dy) \Pi(y,A), \tag{68}$$

其中

$$q(t,x) = P(\tau_1 \leqslant t \mid X(0) = x).$$

根据定理 2.2 及定理 2.3,我们有

定理 7 设 $V(\cdot) \equiv 1$,则

(i) $\psi_n(\lambda, x, A)$ 由次之递推公式唯一决定:

$$\begin{cases} \psi_0(\lambda, x, A) = 1 - \delta_A(x), \\ \psi_n(\lambda, x, A) = \int_E \left(\int_{(\partial X)_r} g_\lambda(x, \mathrm{d}y) \Pi(y, \mathrm{d}z)\right) \psi_{n-1}(\lambda, z, A) + 1 - \hat{q}(\lambda, x, E). \end{cases} \tag{69}$$

(ii) $\psi(\lambda, i)$ 是非负方程

$$f(x) = \int_E \left(\int_{(\partial X)_r} g_\lambda(x, \mathrm{d}y) \Pi(y, \mathrm{d}z)\right) f(z) + 1 - \hat{q}(\lambda, x) \tag{70}$$

的最小非负解.

其中

$$\hat{q}(\lambda, x, A) = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} q(\mathrm{d}t, x, A),$$

$$\hat{q}(\lambda, x) = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}P(\tau_1 \leqslant t \mid X(0) = x).$$

§4 补充与注记

本章内容取自李俊平、侯振挺[1].

在 §2 中,我们对(H, Q)-过程的积分型泛函的分布和矩进行了详细讨论,在 §3 应用举例中,利用马尔可夫骨架过程理论同样得到了杨向群[2]的结果.

7 马尔可夫骨架过程首达时间的分布和矩

§1 引言

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为完备概率空间，$(E,\mathscr{E})$是Polish空间，$X=\{X(t,\omega);0\leqslant t<\tau(\omega)\}$为定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于$E$中的$(H,Q)$过程.

记$q(x,B)=\lim\limits_{t\to\infty}q(t,x,B)$，$\{X(\tau_n);n\geqslant 0\}$是以$\{q(x,B);x\in E,B\in\mathscr{E}\}$为转移概率的离散时间齐次马尔可夫过程.

设A,H均为E的闭子集，且$A\neq\varnothing$，令

$$\sigma_A(\omega)=\begin{cases}\inf(t;0<t<\tau(\omega),X(t,\omega)\in A), & \text{若括号中集合非空;}\\ +\infty, & \text{否则.}\end{cases}$$

$$_H\sigma_A(\omega)=\begin{cases}\sigma_A(\omega), & \text{若 } \sigma_A(\omega)\leqslant\sigma_H(\omega);\\ +\infty, & \text{否则.}\end{cases}$$

对$n\in\mathbf{N}$，令

$$_Hf_{x,A}^{(n)}(t)=P(_H\sigma_A\leqslant t,\tau_{n-1}<{_H\sigma_A}\leqslant\tau_n\mid X(0)=x),$$

$$_Hf_{x,A}(t)=P(_H\sigma_A\leqslant t\mid X(0)=x),$$

$$_H\varphi_{x,A}^{(n)}(\lambda)=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}\,{_Hf_{x,A}^{(n)}(t)},\quad\lambda\geqslant 0,$$

$$_H\varphi_{x,A}(\lambda)=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}\,{_Hf_{x,A}(t)},\quad\lambda\geqslant 0,$$

$$_H m_{x,A}^{(n,p)} = \int_0^\infty t^p \mathrm{d}\, _H f_{x,A}^{(n)}(t), \quad p = 0,1,\cdots$$

$$_H m_{x,A}^{(p)} = \int_{0-}^\infty t^p \mathrm{d}\, _H f_{x,A}(t), \quad p = 0,1,\cdots$$

$$_H m_{x,A}^{*} = {}_H\varphi_{x,A}(0) = {}_H m_{x,A}^{(0)} =$$
$$P({}_H\sigma_A < +\infty \mid X(0) = x).$$

我们假定(H,Q)过程 X 满足下列条件:

$$\mathbf{E}[X(\tau_n) \in B \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}] =$$
$$\mathbf{E}[X(\tau_n) \in B \mid X(\tau_n -)], \qquad n > 0, B \in \mathscr{E}. \quad (1)$$

$$\mathbf{E}[X(\tau_n) \in B, \tau_n \leqslant t \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}] =$$
$$\mathbf{E}[X(\tau_n) \in B \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}] \cdot \mathbf{E}[\tau_n \leqslant t \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}],$$
$$n > 0, t \geqslant 0, B \in \mathscr{E}. \quad (2)$$

其中$\mathscr{N}_{\tau_n-} = \sigma\{B \cap \{t < \tau_n\}; B \in \sigma\{X(s); s \leqslant t\}, t \geqslant 0\}$.

§2 首达时间的分布和矩

本节我们来讨论(H,Q)过程的首达时间,设 X 满足条件(1.1)和(1.2).

引理1 对任意 $n \geqslant 1$ 及 $B \in \mathscr{E}$,有

$$\mathbf{E}[X(\tau_n) \in B \mid \mathscr{N}_{\tau_n-} \vee \sigma(\tau_n)] =$$
$$\mathbf{E}[X(\tau_n) \in B \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}],$$

其中$\mathscr{N}_{\tau_n-} \vee \sigma(\tau_n)$表示包含$\mathscr{N}_{\tau_n-}$及$\sigma(\tau_n)$的最小$\sigma$域.

证明 只需证明对任意 $K \in \mathscr{N}_{\tau_n-} \vee \sigma(\tau_n)$,有

$$\mathbf{E}[1_K \cdot \mathbf{E}[X(\tau_n) \in B \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}]] =$$
$$\mathbf{E}[1_K, X(\tau_n) \in B] \quad (1)$$

成立即可,为此,我们令

$$\mathscr{A} = \{K; 使(2.1)式成立\},$$

$$\mathscr{C} = \{K = K_1 \cap K_2; K_1 \in \mathscr{N}_{\tau_n-}^{\cdot}, K_2 \in \sigma(\tau_n)\}.$$

设 $K = K_1 \cap K_2 \in \mathscr{C}$,由条件(1.2)可知

$$\mathbf{E}[1_K \mathbf{E}[X(\tau_n) \in B \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}]] =$$

$$\mathbf{E}[1_{K_1} \cdot 1_{K_2} \mathbf{E}[X(\tau_n) \in B \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}]] =$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[1_{K_1} \cdot 1_{K_2} \mathbf{E}[X(\tau_n) \in B \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}] \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}]] =$$

$$\mathbf{E}[1_{K_1} \cdot \mathbf{E}[X(\tau_n) \in B \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}] \cdot \mathbf{E}[1_{K_2} \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}]] =$$

$$\mathbf{E}[1_{K_1} \cdot \mathbf{E}[1_{K_2}, X(\tau_n) \in B \mid \mathscr{N}_{\tau_n-}]] =$$

$$\mathbf{E}[1_K, X(\tau_n) \in B].$$

即 $\mathscr{A} \supset \mathscr{C}$,其次,不难验证 $\mathscr{C}$ 是 π 系,$\mathscr{A}$ 是 λ 系,故 $\mathscr{A} \supset \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{N}_{\tau_n-} \vee \sigma(\tau_n)$.

根据(1.1)和(1),我们记

$$\pi(x,B) = P(X(\tau_1) \in B \mid X(\tau_1 -) = x). \tag{2}$$

$$\varphi(t,x,B) = P(\tau_1 \leqslant t, {}_H\sigma_A \geqslant \tau_1, X(\tau_1 -) \in B \mid X(0) = x), \quad x \in E. \tag{3}$$

$$\psi(t,x) = P({}_H\sigma_A \leqslant t, 0 < {}_H\sigma_A < \tau_1 \mid X(0) = x), \quad x \in E \tag{4}$$

引理 2 对任意 $B \subset E \setminus (A \cup H)$,有

$$P(X(\tau_1) \in B, {}_H\sigma_A \leqslant t, \tau_n < {}_H\sigma_A \leqslant \tau_{n+1} \mid X(0) = x) = \int_{0-}^{t} \int \varphi(\mathrm{d}u, x, \mathrm{d}z) \int_B {}_H f_{y,A}^{(n)}(t-u) \pi(z, \mathrm{d}y).$$

证明 根据 X 在 τ_1 的马尔可夫性可知

$$P(X(\tau_1) \in B, {}_H\sigma_A \leqslant t, \tau_n < {}_H\sigma_A \leqslant \tau_{n+1} \mid X(0) = x) =$$

$$\mathbf{E}[1_{\{X(\tau_1) \in B, {}_H\sigma_A \geqslant \tau_1\}} \mathbf{E}[{}_H\sigma_A \leqslant t, {}_H\sigma_A \in (\tau_n, \tau_{n+1}] \mid X(\tau_1)] \mid X(0) = x] =$$

$$\int_{0-}^{t} \int_B P({}_H\sigma_A \leqslant t - u, {}_H\sigma_A \in (\tau_{n-1}, \tau_n] \mid X(0) = y) \cdot$$

$$P(X(\tau_1) \in \mathrm{d}y, {}_H\sigma_A \geqslant \tau_1, \tau_1 \in \mathrm{d}u \mid X(0) = x) =$$

$$\int_{0-}^{t}\int_{E}{}_{H}f_{y,A}^{(n)}(t-u)\cdot P(X(\tau_1)\in \mathrm{d}y,{}_{H}\sigma_A\geqslant\tau_1,\tau_1\in \mathrm{d}u\mid X(0)=x).$$

其次

$$P(X(\tau_1)\in C,{}_{H}\sigma_A\geqslant\tau_1,\tau_1\leqslant t\mid X(0)=x)=$$
$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X(\tau_1)\in C,{}_{H}\sigma_A\geqslant\tau_1,\tau_1\leqslant t\mid \mathscr{N}_{\tau_1-}\vee\sigma(\tau_1)]\mid X(0)=x]=$$
$$\mathbf{E}[{}_{H}\sigma_A\geqslant\tau_1,\tau_1\leqslant t,\mathbf{E}[X(\tau_1)\in C\mid X(\tau_1-)]\mid X(0)=x]=$$
$$\int\pi(z,C)\varphi(t,x,\mathrm{d}z).$$

引理 3 $\{{}_{H}f_{x,A}^{(n)}(t)\}$ 由次之递推公式唯一决定:

$${}_{H}f_{x,A}^{(1)}(t)=\psi(t,x)+\int_{E\setminus(A\cup H)}\pi(z,A)\varphi(t,x,\mathrm{d}z)$$
$${}_{H}f_{x,A}^{(n+1)}(t)=$$
$$\int_{0-}^{t}\int\varphi(\mathrm{d}u,x,\mathrm{d}z)\int_{E\setminus(A\cup H)}{}_{H}f_{y,A}^{(n)}(t-u)\pi(z,\mathrm{d}y).$$

证明 由

$$f_{x,A}^{(1)}(t)=P({}_{H}\sigma_A\leqslant t,0<{}_{H}\sigma_A<\tau_1\mid X(0)=x)+$$
$$P({}_{H}\sigma_A\leqslant t,{}_{H}\sigma_A=\tau_1\mid X(0)=x)=$$
$$\psi(t,x)+\int_{E\setminus(A\cup H)}\pi(z,A)\varphi(t,x,\mathrm{d}z)$$

及引理 2 便得.

引理 4 $\{{}_{H}\varphi_{x,A}^{(n)}(\lambda)\}$ 由次之递推公式唯一决定:

$${}_{H}\varphi_{x,A}^{(1)}(\lambda)=\Psi(\lambda,x)+\int_{E\setminus(A\cup H)}\pi(z,A)\Phi(\lambda,x,\mathrm{d}z),$$
$${}_{H}\varphi_{x,A}^{(n+1)}(\lambda)=\int\Phi(\lambda,x,\mathrm{d}z)\int_{E\setminus(A\cup H)}{}_{H}\varphi_{y,A}^{(n)}(\lambda)\pi(z,\mathrm{d}y),$$

其中

$$\Psi(\lambda,x)=\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}\psi(t,x),\Phi(\lambda,x,B)=$$
$$\int_{0-}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\varphi(\mathrm{d}t,x,B).$$

证明 只需在引理 3 中取 Laplace – Stieltjes 变换即得.

引理 5 $\{{}_Hm_{y,A}^{(n,p)}\}$ 由次之递推公式唯一决定:

$$
{}_Hm_{x,A}^{(1,p)} = \int_{0-}^{\infty} t^p \Psi(\mathrm{d}t, x) + \int_{0-}^{\infty} t^p \int_{E\setminus(A\cup H)} \pi(z,A)\varphi(\mathrm{d}t, x, \mathrm{d}z).
$$

$$
{}_Hm_{x,A}^{(n+1,p)} = \sum_{l=1}^{p} C_p^l \int k^{(l)}(x,\mathrm{d}z) \int_{E\setminus(A\cup H)} {}_Hm_{y,A}^{(n,p-l)} \pi(z,\mathrm{d}y) + \int \Phi(0,x,\mathrm{d}z) \int_{E\setminus(A\cup H)} {}_Hm_{y,A}^{(n,p)} \pi(z,\mathrm{d}y),
$$

其中

$$
k^{(l)}(x,B) = \int_{0-}^{\infty} t^l \varphi(\mathrm{d}t, x, B).
$$

证明 仿侯振挺、郭青峰[1]引理 9.3.4 可证.

引理 6 (i) ${}_Hf_{x,A}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_Hf_{x,A}^{(n)}(t)$;

(ii) ${}_H\varphi_{x,A}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_H\varphi_{x,A}^{(n,p)}$;

(iii) ${}_Hm_{x,A}^{(p)}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_Hm_{x,A}^{(n,p)}$.

证明 由定义即得.

定理 1 $\{{}_H\varphi_{x,A}(\lambda); x \in E\}$ 是拟规格方程

$$
f(x) = \int \Phi(\lambda,x,\mathrm{d}z) \int_{E\setminus(A\cup H)} f(y)\pi(z,\mathrm{d}y) + \Psi(\lambda,x) + \int_{E\setminus(A\cup H)} \pi(z,A)\Phi(\lambda,x,\mathrm{d}z) \quad x \in E
$$

的最小非负解.

证明 由引理 6(ii),引理 4 引理 6.2.2 立得.

推论 1 $\{{}_Hf_{x,A}^{*}; x \in E\}$ 是拟规格方程

$$
f(x) = \int \Phi(0,x,\mathrm{d}z) \int_{E\setminus(A\cup H)} f(y)\pi(z,\mathrm{d}y) +
$$

$$\Psi(0,x)+\int_{E\setminus(A\cup H)}\pi(z,A)\Phi(0,x,\mathrm{d}z),\quad x\in E$$

的最小非负解.

证明 本推论即为定理1在 $\lambda=0$ 时的特例.

定理2 对于 $p\geqslant 1$, $\{{}_Hm_{x,A}^{(p)};x\in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$f(x)=\int\Phi(0,x,\mathrm{d}z)\int_{E\setminus(A\cup H)}f(y)\pi(z,\mathrm{d}y)+$$

$$\sum_{l=1}^{p}C_p^l\int k^{(l)}(x,\mathrm{d}z)\int_{E\setminus(A\cup H)}{}_Hm_{y,A}^{(p-l)}\pi(z,\mathrm{d}y)+{}_Hm_{x,A}^{(1,p)}.$$

的最小非负解.

证明 由引理5和引理2.1(2)便得.

§3 补充与注记

本章的结果属于侯振挺、李俊平.

在本章中对过程 X 的假设条件(1.1),(1.2)的直观解释为:X 在每个 τ_n 的分布只与 X 在 τ_n 的左极限有关,而与过去无关.

8 马尔可夫骨架过程的稳定性

在马尔可夫过程的研究中,过程的常返性,遍历性,不变测度都是非常重要的问题.它们统称为过程的稳定性.自然在马尔可夫骨架过程的研究中,上述问题同样重要,进一步可以研究马尔可夫骨架过程的收敛速度包括强遍性,指数收敛,多项式收敛等重要问题.对马尔可夫骨架过程,这方面的研究才刚刚开始,在此,我们提出一些初步设想.

§1 马尔可夫骨架过程的常返性

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一完备概率空间.E是Polish空间,$\mathscr{B}E$是E上Borel σ-域.$X=\{X(t,\omega),0\leqslant t\leqslant(\omega)\}$为马尔可夫骨架过程.$P_x(\cdot)=P(\cdot\mid X(0)=x)$.

对每个可测集$A\in E$,令

$$\sigma_A=\inf\{t\geqslant 0:X_t\in A\},\quad \eta_A=\int_0^{+\infty}I_{(X_t\in A)}\mathrm{d}t.$$

一个马尔可夫骨架过程称为φ-不可约.如果对σ-有限测度φ.我们有

$$\varphi(B)>0\Rightarrow E_X[\eta_B]>0,\ \forall x\in X.$$

测度φ称为过程$X(t)$的不可约测度.

定义1 称马尔可夫骨架过程X是常返的,如果对某个σ-有限测度φ,当$\varphi(A)>0$时,我们有

$$P_x(\sigma_A<\infty)=1.$$

在讨论马尔可夫骨架过程的常返性时，不妨设 $\tau(\omega) = +\infty$，这时．由定理 1.2.1 知，骨架时序列 $\tau_n, n = 0,1,2,\cdots$，满足对 $\forall \omega \in \Omega$

$$\tau_0(\omega) < \tau_1(\omega) < \cdots < +\infty.$$

$$\tau_n(\omega) \uparrow +\infty.$$

设 $X_n(\omega) = X(\tau_n(\omega))$．则 $X_n(\omega)$ 是离散时间马氏链．记

$$\sigma_A' = \inf\{n: X_n(\omega) \in A\}, \quad \eta_A' = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{X_n \in A}.$$

定义 2 称离散时间马氏链 X_n 常返的，如果对某个 σ－有限测度 φ，每当 $\varphi(A) > 0$ 时，我们有

$$P_x(\sigma_A' < \infty) \equiv 1$$

由定义 1 和定义 2 易证．

命题 1 若 X_n 常返，则 X 常返．

设 X 为(H,Q)过程，即定义 1.3.1 所定义正规马氏骨架过程，令

$$q(x,A) = \lim_{t\to\infty} q(x,t,A).$$

命题 2 设 X 为(H,Q)过程，存在 σ－有限测度 φ，每当 $\varphi(A) > 0$时有

$$U(x,A) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n(x,A) = +\infty,$$

其中

$$q^n(x,A) = \int q(x,\mathrm{d}y) q^{n-1}(y,A).$$

则 X 是常返．

证明 若命题 2 条件满足，则由 S P Meyn 和 R L Tweedie[2] 知 X_n 常返，再由命题 1 知，命题 2 成立．

推论 一切满足 $q(E) = 1$ 的广义 Doob 过程是常返的．

证明 因为

$$U(x,A) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n(x,A) = q(A) \sum_{n=0}^{\infty} q^n(E) = +\infty.$$

由命题 2，X 是常返的．

§2 补充与注记

本章结果属于张汉君.

第 2 篇

马尔可夫型骨架过程

9 马尔可夫骨架过程成为马尔可夫过程的条件

§1 引言

马尔可夫骨架过程放弃了马尔可夫过程在任一停时具有马尔可夫性这一限制性条件，但保留了在一列单调增加的停时具有马尔可夫性．现在提一个相反的问题：对于一个马尔可夫骨架过程，再加上什么样的条件就成为一个马尔可夫过程呢？本章就来讨论这个问题．

设 $X = \{X(t,\omega),\omega \in \Omega, t < \tau(\omega)\}$ 是定义于概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，取值于 Polish 空间$(E,\mathscr{E})$上的一个齐次马尔可夫骨架过程，$\mathscr{F}_t = \sigma(\hat{X}_s, s \leqslant t)$的完备化，$t \geqslant 0$．$\tau_n, n = 0,1,2,\cdots$ 是 X 的一个骨架时序列．

记 $X_n(t) = X(\tau_n + t), 0 \leqslant t < \tau_{n+1} - \tau_n, X_n = \{X_n(t), 0 \leqslant t < \tau_{n+1} - \tau_n\}, n = 0,1,2,\cdots$，记 $h(x,t,A) = P(X_t \in A, t < \tau \mid X_0 = x), x \in E, A \in \mathscr{E}, t \geqslant 0$，是子过程 X_0 的条件概率．

假设 $h(x,t,A)$ 满足以下条件：对任意$(x,t) \in E \times [0,\infty)$，$h(x,t,\cdot)$是$(E,\mathscr{E})$上测度．对任意固定的 $A \in \mathscr{E}, h(\cdot,\cdot,A)$ 是(x,t)的二元可测函数．

§2 马尔可夫骨架过程成为马尔可夫过程的条件

首先,我们给出一个齐次马尔可夫骨架过程是一个马尔可夫过程的必要条件.

定理1 设 $X = \{X(t), t < \tau\}$ 是一齐次马尔可夫骨架过程,$\tau_n, n = 0,1,2,\cdots$ 是一骨架序列.$\theta_t, t \geqslant 0$ 是推移算子,假设 τ_1 满足条件:对 $\forall t \geqslant 0, \{\tau_1 > t\} \subseteq \{\theta_t\tau_1 = \tau_1 - t\}$ 若 X 是一马尔可夫过程,则

1) X_n 是马尔可夫过程,$n = 0,1,2,\cdots$

2) 存在 $q(x,t,A): E \times [0,\infty) \times \mathscr{E} \to [0,\infty)$ 的函数,满足条件:对于任意固定的 $A \in \mathscr{E}, q(\cdot,\cdot,A)$ 是二元可测的;对任意固定的$(x,t), q(x,t,\cdot)$ 是$(E,\mathscr{E})$ 上测度,且

$$P(X_{\tau_1} \in A, \tau_1 \leqslant t \mid \sigma(X_s, s \leqslant u)) I_{\{u<\tau_1\}} =$$

$$q(X_u, t-u, A) I_{\{u<\tau_1\}}.$$

定理1告诉我们,若马尔可夫骨架过程 X 是一个马尔可夫过程,则将其骨架时刻 τ_n 视为过程的起点后,过程以后的运动还是按马尔可夫过程的规律运动到下一骨架时刻 τ_{n+1},然后继续如此运动.

下面的定理2则给出了一个马尔可夫骨架过程成为马尔可夫过程的充分条件.

定理2 若 X 是齐次马尔可夫骨架过程,且以下条件成立:

(Ⅰ) X_0 是一齐次马尔可夫过程,且 $h(x,t,A)$ 关于 x 连续;

(Ⅱ) 存在定义于 $E \times [0,\infty) \times \mathscr{E}$ 上非负实值函数 $q_1(x,t,A)$ 使得:对任意固定的 $t \in [0,\infty), x \in E$,是$(E,\mathscr{E})$ 上测度;对任意固定的 $A \in \mathscr{E}$,是(x,t) 的二元可测函数,且是 x 的连续函数,以及下式成立.

$$P(X_{\tau_1} \in A, \tau_1 \leqslant t \mid \sigma(\hat{X}_s, s \leqslant u)) I_{\{u<\tau_1\}} =$$

$$q(X_u, t-u, A) I_{\{u<\tau_1\}}, 0 \leqslant u < t, A \in \mathscr{E}.$$

则 X 是一齐次马尔可夫过程,其转移概率函数为

$$P(x,t,A) = h(x,t,A) + \int_E \int_0^t \left[\int_E \int_0^{t-v} h(y, t-v-u_1, A) \tilde{P}(y, \mathrm{d}y, \mathrm{d}u_1) \right] \cdot q(x, \mathrm{d}v, \mathrm{d}y). \tag{1}$$

其中 $\tilde{P}(y,A,B) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(y,A,B)$, $P^{(k)}$ 是马尔可夫过程, $Y_n = (X_{\tau_n}, \tau_n), n = 0,1,2,\cdots$,的 k 步转移概率.

定理3 若 X 是一齐次马尔可夫骨架过程, $\tau_n, n = 0,1,\cdots$ 是其一骨架时序列,满足条件:对 $\forall t \geqslant 0, \{\tau > t\} \subseteq \{\theta_t \tau = \tau - t\}$,记

$$\tilde{X}(t) = \begin{cases} X(t) & t < \tau_1, \\ X_{\tau_1} & t \geqslant \tau_1. \end{cases}$$

若 $\tilde{X}(t)$ 是一 Feller 过程,则 X 是一马尔可夫过程.

若 E 是离散状态空间,具有离散拓扑,则下面定理成立.

定理4 若 X 是一具有离散状态空间的齐次马尔可夫骨架过程, $\tau_n, n = 0,1,2,\cdots$ 为其一骨架时序列,满足条件:对 $\forall t \geqslant 0$, $\{\tau_1 > t\} \subseteq \{\theta_t \tau_1 = \tau_1 - t\}$,则 X 是一齐次马尔可夫过程的充要条件是定理 2 中条件(Ⅰ),(Ⅱ)成立.

令

$$F(x,t) = P(\tau_1 > t \mid X(0) = X)$$

定理5 设齐次马尔可夫骨架过程 $X = (X(t) t < \tau)$ 又是齐次马尔可夫过程.若对任一 $x \in E$ 有

$$F(x,t) = F(t),$$

则 $F(t)$ 服务负指数分布,即存在常数 $\lambda \geqslant 0$,使

$$F(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ \mathrm{e}^{-\lambda t}, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

§3 若干引理

本节给出证明 §2 中定理所需的一些引理.

引理 1 若 X 是一马尔可夫过程,$\{\mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ 为一 σ 域流. τ_1 是一 $\{\mathscr{F}_t, t \geqslant 0\}$ 停时,且对 $\forall t \geqslant 0$ 有 $\{\tau_1 > t\} \subset \{\theta_t \tau_1 = \tau_1 - t\}$. 则对 $\forall (x, t, A) \in E \times [0, \infty) \times \mathscr{E}$ 有

$$P(X_{\tau_1} \in A, \tau_1 \leqslant t \mid \sigma(X_s, s \leqslant u)) I_{(u < \tau_1]} =$$

$$q(X_u, t - u, A) I_{[u < \tau_1]}.$$

证明 由定义 1.1.2 后的叙述知 $q(x, t, A)$ 是存在的,往证上面等式成立.

设 $f(x)$ 是定义于 E 上的任意固定的 $\mathscr{E}$ 可测有界连续函数,则对 $\forall t \geqslant 0$ 有

$$\mathbf{E}[f(X_{\tau_1}) I_{[\tau_1 \leqslant t]} \mid \sigma(X_s, s \leqslant u)] I_{[u < \tau_1]} =$$

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{2^k - 1} \mathbf{E}[f(X_{u + \frac{i+1}{2^k}(t-u)}) I_{[u + \frac{i}{2^k}(t-u) < \tau_1 \leqslant \frac{i+1}{2^k}(t-u) + u]} \cdot$$

$$\mid \sigma(X_s, s \leqslant u)] I_{[u < \tau_1]} =$$

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=0}^{2^k - 1} \mathbf{E}[f(X_{\frac{i+1}{2^k}(t-u)}) I_{[\frac{i(t-u)}{2^k} < \tau_1 \leqslant \frac{i+1}{2^k}(t-u)]} \cdot$$

$$\mid X_u] I_{[u < \tau_1]} =$$

$$\mathbf{E}[f(X_{\tau_1}) I_{[0 \leqslant \tau_1 \leqslant t-u]} \mid X_u] I_{[u < \tau_1]} =$$

$$\int_{[0, t-u] \times E} f(y) q(X_u, \mathrm{d}s, \mathrm{d}y) I_{[u < \tau_1]}.$$

对任意 $A \in \mathscr{E}$,取 $\mathscr{E}$ 可测有界连续函数列 f_n,使得 $f_n \xrightarrow{\text{a.e}} I_A$,则由有界收敛定理可得:

$$P(X_{\tau_1} \in A, \tau_1 \leqslant t \mid \sigma(X_s, s \leqslant u)) I_{(u < \tau_1]} =$$

$$q_1(X_u, t - u, A) I_{[u < \tau_1]}.$$

引理2 若 X 是齐次马尔可夫骨架过程,则对 $\forall A \in \mathscr{E}, t \geq 0$,有

$$P(X_t \in A, \tau_m \leq t < \tau_{m+1} \mid \mathscr{F}_{\tau_m}) = h(X_{\tau_m}, t - \tau_m, A) I_{[\tau_m \leq t]}.$$

证明 对任一 $f \in b_c\mathscr{E}$, $t \geq 0$,

$$\mathbf{E}[f(X_t) I_{[\tau_m \leq t < \tau_{m+1}]} \mid \mathscr{F}_{\tau_m}] =$$

$$\sum_{i=0}^{2^k-1} \mathbf{E}[f(X_t) I_{[\frac{it}{2^k} \leq \tau_m < \frac{i+1}{2^k}t]} I_{[t-\tau_m < \tau_{m+1}-\tau_m]} \mid \mathscr{F}_{\tau_m}] +$$

$$\mathbf{E}[f(X_{\tau_m}) I_{[\tau_m = t]} I_{[\tau_{m+1}-\tau_m > 0]} \mid \mathscr{F}_{\tau_m}] =$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{2^k-1} \mathbf{E}[f(X_{\tau_m + t - \frac{it}{2^k}}) I_{[t-\frac{it}{2^k} < \tau_{m+1}-\tau_m]} \mid \mathscr{F}_{\tau_m}] I_{[\frac{it}{2^k} \leq \tau_m < \frac{i+1}{2^k}t]} +$$

$$f(X_{\tau_m}) \mathbf{E}[I_{[\tau_{m+1}-\tau_m > 0]} \mid \mathscr{F}_{\tau_m}] I_{[\tau_m = t]} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{2^k-1} \mathbf{E}_{X_{\tau_m}} f(X_{t-\frac{it}{2^k}}) I_{[t-\frac{it}{2^k} < \tau_1]} I_{[\frac{it}{2^k} \leq \tau_m < \frac{i+1}{2^k}t]} +$$

$$\mathbf{E}_{X_{\tau_m}} f(X_0) I_{[\tau_1 > 0]} I_{[\tau_m = t]} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{E}_{X_{\tau_m}} [\sum_{i=0}^{2^k-1} f(X_{t-\frac{it}{2^k}}) I_{[t-\frac{it}{2^k} < \tau_1]} I_{[\frac{it}{2^k} \leq s < \frac{i+1}{2^k}t]} +$$

$$f(X_0) I_{[\tau_1 > 0]} I_{[t=s]}] \mid_{s=\tau_m} =$$

$$\mathbf{E}_{X_{\tau_m}} [f(X_{t-s}) I_{[t-s < \tau_1]} I_{[s<t]} + f(X_0) I_{[\tau_1 > 0]} I_{[t=s]}] \mid_{s=\tau_m} =$$

$$\mathbf{E}_{X_{\tau_m}} f(X_{t-s}) I_{[t-s < \tau_1]} I_{[s<t]} \mid_{s=\tau_m}. \tag{3}$$

由(3)式,即可证明引理2的成立.

引理3 若 X 是一齐次马尔可夫骨架过程,X_0 是一齐次马尔可夫过程,定理2.2中条件(ii)成立,则对 $\forall A \in \mathscr{E}, t > s \geq 0$,有

$$P(X_{\tau_{n+1}} \in A, \tau_{n+1} \leq t \mid \sigma(\mathscr{F}_s \cap (\tau_n \leq s < \tau_{n+1}))) I_{[\tau_n \leq s < \tau_{n+1}]} =$$

$$q(X_s, A \times [0, t-s]) I_{[\tau_n \leq s < \tau_{n+1}]}.$$

证明 对任给的非负实数 $0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_k < s < t$, $f_i \in b_c\mathscr{E}, i = 1,2,\cdots,k, f_s, g, f \in b_c\mathscr{E}$,我们有

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(\lambda_{s_i})f_s(\lambda_s)f(\lambda_{\tau_{n+1}})I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]}g(\tau_{n+1}) =$$

$$\sum_{j=1}^{k}\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i})f_s(X_s)f(X_{\tau_{n+1}})g(\tau_{n+1})I_{[s_{j-1} < \tau_n \leqslant s_j < s < \tau_{n+1}]} +$$

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i})f_s(X_s)f(X_{\tau_{n+1}})I_{[0=\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]}g(\tau_{n+1}) +$$

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i})f_s(X_s)f(X_{\tau_{n+1}})g(\tau_{n+1})I_{[s_k < \tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]}. \tag{4}$$

又

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i})f_s(X_s)f(X_{\tau_{n+1}})I_{[\tau_n=0]}I_{[s<\tau_{n+1}]}g(\tau_{n+1}) =$$

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{\tau_n+s_i})f_s(X_{\tau_n+s})f(X_{\tau_{n+1}})I_{[\tau_n=0]}I_{[s<\tau_{n+1}]}g(\tau_{n+1}) =$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}(\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{\tau_n+s_i})f_s(X_{\tau_n+s})f(X_{\tau_{n+1}}) \cdot$$

$$I_{[s<\tau_{n+1}-\tau_n]}g(\tau_{n+1}-\tau_n) \mid \mathscr{F}_{\tau_n}]I_{[\tau_n=0]} =$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}_{X_{\tau_n}}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i})f_s(X_s)f(X_{\tau_1})I_{[s<\tau_1]}g(\tau_1)]I_{[\tau_n=0]} =$$

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}_{X_{\tau_n}}\mathbf{E}_{X_{\tau_n}}[\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i})f_s(X_s)f(X_{\tau_1})I_{[s<\tau_1]} \cdot$$

$$g(\tau_1) \mid \sigma(X_u, u \leqslant s)]\}I_{[\tau_n=0]} =$$

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}_{X_{\tau_n}}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i})f_s(X_s)\int_{[s,\infty)\times E} f(y)g(u) \cdot$$

$$q(X_s, \mathrm{d}(u-s), \mathrm{d}y)I_{[s<\tau_1]}\}I_{[\tau_n=0]} =$$

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}[\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{\tau_n+s_i})f_s(X_{\tau_n+s})\int_{[s,\infty)\times E} f(y) \cdot$$

$$g(u)q(X_s, \mathrm{d}(u-s), \mathrm{d}y)I_{[s<\tau_{n+1}-\tau_n]} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}]\}I_{[\tau_n=0]} =$$

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i}) f_s(X_s) \int_{[s,\infty)\times F} f(y) g(u) \cdot$$

$$q(X_s, \mathrm{d}(u-s), \mathrm{d}y) I_{[\tau_n=0]} I_{[s<\tau_{n+1}]} \cdot \qquad (5)$$

记 $B_{jmv} = \{\omega \in \Omega, s_{j-1} + \frac{s_j - s_{j-1}}{2^m} v < \tau_n \leqslant s_{j-1} + \frac{s_j - s_{j-1}}{2^m}(v+1)\}$,

$A_{jmv} = \{\omega \in \Omega, s - s_{j-1} - \frac{s_j - s_{j-1}}{2^m} v < \tau_{n+1} - \tau_n\}$,

$a_{jmv} = s_{j-1} + \frac{s_j - s_{j-1}}{2^m} v, v = 0,1,2,\cdots,2^m - 1$,

$j = 1,\cdots,k, m = 1,2,\cdots$

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i}) f_s(X_s) f(X_{\tau_{n+1}}) I_{[s_{j-1}<\tau_n \leqslant s_j < s < \tau_{n+1}]} g(\tau_{n+1}) =$$

$$\sum_{v=0}^{2^m-1} \mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i}) f_s(X_s) f(X_{\tau_{n+1}}) I_{B_{jmv}} I_{[s<\tau_{n+1}]} g(\tau_{n+1}) =$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{v=0}^{2^m-1} \mathbf{E}\prod_{i=1}^{j-1} f_i(X_{s_i}) \prod_{i=j}^{k} f_i(X_{\tau_n + s_i - a_{jmv}}) f_s(X_{\tau_n + s - a_{jmv}}) f(X_{\tau_{n+1}}) \cdot$$

$$I_{B_{jmv}} I_{A_{jmv}} g(a_{jmv} + \tau_{n+1} - \tau_n). \qquad (6)$$

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{j-1} f_i(X_{s_i}) \prod_{i=j}^{k} f_i(X_{\tau_n + s_j - a_{jmv}}) f_s(X_{\tau_n + s - a_{jmv}}) I_{B_{jmv}} I_{A_{jmv}} \cdot$$

$$f(X_{\tau_{n+1}}) g(a_{jmv} + \tau_{n+1} - \tau_n) =$$

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{j-1} f_i(X_{s_i}) I_{B_{jmv}} \mathbf{E}[\prod_{i=j}^{k} f_i(X_{\tau_n + s_i - a_{jmv}}) f_s(X_{\tau_n + s - a_{jmv}}) \cdot$$

$$I_{A_{jmv}} f(X_{\tau_{n+1}}) g(a_{jmv} + \tau_{n+1} - \tau_n) \mid \mathscr{F}_{\tau_n}] =$$

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{j-1} f_i(X_{s_i}) I_{B_{jmv}} \mathbf{E}_{X_{\tau_n}} \prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i - a_{jmv}}) f_s(X_{s-a_{jmv}}) I_{(s-a_{jmv}<\tau_1]} \cdot$$

$$X(\tau_1) g(a_{jmv} + \tau_1) =$$

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{j-1} f_i(X_{s_i}) I_{B_{jmv}} \mathbf{E}_{X_{\tau_n}} \mathbf{E}_{X_{\tau_n}} [\prod_{i=j}^{k} f_i(X_{s_i - a_{jmv}}) f_s(X_{s-a_{jmv}}) \cdot$$

$$I_{[s-a_{jmv}<\tau_1]} f(X_{\tau_1}) g(a_{jmv} + \tau_1) \mid \sigma(X_u, u \leqslant s - a_{jmv})] =$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\prod_{i=1}^{j-1} f_i(X_{s_i}) I_{B_{jmw}} \mathbf{E}_{X_{\tau_n}} [\prod_{i=j}^{k} f_i(X_{s_i-a_{jmw}}) f_s(X_{s-a_{jmw}}) I_{(s-a_{jmw}<\tau_1]} \cdot \\
&\int_{[s-a_{jmw},+\infty)\times E} f(y) g(a_{jmw}+u) q(X_{s-a_{jmw}}, \mathrm{d}(u-s+a_{jmw}, \mathrm{d}y)) = \\
&\mathbf{E}\prod_{i=1}^{j-1} f_i(X_{s_i}) I_{B_{jmw}} \mathbf{E}_{X_{\tau_n}} [\prod_{i=j}^{k} f_i(X_{s_i-a_{jmw}}) I_{(s-a_{jmw}<\tau_1]} f_s(X_{s-a_{jmw}}) \cdot \\
&\int_{[s,\infty)\times E} f(y) g(v) q(X_{s-a_{jmw}}, \mathrm{d}(v-s), \mathrm{d}y) = \\
&\mathbf{E}\prod_{i=1}^{j-1} f_i(X_{s_i}) I_{B_{jmw}} \mathbf{E}[\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{\tau_n+s-a_{jmw}}) I_{(s-a_{jmw}<\tau_{n+1}-\tau_n]} f_s(X_{s-a_{jmw}+\tau_n}) \cdot \\
&\int_{[s,\infty)\times E} f(y) g(v) q(X_{s-a_{jmw}+\tau_n}, \mathrm{d}(v-s), \mathrm{d}y) \mid \mathscr{F}_{\tau_n}] = \\
&\mathbf{E}\prod_{i=1}^{j-1} f_i(X_{s_i}) \prod_{i=j}^{k} f_i(X_{\tau_n+s_i-a_{jmw}}) f_s(X_{s+\tau_n-a_{jmw}}) I_{A_{jmw}} \cdot \\
&\int_{E\times[s,+\infty)} f(y) g(v) q(X_{s-a_{jmw}+\tau_n}, \mathrm{d}(v-s), \mathrm{d}y).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

将(7)式代入(6)式得

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i}) f_s(X_s) I_{[s_{j-1}<\tau_n\leqslant s_j<s<\tau_{n+1}]} g(\tau_{n+1}) = \\
&\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i}) I_{(s_{j-1}<\tau_n\leqslant s_j<s<\tau_{n+1}]} f_s(X_s) \cdot \\
&\int_{[s,\infty)\times E} f(y) g(v) q(X_s, \mathrm{d}(v-s), \mathrm{d}y).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

同理可证

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i}) f_s(X_s) I_{[s_k<\tau_n\leqslant s<\tau_{n+1}]} g(\tau_{n+1}) = \\
&\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i}) f_s(X_s) I_{[s_k<\tau_n\leqslant s<\tau_{n+1}]} \int_{X[s,\infty)\times E} \cdot \\
&f(y) g(y) q(X_s, \mathrm{d}(v-s), \mathrm{d}y).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

将(5)、(8)和(9)式代入(4)式得

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i}) f_s(X_s) f(X_{\tau_{n+1}}) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} g(\tau_{n+1}) =$$

$$\mathbf{E}\prod_{i=1}^{k} f_i(X_{s_i}) f_s(X_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} \cdot$$

$$\int_{[s,\infty)\times E} f(y) g(v) q(X_s, \mathrm{d}(v-s), \mathrm{d}y). \tag{10}$$

由(10)式，可以证明引理 3 成立.

引理 4 若 X 是齐次马尔可夫骨架过程，X_0 是马尔可夫过程，则对任一 $A \in \mathscr{E}, t \geqslant 0$，自然数 n，有

$$P(X_t \in A, \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1} \mid \mathscr{F}_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$

$$h(X_s, t-s, A) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]},$$

引理 4 的证明方法基本类似于引理 3 的证明.

引理 5 若 X 是齐次马尔可夫骨架过程，则对子过程 $X_n = \{X(\tau_n + s), 0 \leqslant s < \tau_{n+1} - \tau_n\}$，$n = 0,1,2,\cdots$，有：

$$P(X_{\tau_n + s_i} \in A_i, i = 1,\cdots,k, 0 \leqslant s_i < \tau_{n+1} - \tau_n \mid X_{\tau_n} = x) =$$

$$P(X_{s_i} \in A_i, i = 1,\cdots,k, s_i < \tau_1 \mid X_0 = x).$$

对 $\forall A_i \in \mathscr{E}, i = 1,\cdots,k, s_i \in [0,\infty), i = 1,\cdots,k, k = 1,2,\cdots$ 成立.

证明 由齐次马尔可夫骨架过程的定义可得引理 5 成立.

§4 第二节定理的证明

定理 2.1 的证明 由 Dynkin[1] 定理 10.1 即知子过程 $X_0 = \{X(t), t < \tau_1\}$ 是马尔可夫过程，由引理 3.5 即知 $X_n = \{X(\tau_n + t), 0 \leqslant t < \tau_{n+1} - \tau_n\}$ 是马尔可夫过程，$n = 1,2,\cdots$.

由引理 3.1 即知定理 2.1 的(Ⅱ)成立.

定理 2.2 的证明 对任给的非负实数 $s < t, A \in \mathscr{E}$，我们有

$$P(X_t \in A \mid \mathscr{F}_s) =$$

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant m} P(X_t \in A, \tau_m \leqslant t < \tau_{m+1} \mid \mathscr{F}_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X_t \in A, \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1} \mid \mathscr{F}_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} P(X_t \in A, \tau_m \leqslant t < \tau_{m+1} \mid \mathscr{F}_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]}. \quad (1)$$

由严加安[1] 定理 1.21 及引理 3.4 知

$$P(X_t \in A, \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1} \mid \mathscr{F}_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$

$$P(X_t \in A, \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1} \mid \sigma(\mathscr{F}_s \cap$$

$$(\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}))) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$

$$h(X_s, t - s, A) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]}. \quad (2)$$

记 $P^{(k)}$ 为$(X_{\tau_n}, \tau_n), n = 0,1,2,\cdots$ 的 k 步转移概率,则对于 $m > n$,由严加安[1] 定理 1.21 及定理 1.1.1、引理 3.2、引理 3.3 知

$$P(X_t \in A, \tau_m \leqslant t < \tau_{m+1} \mid \mathscr{F}_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$

$$P(X_t \in A, \tau_m \leqslant t < \tau_{m+1} \mid \sigma(\mathscr{F}_s \cap$$

$$(\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}))) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$

$$\mathbf{E}[P(X_t \in A, \tau_m \leqslant t < \tau_{m+1} \mid \mathscr{F}_{\tau_m}) \mid \sigma(\mathscr{F}_s$$

$$\cap (\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}))] \cdot I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$

$$\mathbf{E}\{\mathbf{E}[h(X_{\tau_m}, t - \tau_m, A) I_{[\tau_m \leqslant t]} \mid \mathscr{F}_{\tau_{n+1}}] \mid \sigma(\mathscr{F}_s$$

$$\cap (\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}))\} \cdot I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$

$$\mathbf{E}[\int_{\mathbf{E}} \int_{\tau_{n+1}}^{t} h(y, t - u, A) P^{(m-n-1)}(X_{\tau_{n+1}}, \mathrm{d}(u - \tau_{n+1}), \mathrm{d}y) \mid$$

$$\sigma(\mathscr{F}_s \cap (\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}))] I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$

$$\int_{\mathbf{E}} \int_{s}^{t} [\int_{\mathbf{E}} \int_{r}^{t} h(y, t - u, A) P^{(m-n-1)}(z, \mathrm{d}(u - r), \mathrm{d}y)] \cdot$$

$$q(X_s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}(r - s)) \cdot I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$

$$\int_E \int_0^{t-s} \left[\int_E \int_{s+v}^{t} h(y,t-u,A) P^{(m-n-1)}(z,\mathrm{d}(u-v-s),\mathrm{d}y) \right] \cdot$$
$$q(X_s,\mathrm{d}v,\mathrm{d}z) \cdot I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} =$$
$$\int_E \int_0^{t-s} \left[\int_E \int_0^{t-s-v} h(y,t-s-v-u_1,A) P^{(m-n-1)}(z,\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}y) \right] \cdot$$
$$q(X_s,\mathrm{d}v,\mathrm{d}z) \cdot I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]}. \tag{3}$$

将(2)、(3) 代入(1) 右边得:

$$P(X_t \in A \mid \mathscr{F}_s) =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} h(X_s,t-s,A) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \int_E \int_0^{t-s} \int_E \int_0^{t-s-v} h(y,t-s-v-u_1,A) P^{(m-n-1)}(z,\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}y) \cdot$$
$$q(X_s,\mathrm{d}v,\mathrm{d}z) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} = h(X_s,t-s,A) +$$
$$\int_E \int_0^{t-s} \left[\int_E \int_0^{t-s-v} h(y,t-s-v-u_1,A) \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(z,\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}y) \right] \cdot$$
$$q(X_s,\mathrm{d}v,\mathrm{d}z) = h(X_s,t-s,A) +$$
$$\int_E \int_0^{t-s} \left[\int_E \int_0^{t-s-v} h(y,t-s-v-u_1,A) \tilde{P}(z,\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}y) \right]$$
$$q(X_s,\mathrm{d}v,\mathrm{d}z).$$

故 X 是一齐次马尔可夫过程,且其转移概率函数为:

$$\bar{P}(x,t,A) = P(X_t \in A \mid X_0 = x) = h(x,t,A) +$$
$$\int_E \int_0^t \left[\int_E \int_0^{t-v} h(y,t-v-u_1,A) \tilde{P}(z,\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}y) \right] q(x,\mathrm{d}v,\mathrm{d}z).$$

定理2.3的证明 由 $\tilde{X}$ 的马尔可夫性,仿 Dynkin[1] 定理10.1的证明可得过程 $X_0(t), t < \tau_1$ 是一齐次马尔可夫过程.取 $q_1(x,t,A)$ 为过程 $\tilde{X}(t), t \geqslant 0$的转移概率,由 Feller性知;对任意 $t \geqslant 0$, $E \to R$ 有界连续函数f,有$\int_E f(y) q_1(x,t,\mathrm{d}y)$ 是 x,t 的连续函数,仿引理3.4的证明可得引理3.4仍成立.再按定理2.2的证明方法可得定理2.3成立.

定理 2.4 的证明 注意到 E 是具有离散拓扑的离散空间,综合定理 2.1、定理 2.2 即得定理 2.4 成立.

定理 5 的证明 由定理中假设条件知,对任一 $x \in E, t \geq 0, s \geq 0$,我们有

$$F(t+s) = F(x, t+s) =$$
$$P(\tau_1 > t+s, \mid X(0) = x) =$$
$$P(x(t+s) \in E, \tau_1 > t+s) X(0) = x) =$$
$$\int P(x(t) \in dy, (\tau_1 > t) \mid X(0) = x) \cdot$$
$$P(x(t+s) \in E, \tau_1 > t+s \mid X(0) = x), x(t) = y) =$$
$$\int P(x(t) \in dy, \tau_1 > t) \mid X(0) = x) \cdot$$
$$P(x(s) \in E, \tau_1 > s \mid X(0) = y) =$$
$$\int P(x(t) \in dy, \tau_1 > t \mid X(0) = x) F(s) =$$
$$P(x(t) \in E, \tau_1 > t \mid X(0) = x) \cdot F(s) = F(t) \cdot F(s)$$

再由 $F(t)$ 的右连续性立得所证.

§ 补充与注记

本章结果属于刘万荣、刘再明和侯振挺.

10 马尔可夫型马尔可夫骨架过程的无穷小生成元

众所周知,在马尔可夫过程的研究中,其无穷小生成元是非常重要的工具.本章对构成马尔可夫过程的马尔可夫骨架过程的无穷小生成元加以研究.

§1 算子半群

定义 1 若齐次马尔可夫骨架过程 X,构成一个马尔可夫过程,则称 X 为马尔可夫型骨架过程.

定理 1 设 X 是一马尔可夫型骨架过程,$\tau_n, n = 0,1,2,\cdots$ 是其骨架时序列,$T_t, t \geqslant 0$ 是 X 的转移概率的算子半群.由定理9.2.1 知,子过程 $X_0 = \{X(t), t < \tau_1\}$ 是一马尔可夫过程.记$\{T'_t\}$ 是子过程 $X_0 = \{X(t), t < \tau_1\}$ 的转移概率算子半群,X, X_0 的转移概率分列记为 $P(x,t,A), P_1(x,t,A), q^{(n)}(x,\cdot,\cdot)$ 是离散时马尔可夫过程$(X_{\tau_n}, \tau_n), n = 0,1,2,\cdots$ 的 n 步转移概率:

$$q^{(n)}(x,t,A) = P(X_{\tau_n} \in A, \tau_n \leqslant t \mid X_0 = x).$$

记

$$q(x,t,A) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n)}(x,t,A).$$

则

$$T_t f(x) = \int_{(0,t]\times E} T'_{t-s} f(y) q(x, \mathrm{d}s, \mathrm{d}y) + T'_t f(x). \qquad (1)$$

证明

$$T_t f(x) = \mathbf{E}_x f(X_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_x f(X_t) I_{[\tau_n \leq t < \tau_{n+1}]}.$$

对 $f \in b_c \mathscr{E}, n \geq 1$ 时

$\mathbf{E}_x f(x_t) I_{[\tau_n \leq t < \tau_{n+1}]} =$

$\lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{2^m-1} \mathbf{E}_x f(X_t) I_{[\frac{it}{2^m} < t-\tau_n \leq \frac{i+1}{2^m}t]} I_{[\frac{i+1}{2^m}t < \tau_{n+1}-\tau_n]} + \mathbf{E}_x f(X_{\tau_n}) I_{[\tau_n = t]} =$

$\lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{2^m-1} \mathbf{E}_x f(X_{\tau_n + \frac{i+1}{2^m}t}) I_{[\frac{it}{2^m} < t-\tau_n \leq \frac{i+1}{2^m}t]} I_{[\frac{i+1}{2^m}t < \tau_{n+1}-\tau_n]} +$

$\mathbf{E}_x f(X_{\tau_n}) I_{[\tau_n = t]} =$

$\lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{2^m-1} \mathbf{E}_x I_{[\frac{it}{2^m} < t-\tau_n \leq \frac{i+1}{2^m}t]} \mathbf{E}[f(X_{\tau_n + \frac{i+1}{2^m}t})] I_{[\frac{i+1}{2^m}t < \tau_{n+1}-\tau_n]} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}] +$

$\mathbf{E}_x f(x_{\tau_n}) I_{[\tau_n = t]} =$

$\lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{2^m-1} \mathbf{E}_x I_{[\frac{it}{2^m} < t-\tau_n \leq \frac{i+1}{2^m}t]} \mathbf{E}_{x_{\tau_n}} f(X_{\frac{i+1}{2^m}t}) I_{[\frac{i+1}{2^m}t < \tau_1]} +$

$\mathbf{E}_x f(x_{\tau_n}) I_{[\tau_n = t]} =$

$\lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{2^m-1} \int_{[0,\infty) \times E} I_{[\frac{it}{2^m} < t-s \leq \frac{i+1}{2^m}t]} \mathbf{E}_y f(X_{\frac{i+1}{2^m}t}) I_{[\frac{i+1}{2^m}t < \tau_1]} q^{(n)}(x, \mathrm{d}s, \mathrm{d}y) +$

$\mathbf{E}_x f(X_{\tau_n}) I_{[\tau_n = t]} =$

$\int_{[0,\infty) \times E} \mathbf{E}_y \lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{2^m-1} f(X_{\frac{i+1}{2^m}t}) I_{[\frac{i+1}{2^m}t < \tau_1]} I_{[\frac{it}{2^m} < t-s \leq \frac{i+1}{2^m}t]} q^{(n)}(x, \mathrm{d}s, \mathrm{d}y) +$

$\mathbf{E}_x f(X_{\tau_n}) I_{[\tau_n = t]} =$

$\int_{[0,\infty) \times E} \mathbf{E}_y f(X_{t-s}) I_{[t-s < \tau_1]} I_{[0 < t-s \leq t]} q^{(n)}(x, \mathrm{d}s, \mathrm{d}y) +$

$\mathbf{E}_x f(x_{\tau_n}) I_{[\tau_n = t]} =$

$\int_{[0,\infty) \times E} \mathbf{E}_y f(X_{t-s}) I_{[t-s < \tau_1]} I_{[0 \leq s < t]} q^{(n)}(x, \mathrm{d}s, \mathrm{d}y) +$

$$\mathbf{E}_x f(X_{\tau_n}) I_{[\tau_n = t]} =$$

$$\int_{[0,\infty)\times E} T'_{t-s} f(y) I_{[0\leqslant s<t]} q^{(n)}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) +$$

$$\int_{[0,\infty)\times E} f(y) I_{[s=t]} q^{(n)}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) =$$

$$\int_{E\times(0,\infty)} T'_{t-s} f(y) I_{[0\leqslant s<t]} q^{(n)}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) =$$

$$\int_E \int_0^t T'_{t-s} f(y) q^{(n)}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).$$

$n=0$ 时，$\mathbf{E}_x f(X_t) I_{[0\leqslant t<\tau_1]} = T'_t f(X)$，

所以对 $\forall f \in b_c\mathscr{E}$，(1) 式成立.

对任一$(E,\mathscr{E})$上有界可测f，取$f_n \in b_c\mathscr{E}, n=1,2,\cdots, f_n \xrightarrow{\text{a.e}} f$，则由有界收敛定理即得：

$$T_t f(x) = \lim_{n\to\infty} T_t f_n(x) =$$

$$\lim_{n\to\infty} T'_t f_n(x) + \lim_{n\to\infty} \int_E \int_0^t T'_{t-s} f_n(y) q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) =$$

$$T'_t f(x) + \int_E \int_0^t T'_{t-s} f_n(y) q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).$$

§2　预解式

记

$$R_\lambda g = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T_t g \mathrm{d}t \quad R'_\lambda g = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} T'_t g \mathrm{d}t, \quad \lambda > 0.$$

定理 1　若 X 是可测马尔可夫型骨架过程，$\{\tau_n, n=0,1,2,\cdots\}$ 为其一骨架时序列，则

$$R_\lambda g(x) = R'_\lambda g(x) + \int_{E\times(0,\infty)} \mathrm{e}^{-\lambda s} R'_\lambda g(y) q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).$$

证明

$$
\begin{aligned}
& R_\lambda g = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t g \mathrm{d}t = \mathbf{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(x_t) \mathrm{d}t = \\
& \mathbf{E}_x \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\lambda t} g(X_t) \mathrm{d}t = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_x \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} e^{-\lambda t} g(X_t) \mathrm{d}t = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_{n+1}-\tau_n} e^{-\lambda s - \lambda \tau_n} g(X_{s+\tau_n}) \mathrm{d}s = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_x e^{-\lambda \tau_n} \mathbf{E}_{X_{\tau_n}} \int_0^{\tau_1} e^{-\lambda s} g(X_s) \mathrm{d}s = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_x e^{-\lambda \tau_n} R'_\lambda g(X_{\tau_n}) = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E \times (0,\infty)} e^{-\lambda s} R'_\lambda g(y) q^{(n)}(x, \mathrm{d}s, \mathrm{d}y) = \\
& \int_{[0,\infty) \times E} e^{-\lambda s} R'_\lambda g(y) q(x, \mathrm{d}s, \mathrm{d}y) + R'_\lambda g(x).
\end{aligned}
$$

§3 弱无穷小生成元

设 $\tilde{A}$，$\tilde{A}_1$ 分别为 X，X_0 的弱无穷小生成元，$D_{\tilde{A}}$，$D_{\tilde{A}_1}$ 分别为 $\tilde{A}$，$\tilde{A}_1$ 的定义域.

定理 1 若对于任意固定的 $x \in E$，$\frac{1}{t} q(x, t, \cdot)$，$t \geqslant 0$，作为 $(E, \mathscr{E})$ 上测度族，$t \to 0$ 时，弱收敛于 $(E, \mathscr{E})$ 上的某测度 $q'(x, \cdot)$，则 $D_{\tilde{A}} = D_{\tilde{A}_1}$ 且对 $\forall f \in D_{\tilde{A}}$ 有

$$\tilde{A} f = \tilde{A}_1 f + \int_E f(y) q'(x, \mathrm{d}y).$$

证明 由定理 1.1 知

$$\frac{1}{t}(T_t f(x) - f(x)) =$$

$$\frac{1}{t}[T'_t f(x) - f(x) + \int_E \int_0^t T'_{t-s} f(y) q(x, ds, dy)] =$$

$$\frac{1}{t}[T'_t f(x) - f(x)] +$$

$$\int_E \int_0^t [\frac{T'_{t-s} f(y) - f(y) + f(y)}{t}] q(x, ds, dy) =$$

$$\frac{1}{t}[T'_t f(x) - f(x)] + \int_E \int_0^t \frac{1}{t} f(y) q(x, ds, dy) +$$

$$\int_E \int_0^t \frac{t-s}{t}[\frac{T'_{t-s} f(y) - f(y)}{t-s} - \tilde{A}_1 f(y)] q(x, ds, dy) +$$

$$\int_E \int_0^t (1 - \frac{s}{t}) \tilde{A}_1 f(y) q(x, ds, dy), \tag{1}$$

因为

$$\frac{d^+ T'_t f(y)}{dt} = T'_t \tilde{A} f(y),$$

$$\| T'_t \| \leqslant 1,$$

所以

$$| \frac{d^+ T'_t f(y)}{dt} | \leqslant | \tilde{A} f(y) |,$$

$$\| T'_{t-s} f(y) - f(y) \| =$$

$$\| \int_0^{t-s} T_u \tilde{A}_1 f(y) du \| \leqslant \| \tilde{A}_1 f(y) \| (t-s).$$

故

$$\lim_{t \to 0^+} \int_E \int_0^{t_0} \frac{t-s}{t}[\frac{T'_{t-s} f(y) - f(y)}{t-s} -$$

$$\tilde{A}_1 f(y)] q(x, ds, dy) = 0. \tag{2}$$

对 $\forall t_0 > 0$,成立,又因为

$$\lim_{t \to 0^+} \int_E f(y) \frac{q(x, t, dy)}{t} = \int_E f(y) q'(x, dy), \tag{3}$$

而

$$\lim_{t\to 0^+}\int_E\int_0^t(1-\frac{s}{t})\tilde{A}_1 f(y)q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) =$$

$$\lim_{t\to 0^+}\int_E\int_0^1(1-\frac{s}{t})I_{[s\leq t]}\tilde{A}_1 f(y)q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)(\text{控制收敛定理}) =$$

$$\int_E\int_0^1\lim_{t\to 0^+}(1-\frac{s}{t})I_{[s\leq t]}\tilde{A}_1 f(y)q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) \tag{4}$$

等于 0.由(1) ~ (4) 式得

$$\lim_{t\to 0^+}[\frac{T_t f(x)-f(x)}{t}-\frac{T'_t f(x)-f(x)}{t}] =$$

$$\int_E f(y)q(x,\mathrm{d}y),$$

故

$$D_{\tilde{A}} = D_{\tilde{A}_1}.$$

且

$$\tilde{A}f(x) = \tilde{A}_1 f(x) + \int_E f(y)q(x,\mathrm{d}y),$$

记

$$\tilde{L}'_0 = \{f: w-\lim_{t\to 0}T'_t f = f\},$$

$w-\lim$ 表弱收敛.

定理 2 $D_{\tilde{A}} = \{R'_\lambda g + \int_{[0,\infty)\times E}\mathrm{e}^{-\lambda s}R'_\lambda g(y)q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y), g\in \tilde{L}'_0\}, \lambda > 0.$

证明 由定理 2.1 及 Dynkin[1] 定理 1.7 即得.

§4 强无穷小生成元

设 A, A' 分别为 X, X_0 的强无穷小生成元, D_A, D_A' 分别为 A, A' 的定义域.

定理 1 (i) 若对任一 $t\geq 0$,任意固定的 $x\in E$,作为$(E,\mathscr{E})$

上的测度族，$\frac{q(x,t,\cdot)}{t}$ 弱收敛于 $(E,\mathscr{E})$ 上的测度 $q'(x,\cdot)$，且收敛关于 x 是一致的.

(ii) $\lim\limits_{t\to0^+}\sup\limits_{x\in E}\mathbf{E}_x I_{[\tau_1\leq t]}=0$,

则 $D_A=D_{A'}$ 且

$$Af=A'f+\int_E f(y)q'(x,\mathrm{d}y).$$

证明　因为 $T_t f=T'_t f+\mathbf{E}_x f(X_t)I_{[t\geq\tau_1]}$

$$\|T_t f-T'_t f\|=\|\mathbf{E}_x f(X_t)I_{[t\geq\tau_1]}\|\leq$$
$$\|f\|\sup_{x\in E}\mathbf{E}_x I_{[t\geq\tau_1]}\xrightarrow{t\to0^+}0.$$

所以

$$\lim_{t\to0^+}\|T_t f-f\|=0\Leftrightarrow\lim_{t\to0^+}\|T'_t f-f\|=0.$$

又因

$$\left\|\frac{T_t f-T'_t f}{t}-\frac{1}{t}\int_E f(y)q(x,t,\mathrm{d}y)\right\|=$$
$$\left\|\frac{1}{t}\int_E\int_0^t(T'_{t-s}f(y)-f(y)q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\right\|\leq$$
$$\sup_{x\in E}\int_E\int_0^t\|T'_{t-s}f(y)-f(y)\|\frac{q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)}{t}.\tag{1}$$

因为 $\forall f\in D_A\cup D_{A'}$ 有

$$\lim_{t\to0^+}\|T'_t f(y)-f(y)\|=0,$$

所以

$$\lim_{t\to0^+}\left\|\frac{T_t f-T'_t f}{t}-\frac{1}{t}\int_E f(y)q(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\right\|\leq$$
$$\lim_{t\to0^+}\|T'_t f-f\|\lim_{t\to0^+}\sup_{x\in E}\frac{q(x,t,E)}{t}=$$
$$\lim_{t\to0^+}\|T'_t f-f\|q'(x,E)=0.$$

又因为

$$s\text{-}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}\int_E f(y)q(x,t,\mathrm{d}y) = \int Ef(y)q'(x,\mathrm{d}y),$$

所以 $D_A = D_{A'}$ 且

$$Af(x) = A_1 f(x) + \int_E f(y)q'(x,\mathrm{d}y).$$

§5　广义生成元

定义 1　设 $X = \{x(t), t < \tau\}$ 是一马尔可夫型骨架过程，$\mathscr{F}_t = \sigma(\hat{X}_s, s \leqslant t), t \in [0,\infty]$，令

$$D_{\bar{A}} = \{f \in \mathscr{B}, \text{使得对 } \forall x \in \mathbf{E}, \mathbf{E}_x\int_0^\tau |g(x_s)|\mathrm{d}s < \infty, \text{且 } M_t^g$$

$$= f(\hat{X}_{t\wedge\tau}) - f(x) - \int_0^{t\wedge\tau} g(\hat{X}_s)\mathrm{d}s, t \in [0,\infty] \text{ 是 } \mathscr{F}_t, t \geqslant 0 \text{ 鞅.}\}$$

若 $f \in D_{\bar{A}}$，g 是 $D_{\bar{A}}$ 定义中存在的与 f 相应的 g，定义 $\bar{A}f = g$，则称 $\bar{A}$ 为 X 的广义无穷小生成元.

若 $\tau_n, n = 0,1,2,\cdots$ 是马尔可夫型骨架过程 X 的一骨架时序列，记 $P_1(x,t,A)$ 为子过程 $X(t), t < \tau_1$ 的转移概率，$p^{(n)}(x,\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$ 为 $(X_{\tau_n}, \tau_n), n = 0,1,2,\cdots$ 的 n 步转移概率，$p^{(n)}(x,t,\mathrm{d}y) = \int_0^t p^{(n)}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)$，

$$\bar{p}(x,t,\mathrm{d}y) = p_1(x,t,\mathrm{d}y) + p^{(n)}(x,t,\mathrm{d}y).$$

令

$$C = \{g \in \mathscr{B}, \mathbf{E}_x\int_0^\tau |g(\hat{X}_s)|\mathrm{d}s < \infty,$$

且

$$\mathbf{E}_x\int_0^\tau g(X_s)\mathrm{d}s - \int_0^t\int_E g(y)p_1(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\mathrm{d}s -$$

$$\int_E \mathbf{E}_y \int_0^t g(X_s)\mathrm{d}s\tilde{P}(x,t,\mathrm{d}y) = 0, \quad \forall x \in E\},$$

$D = \{f \in \mathscr{C}$,存在 $g \in C$,使得 $f(x) = -\mathbf{E}_x\int_0^\tau g(X_s)\mathrm{d}s, f(b) = 0\}$.

定理 1 $D_A = D$

证明 因为 $\hat{X}_t, t \in [0,\infty]$ 是一马尔可夫过程,

所以 $M_t^f \in [0,\infty]$ 是鞅,当且仅当对 $\forall x \in E, t \in [0,\infty]$ 有

$$\mathbf{E}_x[f(\hat{X}_{t\wedge\tau}) - f(x) - \int_0^{t\wedge\tau} g(X_s)\mathrm{d}s] = 0.$$

若 $f \in D_A$,则有

$$\mathbf{E}_x[f(\hat{X}_\tau) - f(x) - \int_0^\tau g(X_s)\mathrm{d}s] = 0. \tag{1}$$

$$\mathbf{E}_x[f(X_{t\wedge\tau_1}) - f(x) - \int_0^{t\wedge\tau_1} g(X_s)\mathrm{d}s] = 0. \tag{2}$$

对 $\forall x \in E, t \in [0,\infty]$ 成立.

(1) 式即为

$$f(b) - f(x) - \mathbf{E}_x\int_0^\tau g(X_s)\mathrm{d}s = 0, \tag{3}$$

而

$$\mathbf{E}_x\int_0^\tau g(X_s)\mathrm{d}s =$$

$$\int_0^\infty \mathbf{E}_x g(X_s) I_{[s<\tau]\mathrm{d}s} =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \mathbf{E}_x g(X_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]\mathrm{d}s} =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \mathbf{E}_x \mathbf{E}_x[g(X_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}]\mathrm{d}s =$$

$$\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty [\int_{[0,s]\times E} \mathbf{E}_y g(X_{(s-u)\wedge\tau_1}) I_{[s-u<\tau_1]} p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)]\mathrm{d}s =$$

$$\sum_{n=0} \int_{[0,\infty)\times E} \mathbf{E}_y \int_u^\infty g(X_{s-u}) I_{[s-u<\tau_1]}\mathrm{d}s p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[0,\infty)\times E}\mathbf{E}_y\int_0^{\tau_1}g(X_r)\mathrm{d}rp^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{[0,\infty)\times E}\mathbf{E}_y[f(X_{\tau_1})-f(y)]p^{(n)}(x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}u)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\int_{[0,\infty)\times E}\int_{[0,\infty)\times E}f(z)p^{(1)}(y,\mathrm{d}v,\mathrm{d}z)p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)-$$

$$\int_{[0,\infty)\times E}f(y)p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)]=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\int_{[0,\infty)\times E}f(y)p^{(n+1)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)-$$

$$\int_{[0,\infty)\times E}f(y)p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)]=$$

$$-\int_{[0,\infty)\times E}f(y)p^{(0)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)=-f(x). \tag{4}$$

由(3)式得

$$f(b)=0. \tag{5}$$

由(2)式得

$$0=\mathbf{E}_x[f(X_{t\wedge\tau_1})-f(x)-\int_0^{t\wedge\tau_1}g(X_s)\mathrm{d}s]=$$

$$\mathbf{E}_x[-\mathbf{E}_{X_{t\wedge\tau_1}}\int_0^{\tau}g(X_s)\mathrm{d}s+\mathbf{E}_x\int_0^{\tau}g(X_s)\mathrm{d}s-\int_0^{t\wedge\tau_1}g(X_s)\mathrm{d}s]=$$

$$-\mathbf{E}_x[\mathbf{E}_{X_{t\wedge\tau_1}}\int_0^{\tau}g(X_s)\mathrm{d}sI_{[t<\tau_1]}+\mathbf{E}_{X_{t\wedge\tau_1}}\int_0^{\tau}g(X_s)\mathrm{d}sI_{[t\geq\tau_1]}]+$$

$$\mathbf{E}_x\int_0^{\tau}g(X_s)\mathrm{d}s-\mathbf{E}_x\int_0^{t\wedge\tau_1}g(X_s)\mathrm{d}s=$$

$$-\int_E\mathbf{E}_y\int_0^{\tau}g(X_s)\mathrm{d}sp_1(x,t,\mathrm{d}y)-$$

$$\int_E\mathbf{E}_y\int_0^{\tau}g(X_s)\mathrm{d}sp^{(1)}(x,t,\mathrm{d}y)+$$

$$\mathbf{E}_x\int_0^{\tau}g(X_s)\mathrm{d}s-\int_0^{t}\mathbf{E}_xg(X_s)I_{(s<\tau_1)}\mathrm{d}s=$$

$$
-\int_E \mathbf{E}_y \int_0^{\tau} g(X_s)\mathrm{d}s\tilde{p}(x,t,\mathrm{d}y) +
$$

$$
\mathbf{E}_x \int_0^{\tau} g(X_s)\mathrm{d}s - \int_0^t \int_E g(y) p_1(x,s,\mathrm{d}y)\mathrm{d}s. \tag{6}
$$

由(5)、(6)式知 $D_A \subset D$.

反之,若 $f \in D$,则

$$
f(x) = -\mathbf{E}_x \int_0^{\tau} g(X_s)\mathrm{d}s,
$$

从而对 $\forall t \in [0,\infty]$ 有

$$
\mathbf{E}_x \int_0^{t\wedge\tau} g(X_s)\mathrm{d}s = \int_0^t \mathbf{E}_x g(X_s) I_{[s<\tau]}\mathrm{d}s,
$$

所以

$$
\mathbf{E}_x\Big[f(\hat{X}_{t\wedge\tau}) - f(x) - \int_0^{t\wedge\tau} g(X_s)\mathrm{d}s\Big] =
$$

$$
\mathbf{E}_x\Big[\sum_{n=0}^{\infty} f(X_t) I_{[\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]} + f(\hat{X}_\tau) I_{[t\geqslant\tau]} - f(x) -
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t g(X_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]}\mathrm{d}s\Big] =
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\mathbf{E}_x f(X_t) I_{[\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]} - \mathbf{E}_x \int_0^t g(X_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]}\mathrm{d}s\Big] +
$$

$$
\mathbf{E}_x f(b) I_{[t\geqslant\tau]} - f(x) =
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\mathbf{E}_x\mathbf{E}_x\big[f(X_t) I_{[\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}\big] -
$$

$$
\int_0^t \mathbf{E}_x\mathbf{E}_x\big[g(X_s) I_{[\tau_n \leqslant s < \tau_{n+1}]} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}\big]\mathrm{d}s\Big\} - f(x) =
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\int_{(0,t]\times E} \mathbf{E}_y f(X_{t-u}) I_{[t-u<\tau_1]} p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y) -
$$

$$
\int_0^t \Big[\int_{(0,s]\times E} \mathbf{E}_y\big[g(X_{s-u}) I_{[s-u<\tau_1]} p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)\big]\mathrm{d}s\Big\} - f(x) =
$$

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\int_{(0,t]\times E} \mathbf{E}_y f(X_{(t-u)\wedge\tau_1}) I_{[t-u<\tau_1]} p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y) -
$$

$$\int_{[0,t]\times E}\mathbf{E}_y\left[\int_0^{t} g(X_{s-u})I_{[s-u<\tau_1]}\mathrm{d}s\,p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)\right] - f(x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\int_{[0,t]\times E}\mathbf{E}_y\Big[f(X_{(t-u)\wedge\tau_1}) - f(y) -$$

$$\int_0^{(t-u)\wedge\tau_1} g(X_s)\mathrm{d}s\Big]p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y) +$$

$$\int_{[0,t]\times E} f(y)p^{(n)}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) -$$

$$\int_{[0,t]\times E}\mathbf{E}_y f(X_{\tau_1})I_{[\tau_1\leqslant t-u]}p^{(n)}(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)\Big\} - f(x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\int_{E\times[0,t)} f(y)p^{(n)}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) -$$

$$\int_{E\times[0,t)} f(y)p^{(n+1)}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)\Big] - f(x) =$$

$$\int_{[0,t]\times E} f(y)p^{(0)}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) - f(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

所以 $f\in D_{\tilde{A}}$ 从而 $D_{\tilde{A}}\subset D$，故 $D_{\tilde{A}} = D$.

§6 补充与注记

本章结果属于刘万荣、刘再明和侯振挺.

第 3 篇

逐段决定马尔可夫骨架过程

11 逐段决定马尔可夫骨架过程

§1 引言

本章及下一章研究马尔可夫骨架过程的一个十分重要的特例——逐段决定马尔可夫骨架过程(见定义 1.4.3).粗略来讲,逐段决定马尔可夫骨架过程是指这样一类随机过程,存在一列随机或固定时刻,使得在这一列时刻具有马尔可夫性,而在诸相邻的两个这样的时刻之间的每一段中过程按决定性系统演化.

作为描写连续时间非扩散随机系统的一般模型,逐段决定马尔可夫骨架过程具有相当的普遍性,几乎涵盖了所有现存连续时间非扩散随机模型.所以说,逐段决定马尔可夫骨架过程是应用最广泛的一类马尔可夫骨架过程.

§2 逐段决定马尔可夫骨架过程

定理 1 马尔可夫骨架过程 $X = \{X(t,\omega), 0 \leq t < \tau\}$ 为逐段决定的,充要条件是过程的自然流 $F(X) = (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ 为离散型流:

$$\mathscr{F}_t = \bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leq t < \tau_{n+1}]) \cup (\mathscr{G}_\infty \cap [\tau \leq t]), t \geq 0, \tag{1}$$

其中，$(\tau_n)_{n\geq 0}$ 为马尔可夫骨架中的停时列.

证明　先证必要性，即首先证过程的自然流为离散型流. 回忆自然流的定义为

$$\mathscr{F}_t(X) = \sigma\{X_s, s \leqslant t\} = \sigma\{X_{s\wedge t}, s \geqslant 0\}, t \geqslant 0.$$

对每个 $n \geqslant 0$，我们有

$$\mathscr{F}_t(X) \cap [\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}] = \sigma\{X_{s\wedge t}, s \geqslant 0\} \cap [\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}].$$

因为在$[\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]$上，对所有 $s \geqslant 0$ 有

$$X_{s\wedge t} = \begin{cases} X_{s\wedge \tau_n}, & \text{若 } s < \tau_n; \\ \varphi_n(s \wedge t - \tau_n, X_{\tau_n}), & \text{若 } s \geqslant \tau_n. \end{cases}$$

由(1)式，显然

$$\mathscr{F}_{\tau_n} = \sigma\{X_{s\wedge\tau_n}, s \geqslant 0\} = \sigma(\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n), \quad n \geqslant 1.$$

又由于在$[\tau \leqslant t]$上，对所有 $s \geqslant 0$，有 $\hat{X}_{s\wedge t} = \hat{X}_{s\wedge\tau}$（注意，$\hat{X}_\tau = \Delta$），我们有

$$\mathscr{F}_t(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathscr{F}_{\tau_n} \cap [\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]) \cup (\mathscr{F}_\infty \cap [\tau \leqslant t]), \quad t \geqslant 0.$$

这便证明了 $F(X)$ 是离散型流.

下证充分性. 不妨假定过程是可选过程. 对任意定义在 E_Δ 上的有界 $\mathscr{E}_\Delta$ 可测函数 f，由定理 27.4.6 知，对每个 $n \geqslant 0$，存在过程 $Y^{(n)} = (Y^{(n)}(t,\omega), t \geqslant 0) \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+) \times \mathscr{F}_{\tau_n}$，使得

$$Y(t,\omega) := f(X(t,w)) = \sum_{n=0}^{\infty} Y^{(n)}(t,\omega) I_{[\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]}, t < \tau. \tag{2}$$

由 $\mathscr{F}_0 = \sigma(X_0)$ 知

$$X^{(0)}(t,\omega) \in \mathscr{B}(R_1) \times \sigma(X_0).$$

于是，对固定的 $t \geqslant 0$ 存在定义在 E 上的 $\mathscr{E}$- 可测函数 $g_0(t,x)$，使得

$$Y^{(0)}(t,\omega) = g_0(t, X_0). \tag{3}$$

而对任意 $t \geqslant 0$,由定义 1.1.1 中关于 τ_n 时刻的马尔可夫性的(C2)式,有

$$E(Y(\tau_n + t,\omega)I_{[0\leqslant t<\tau_{n+1}-\tau_n]} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) =$$
$$E(Y(\tau_n + t,\omega)I_{[0\leqslant t<\tau_{n+1}-\tau_n]} \mid X_{\tau_n}).$$

另一方面,由 $Y^{(n)}(t,\omega) \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+) \times \mathscr{F}_{\tau_n}$ 知

$$E(f(X(\tau_n + t,\omega))I_{[0\leqslant t<\tau_{n+1}-\tau_n]} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) =$$
$$E(Y^{(n)}(\tau_n + t,\omega)I_{[0\leqslant t<\tau_{n+1}-\tau_n]} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) =$$
$$Y^{(n)}(\tau_n + t,\omega)E(I_{[0\leqslant t<\tau_{n+1}-\tau_n]} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) =$$
$$Y^{(n)}(\tau_n + t,\omega)E(I_{[0\leqslant t<\tau_{n+1}-\tau_n]} \mid X_{\tau_n}).$$

最后一等式用到了事件$[0 \leqslant t < \tau_{n+1} - \tau_n] \in \sigma(X_u, u \geqslant \tau_n)$.于是

$$Y^{(n)}(\tau_n + t,\omega) =$$
$$\frac{E(f(X(\tau_n + t,\omega))I_{[0\leqslant t<\tau_{n+1}-\tau_n]} \mid X_{\tau_n})}{E(I_{[0\leqslant t<\tau_{n+1}-\tau_n]} \mid X_{\tau_n})}.$$

可见,$Y^{(n)}(\tau_n + t,\omega)$ 为 $\sigma(X_{\tau_n})$- 可测的.于是,对固定的时间 $t \in \mathbf{R}_+$,存在定义在 E 上的 $\mathscr{E}$- 可测函数 $g_n(t,x)$,使得

$$Y^{(n)}(\tau_n + t,\omega) = g_n(t, X_{\tau_n}), n \geqslant 1. \tag{4}$$

将(3)与(4)两式代入(2)式即得

$$f(X(t,\omega)) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t - \tau_n, X_{\tau_n})I_{[\tau_n\leqslant t<\tau_{n+1}]}, t < \tau(\omega). \tag{5}$$

于是,注意到过程的右连续性及 f 的任意性知,对每个 n,存在定义在 $\mathbf{R}_+ \times E$ 上取值于 E 的关于 t 右连续的 $\mathscr{B}(\mathbf{R}_+) \times \mathscr{E}$- 可测函数 $\varphi_n(t,x)$ 使得(1.4.13)式成立.充分性得证.

这就完成了定理 1 的证明.

定理 2 右连续随机过程 $X = \{X(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau\}$ 为逐段

决定马尔可夫骨架过程,必须且只需下面条件成立:

(i) 存在一列递增的非负随机变量序列$(\tau_n)_{n\geq 0}$且$\tau_0 = 0$, $\tau_n \uparrow \tau$.

(ii) 对每个$n \geq 0$,存在定义在$\mathbf{R}_+ \times E$上取值于E的关于t右连续$\mathscr{B}(\mathbf{R}_+) \times \mathscr{E}$可测函数$\varphi_n(t,x)$,使得

$$X(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t - \tau_n, X(\tau_n)) I_{[\tau_n \leq t < \tau_{n+1}]}, 0 \leq t < \tau. \quad (6)$$

(iii) 随机序列$(\eta_n)_{n\geq 0}$构成马尔可夫序列,且转移概率仅依赖于第二个分量.

证明 由定理27.4.1知,$\tau_n, n \geq 1$为停时,故只需证满足定理(i)、(ii)、(iii)的右连续过程X对任意定义在$E_\Delta^{[0,\infty)}$上的有界$\mathscr{E}_\Delta^{[0,\infty)}$-可测的函数$f$,定义1.1.1中的(C2)式成立.由(iii)知,对任意$n \geq 0$,σ代数$\mathscr{F}_{\tau_n} = \sigma(\eta_0, \cdots, \eta_n)$与$\sigma$代数$\sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \cdots)$关于$\sigma$代数$\sigma(X_{\tau_n})$条件独立.由定理1的证明过程并注意到

$$\hat{X}(\tau_n + t, \omega) =$$
$$\sum_{m=n}^{\infty} \varphi_m(\tau_n + t - \tau_m, X_{\tau_m}) I_{[\tau_m \leq \tau_n + t < \tau_{m+1}]} + \Delta I_{[\tau_n + t \geq \tau]},$$

对任意$t \geq 0$有$\hat{X}(\tau_n + t, \omega)$为$\sigma(\eta_n, \eta_{n+1}, \cdots)$可测的.由单调类定理立得所欲证.

引用§1.1中的记号φ_n, F_n, Q_n.

定义1 $\{\varphi_n, F_n, Q_n\}_{n\geq 0}$称为逐段决定马尔可夫骨架过程的三元特征列.

注意到$\varphi_n(t,x)$未必连续,当系统在$[\tau_n, \tau_{n+1})$上演化时亦可能有跳.为了区别这样按决定性运动的跳时刻与$\tau_n, n \geq 0$,我们称前者为确定跳时刻,称后者为随机跳时刻.特别地,称τ_n为第n个随机跳时刻.

下面定理3给出了齐次逐段决定马尔可夫骨架过程的刻画.

定理3 右连续随机过程$X = (x(t,\omega), 0 \leq t < \tau(\omega))$为齐次逐段决定马尔可夫骨架过程必须且只需下面条件成立

(i) 存在一列严格增的非负随机序列$(\tau_n)_{n\geq 0}$：$\tau_0 = 0$，$\tau_n \uparrow \tau$.

(ii) 存在定义于$\mathbf{R}_+ \times E$上取值于E的关于t右连续$\mathscr{B}(\mathbf{R}_+) \times \mathscr{E}$-可测函数$\varphi(x,t)$，使得

$$X(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(t-\tau_n, X(\tau_n)) I_{\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}}, 0 \leq t < \tau. \quad (7)$$

(iii) 随机序列$(\eta_n)_{n\geq 0}$构成状态空间为$(\mathrm{R}_+ \times E_\Delta, \mathscr{B}(\bar{\mathrm{R}}_+) \times \mathscr{E})$的齐次马尔可夫序列，且转移概率$P(\eta_{n+1} \in B \mid \eta_n) = P(\eta_{n+1} \in B \mid X_{\tau_n})(B \in \mathscr{B}(\bar{\mathrm{R}}_+) \times \mathscr{E}_\Delta)$与$\eta_n$的第一个分量$\sigma_n$独立.

证明　充分性由定理2立得.

往证必要性.由定理2只要证$\varphi_n(t,x)$，$F_n(x,\mathrm{d}t)$及$Q_n(x,t,\mathrm{d}y)$与n无关.事实上，由推论1.1.1知(iii)成立.于是齐次马尔可夫序列$(\eta_n)_{n\geq 0}$的转移函数$q_n(x,\mathrm{d}t,\mathrm{d}y) = q(x,\mathrm{d}t,\mathrm{d}y)$与$n$无关，故得$F_n$，$Q_n$与$n$无关.其次，由齐次马尔可夫骨架过程关于随机跳时刻的马尔可夫性§1.1中的(2′)知，对任意的n，从同一状态出发的两过程$(X(\tau_n+t), 0 \leq t < \tau)$与$X$有相同的分布.再由(iii)，$\sigma_{n+1}$与$\tau_1$同分布.进而，从同一状态出发的两过程$(X(t,\omega), 0 \leq t < \tau_1)$与$(X(\tau_n+t,\omega), 0 \leq t < \sigma_{n+1})$同分布.另一方面，$(X(t), 0 \leq t < \tau_1) = (\varphi_0(t,X_0), 0 \leq t < \tau_1)$，$(X(\tau_n+t), 0 \leq t < \sigma_{n+1}) = (\varphi_n(t,X_{\tau_n}), 0 \leq t < \sigma_{n+1})$.故得$\varphi_n(t,x) = \varphi_0(t,x)$与$n$无关.

推论1　逐段决定马尔可夫骨架过程成为齐次马尔可夫骨架过程的充分必要条件为逐段决定马尔可夫骨架过程的特征列$(\varphi_n, F_n, Q_n)_{n\geq 0}$满足：$(\varphi_n, F_n, Q_n) = (\varphi, F, Q)$与$n$无关.

我们称(φ, F, Q)为齐次逐段决定马尔可夫骨架过程的**三元特征**.

下面我们来考察几个熟知的逐段决定马尔可夫骨架过程的三元特征.

(i) **最小Q过程**.设$X = (x(t,\omega), 0 \leq t < \tau)$为取值于$E = Z_+$，$Q$矩阵为$Q = (q_{ij})$的最小$Q$过程(其中$\tau$为第一个飞跃点).

进一步假定 Q 是保守的,即 $\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i = -q_{ii}(i \in E)$.则

$$\varphi(t,i) = i, i \in E, t \in \mathbf{R}_+;$$

$$F(i,t) = e^{-q_i t}, i \in E, t \in \mathbf{R}_+;$$

$$Q(i,t\{i\}) = q(i,t,\{j\}) =$$

$$\frac{q_{ij}}{q_i},(i \neq j) i,j \in E, t \in \mathbf{R}_+;$$

$$Q(i,t\{i\}) = q(i,t,\{i\}) = 0, i \in E, t \in \mathbf{R}_+.$$

其中,$F(i,t) = F(i,(t,\infty])$.

(ii) **半马尔可夫过程**.设 $X = (X(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau)$ 为取值于 $E = \mathbf{Z}_+$,半马尔可夫矩阵为 $(F_{ij}(t))_{i,j\in E}$ 的半马尔可夫过程.我们知道,

$$F_{ij}(t) = P(x_{\tau_n} = j, \tau_n - \tau_{n-1} \leqslant t \mid x_{\tau_{n-1}} = i),$$

$$i,j \in E, t \in \mathbf{R}_+, n = 1,2,\cdots.$$

则

$$\varphi(t,i) = i, i \in E, t \in \mathbf{R}_+;$$

$$F(i,t) = 1 - \sum_j F_{ij}(t), i \in E, t \in \mathbf{R}_+;$$

$$q(i,t,\{j\}) = \frac{\mathrm{d}F_{ij}(t)}{\mathrm{d}(1 - F(i,t))}, i,j \in E, t \in \mathbf{R}_+.$$

其中,最后一等式右端理解为 Radon-Nikodym 导数.

(iii) **Davis的逐段决定过程(PDP)**.设 $X = (X(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau)$ 为取值于 $(E,\mathscr{E})$ 的 PDP.则 $\varphi(t,x)$ 为一局部 Lipschitz 连续向量场的流(flow).

又设 Γ 为流 φ 的流出边界.则

$$Q(x,t,B) = Q(\varphi(t,x),B), x \in E, t \in (0,c(x)], B \in \mathscr{E};$$

$$F(x,t) = \begin{cases} \exp\left(-\int_0^t \lambda(\varphi(u,x))\mathrm{d}u\right), & 0 \leqslant t < c(x); \\ 0, & t \geqslant c(x). \end{cases}$$

其中,$Q: E \cup \Gamma \to \mathscr{P}(E)$ 满足 $Q(x,\{x\}) = 0$;$c(x)$ 为从 x 出发沿

流 φ 运动首中边界的时刻($x \in E$).

§3 逐段决定过程的向后向前方程与正则性

从本节起,我们只研究齐次逐段决定马尔可夫骨架过程(简称为逐段决定过程).

设 $X = (X(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau)$ 为取值于 Polish 空间$(E,\mathscr{E})$的右连续逐段决定过程,具有三元特征(φ, F, Q),亦即

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(t-\tau, X_{\tau_n}) I_{[\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]}, 0 \leqslant t < \tau. \tag{1}$$

其中,

(i) $(\tau_n)_{n \geqslant 0}$ 为一列严格增的非负随机变量序列:$\tau_0 = 0$, $\tau_n \uparrow \tau$;

(ii) $\varphi(t,x)$ 为定义于 $\mathbf{R}_+ \times E$ 取值于$(E,\mathscr{E})$的关于 t 右连续 $\mathscr{B}(\mathbf{R}_+) \times \mathscr{E}$- 可测的函数;

(iii) $(F(x,\cdot))_{x \in E}$ 为分布族,$(Q(x,t,\cdot))_{(x,t) \in E \times \mathbf{R}_+}$ 为转移核,满足

$$P_x(\tau_{n+1} - \tau_n \in \mathrm{d}t \mid X_{\tau_n}) = F(X_{\tau_n}, \mathrm{d}t), P_x\text{-a.s.}$$

$$P_x(X_{\tau_{n+1}} \in \mathrm{d}x \mid X_{\tau_n}, \tau_{n+1} - \tau_n) =$$

$$Q(X_{\tau_{n+1}}, \tau_{n+1} - \tau_n, \mathrm{d}x), P_x\text{-a.s.}$$

我们来考虑一维分布的计算问题,即对任意 $x \in E, t \in \mathbf{R}_+$, $A \in \mathscr{E}$,计算

$$P(x,t,A) = P_x(x(t) \in A, t < \tau), \quad x \in E.$$

$$h(x,t,A) = F(x,t) I_{\varphi(\tau,x) \in A}$$

$$q(x,t,A) = \int_0^t q(x,\mathrm{d}t,A)$$

$$h_\lambda(x,A) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} h(x,t,A) \mathrm{d}t$$

$$q_\lambda(x,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} q(x,dt,A)$$

由定理1.2.1得

定理1 $P(x,t,A): x \in E, T \in \mathbf{R}_+, A \in \mathscr{E}$是非负线性方程

$$Z(x,t) = \int_E \int_{[0,t]} Z(y,t-u) q(x,du,dy) + h(x,t,A) \quad (2)$$

的最小非负解，等价地 $P_\lambda(x,A): x \in E, A \in E\mathscr{E}, \lambda \in \mathbf{R}_+$ 是非负线性方程

$$Z_\lambda(x,A) = \int_E q_\lambda(x,dy) Z_\lambda(y,A) + h_\lambda(x,A) \quad (3)$$

的最小非负解.

由定理1.2.2得

定理2 若存在非负可测 $\hat{q}_\lambda(\hat{q}_\lambda(x,A): x \in E, A \in \mathscr{E})$,使得

$$\int_E h_\lambda(x,dy) \hat{q}_\lambda(y,A) =$$

$$\int_E q_\lambda(x,dy) h_\lambda(y,A) \quad x \in E, A \in \mathscr{E},$$

则$(P_\lambda(x,A): x \in E, A \in E, \lambda \in \mathbf{R}_+)$是非负线性方程

$$Z_\lambda(x,A) = \int_E Z_\lambda(x,dy) \hat{q}_\lambda(y,A) + h_\lambda(x,A) \quad (4)$$

的最小非负解.

按 §1.2中定义方程(2),(3)和(4)分别是逐段决定马尔可夫骨架过程的向后和向前方程.

由定理1.3.2得

定理3 逐段决定过程 X 正则的充要条件是方程

$$\begin{cases} g(x) = \int_E q_\lambda(x,dy) g(y), x \in E, \lambda > 0, \\ 0 \leqslant g \in B_E \end{cases} \quad (5)$$

只有零解.

由定理1.3.4得

定理4 若

$$\sup_{x \in E} q_\lambda(x, E) < 1, \quad \lambda > 0, \tag{6}$$

则逐段决定过程 X 正则.

§4 首达时间的分布和矩

在第 7 章中我们研究了马尔可夫骨架过程的首达时间分布和矩,但本节的结果要直接推导,因为这里的过程未必满足(7.11)和(7.12).

本节的目的是考察逐段决定过程,$X = (X(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau(\omega))$,首达给定**状态闭集** $A \in \mathscr{E}$的时刻,

$$\tau_A(\omega) := \inf(t \geqslant 0, X(t,\omega) \in A), \tag{1}$$

的分布和均值.与(纯)跳跃过程不同,跳跃过程首达给定状态集的时刻只可能发生在(随机)跳跃时刻,而逐段决定过程则既可能发生在随机跳跃时刻,又可能发生在相邻随机跳跃时刻之间.

我们仍用 $\tau_n(n \geqslant 0)$ 记过程 X 的第 n 次随机跳时,同样地,$\sigma_n = \tau_n - \tau_{n-1}(n \geqslant 1)$.对 $x \notin A$,引入记号

$$f_n(x,t,A) := P_x(\tau_{n-1} < \tau_A \leqslant \tau_n \wedge t), n \geqslant 1; \tag{2}$$

$$f(x,t,A) := P_x(\tau_A \leqslant t). \tag{3}$$

显然,

$$f(x,t,A) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,t,A). \tag{4}$$

又记

$$t_*(x) := \inf(t \geqslant 0, \varphi(t,x) \in A). \tag{5}$$

引理 1 设 $x \notin A$.则

$$f_1(x,t,A) = F(x,t_*(x)) I_{[t_*(x) \leqslant t]} + q(x,(0,t_*(x) \wedge t],A), \tag{6}$$

$$f_{n+1}(x,t,A) = \int_{(0,t_*(x) \wedge t] \times A^c} q(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y) f_n(y,t-u,A). \tag{7}$$

其中,$F(x,t)=F(x,(t,+\infty))$.

证明 首先,注意到 A 为闭集以及过程 X 的右连续性,

$$
\begin{aligned}
f_1(x,t,A) &= P_x(0<\tau_A\leqslant\tau_1\wedge t)= \\
&P_x(0<\tau_A<\tau_1,\tau_A\leqslant t)+P_x(\tau_A=\tau_1\leqslant t)= \\
&P_x(\tau_1>t_*(x),t_*(x)\leqslant t)+ \\
&P_x(\tau_1\leqslant t_*(x)\wedge t,x_{\tau_1}\in A)= \\
&F(x,t_*(x))I_{[t_*(x)\leqslant t]}+q(x,(0,t_*(x)\wedge t],A).
\end{aligned}
$$

其次,对任意 $n\geqslant 1$,

$$
\begin{aligned}
&f_{n+1}(x,t,A)=P_x(\tau_n<\tau_A\leqslant\tau_{n+1}\wedge t)= \\
&P_x(0<\tau_1<t_*(x)\wedge t,X_{\tau_1}\in A^C;\tau_n<\tau_A\leqslant\tau_{n+1}\wedge t)= \\
&E_x(E[I_{[0<\tau_1\leqslant t_*(x)\wedge t,X_{\tau_1}\in A^C]}[I_{[\tau_n<\tau_A\leqslant\tau_{n+1}\wedge t]}\mid\mathscr{F}_{\tau_1}])= \\
&E_x(I_{[0<\tau_1\leqslant t_*(x)\wedge t,X_{\tau_1}\in A^C]}E[I_{[\tau_n<\tau_A\leqslant\tau_{n+1}\wedge t]}\mid\mathscr{F}_{\tau_1}])= \\
&E_x(I_{[0<\tau_1\leqslant t_*(x)\wedge t,X_{\tau_1}\in A^C]}E_{X_{\tau_1}}[I_{[\tau_{n-1}<\tau_A\leqslant\tau_n\wedge(t-u)]}]\mid_{u=\tau_1})= \\
&\int_{(0,t_*(x)\wedge t]\times A^C}q(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)P_y(\tau_{n-1}<\tau_A\leqslant\tau_n\wedge(t-u))= \\
&\int_{(0,t_*(x)\wedge t]\times A^C}q(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)f(y,t-u,A).
\end{aligned}
$$

其中,倒数第三个等号是由于逐段决定过程 X 关于时刻 τ_1 的马氏性.引理得证.

定理 1 $(f(x,t,A),x\in A^C,A\in\mathscr{E},t\in\mathbf{R}_+)$ 是方程

$$
\begin{aligned}
f(x,t,A) &= \int_{(0,t_*(x)\wedge t]\times A^C}q(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)f(y,t-u,A)+ \\
&F(x,t_*(x))I_{[t^*(x)\leqslant t]}+q(x,(0,t_*(x)\wedge t],A) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

的最小非负解,且可用(4),(6),(7) 式逐次逼近.

证明 注意到定理 27.2.2,方程(8) 的最小非负解总是存在唯一的.进而,又注意到(4) 式,由定理 27.2.9(第二逐步逼近法)及引理 1,即得结论.

令

$$f(x,A):=f(x,+\infty,A)=P_x(\tau_A<+\infty). \tag{9}$$

本节以下约定:$(0,t_*(x)]=(0,+\infty)$,当$t_*(x)=+\infty$时.

定理 2 $(f(x,A),x\in A^C,A\in\mathscr{E})$是方程

$$f(x,A)=\int_{(0,t_*(x)]\times A^C}q(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y)f(y,A)+$$

$$F(x,t_*(x))I_{[t_*(x)<+\infty]}+q(x,(0,t_*(x)],A), \tag{10}$$

的最小非负解.且可由下面(11),(12)式逐次逼近.

$$f_1(x,A)=$$

$$F(x,t_*(x))I_{[t_*(x)<+\infty])}+G(x,(0,t_*(x)],A), \tag{11}$$

$$f_{n+1}(x,A)=\int_{A^C}G(x,(0,t_*(x)],\mathrm{d}y)f_n(y,A). \tag{12}$$

证明 与定理1的证明类似.略去.

注 1 如若某保险风险模型的余额过程X为逐段决定过程,且取$A=(-\infty,0]$(此时状态空间$E=\mathbf{R}$),则$f(x,A)$即为初始准备金为x的破产概率.破产概率的求解与逼近是破产理论的主要研究课题.

推论 1 如若$t_*(x)=+\infty,x\in E$,则$(f(x,A),x\in A^C,A\in\mathscr{E})$是方程

$$f(x,A)=\int_{A^C}q(x,\mathrm{d}y)f(y,A)+q(x,A), \tag{13}$$

的最小非负解,且可由下面(14),(15)式逐次逼近.

$$f_1(x,A)=q(x,A), \tag{14}$$

$$f_{n+1}(x,A)=\int_{A^C}q(x,\mathrm{d}y)f_n(y,A). \tag{15}$$

其中,$q(x,\cdot)=q(x,(0,+\infty),\cdot),x\in E$.

证明 本推论为定理2的特殊情形.

注 2 $(q(x,\cdot),x\in E)$为嵌入链(x_{τ_n})的转移核:

$$q(x,B)=\int_0^\infty F(x,\mathrm{d}t)Q(x,t,B),B\in\mathscr{E}.$$

下面我们来考察，当 $f(x,A)>0$ 时，首达时刻 τ_A 的条件矩，

$$m_A^{(p)}(x):=E_x(\tau_A^p \mid \tau_A<+\infty), p=1,2,\cdots. \quad (16)$$

参见注1，如若保险风险模型的余额过程 X 为逐段决定过程，同样取 $A=(-\infty,0]$，这时 τ_A 称为破产时间.(16)式即，在有限时间内破产的假定下，破产时间的 p 阶矩.特别地，当 p 取1时，$m_A(x)=m_A^{(1)}$ 为平均破产时间.平均破产时间的求解与逼近亦是破产理论的主要研究课题之一.

同样设 A 为 $\mathscr{E}$ 中闭集，$x\in A^C$.对 $n\geqslant 1,p=1,2,\cdots$，记

$$\mu_A^{(n,p)}(x):=\int_{[0,+\infty)}t^p\mathrm{d}f_n(x,t,A), \quad (17)$$

$$\mu_A^{(p)}(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_A^{(n,p)}(x). \quad (18)$$

易见

$$m_A^{(p)}(x)=\mu_A^{(p)}(x)/f(x,A).$$

对任一 $B\in\mathscr{B}(0,+\infty)$，$q(x,B,\mathrm{d}y)\ll q(x,\mathrm{d}y)=q(x,(0,+\infty),\mathrm{d}y)$，故

$$q(x,B,\mathrm{d}y)=F(x,B,y)q(x,\mathrm{d}y),$$

其中，$q(x,B,\mathrm{d}y)$ 关于 $q(x,\mathrm{d}y)$ 的 Radon-Nikodym 导数 $F(x,B,y)$ 可取得，对固定的 $x,y\in E$，$F(x,\cdot,y)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的准概率测度；而对固定的 $B\in\mathscr{B}((0,+\infty))$，$F(\cdot,B,\cdot)$ 是 $\mathscr{E}\times\mathscr{E}$-可测的.又记

$$\mu_A^{(p)}(x,y):=\int_{[0,t_*(x)]}t^pF(x,\mathrm{d}t,y), \quad (19)$$

引理2

$$\mu_A^{(1,p)}(x)=F(x,t_*(x))[t_*(x)]^pI_{[t_*(x)<+\infty]}+\int_{(0,t_*(x)]}t^pq(x,\mathrm{d}t,A); \quad (20)$$

$$\mu_A^{(n+1,p)}(x)=\sum_{m=0}^{p}\int_{A^C}q(x,\mathrm{d}y)\mu_A^{(m)}(x,y)\mu_A^{(n,p-m)}(y). \quad (21)$$

证明 由引理1的(6)式，立得(20)式.

再由引理1的(7)式,

$$\mu_A^{(n+1,p)}(x) = \int_{(0,+\infty)} t^p \mathrm{d}f_{n+1}(x,t,A) =$$

$$\int_{(0,+\infty)} t^p \mathrm{d}[\int_{(0,t_a(x)\wedge t]\times A^C} G(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y) f_n(y,t-u,A) =$$

$$\int_{(0,+\infty)} t^p \mathrm{d}[\int_{A^C} q(x,\mathrm{d}y)\int_{(0,t_a(x)\wedge t]} F(x,\mathrm{d}u,y) f_n(y,t-u,A) =$$

$$\int_{A^C} q(x,\mathrm{d}y)\int_{(0,t_a(x)]} F(x,\mathrm{d}u,y) \times$$

$$\int_{(u,+\infty)} [u+(t-u)]^p \mathrm{d}f_n(y,t-u,A) +$$

$$\int_{A^C} q(x,\mathrm{d}y)\int_{(0,+\infty)} F(x,\mathrm{d}t,y) I_{[t\leqslant t_a(x)]} t^p f_n(y,0,A).$$

注意到$f_n(x,0,A) = 0$,上式最后一等号右端第二项为零.于是,

$$\mu_A^{(n+1,p)}(x) = \int_{A^C} q(x,\mathrm{d}y)\int_{(0,t_a(x)]} F(x,\mathrm{d}u,y) \times$$

$$\int_{(u,+\infty)} [u+(t-u)]^p \mathrm{d}f_n(y,t-u,A) =$$

$$\int_{A^C}\int_{(0,t_a(x)]} F(x,\mathrm{d}u,y) \times$$

$$\int_{(u,+\infty)} \sum_{m=0}^{p} C_p^m u^m (t-u)^{p-m} \mathrm{d}f_n(y,t-u,A) =$$

$$\sum_{m=0}^{p} C_p^m \int_{A^C}\int_{(0,t_a(x)]} F(x,\mathrm{d}u,y) u^m \int_{(0,+\infty)} v^{p-m} \mathrm{d}f_n(y,v,A) =$$

$$\sum_{m=0}^{p} C_p^m \int_{A^C} q(x,\mathrm{d}y) \mu_A^{(m)}(x,y) \mu_A^{(n,p-m)}(y).$$

这就证明了引理.

定理3 对$p \geqslant 1$,$\mu_A^{(p)}(x)$,$x \in A^C$是方程

$$X(x) = \int_{A^C} q(x,\mathrm{d}y)\mu^{(0)}(x,y)X(y) +$$

$$\sum_{m=1}^{p}\int_{A^C} q(x,\mathrm{d}y)\mu_A^{(m)}(x,y)\mu_A^{(p-m)}(y) +$$

$$F(x,t_*(x))[t_*(x)]^p I_{\{t_*(x)<+\infty\}} +$$

$$\int_{(0,t_*(x)]} t^p q(x,\mathrm{d}t,A).$$

的最小非负解.且可有(20),(21)及(18)式逐次逼近.

证明 注意到(18)式,由定理27.2.9(第二逐步逼近法)及引理2,即得结论.

§5 成为马尔可夫过程的充要条件

我们看到,齐次逐段决定马尔可夫骨架过程的演变由三个因素决定.一是两个相邻的随机跳时之间过程按 φ 作决定性运动;二是两个相邻随机跳时之间的时间区间长度由分布族 $F(x,\mathrm{d}t)$ 决定;三是跳转移由 $Q(x,t,\mathrm{d}y)$ 决定.令随机系统建模工作者关注的问题是,何时逐段决定马尔可夫骨架过程成为马尔可夫过程.下面定理给出了齐次逐段决定马尔可夫骨架过程成为(强)马尔可夫过程的充分必要条件.

定理1 设 $X=(X(t,\omega),0\leqslant t<\tau)$ 为齐次逐段决定马尔可夫骨架过程,具有三元特征(φ,F,Q).则 X 为齐次(强)马尔可夫过程的充分必要条件是,对任意 $x\in E;s,t\in\mathbf{R}_+,s+t\in(0,c_*(x))$,

(i) $\varphi(t,x)$ 为 E 上的半动力系统,即 $\varphi(t,x)$ 满足

$$\varphi(0,x)=x;\varphi(t,\varphi(s,x))=\varphi(s+t,x);\tag{1}$$

(ii) 生存函数 $F(x,t)$ 满足函数方程

$$F(x,t+s)=F(x,t)\cdot F(\varphi(t,x),s);\tag{2}$$

(iii) 转移核 $Q(x,t,\mathrm{d}y)$ 满足

$$Q(x,t+s,\mathrm{d}y)=Q(\varphi(t,x),s,\mathrm{d}y);\tag{3}$$

其中 $F(x,t)=F(x,(t,\infty]),c_*(x)=\inf\{t:F(x,t)=0\}$.

注1 1) φ 为 E 上的半动力系统的要求几乎等价于没有要

求.原因在于 φ 描写的是系统在两个随机跳间的决定性运动,而可以充当这种描写系统决定性因果关系的工具应当满足半动力系统的两条件.2) F 为系统沿 φ 作决定性运动的生存时间的分布.

证明 往证必要性.

首先证(ii).对任意 $x \in E, t \in [0, c_*(x))$ 及 $s \geqslant 0$,我们有

$$
\begin{aligned}
&F(x, t+s) = P_x(\tau_1 > t+s) = \\
&P_x(\tau_1 > t) P_x(\tau_1 > t+s \mid \tau_1 > t) = \\
&F(x,t) E_x(P_x(\tau_1 > t+s \mid \mathscr{F}_t) \mid \tau_1 > t) = \\
&F(x,t) E_x(P_x(\tau_1 > t+s \mid X_\tau) \mid \tau_1 > t) = \\
&F(x,t) E_x(P_{X_{\tau_1}}(\tau_1 > s) \mid \tau_1 > t) = \\
&F(x,t) E_x(P_{\varphi(t,x)}(\tau_1 > s) \mid \tau_1 > t) = \\
&F(x,t) E_x(F(\varphi(t,x), s) \mid \tau_1 > t) = \\
&F(x,t) F(\varphi(t,x), s).
\end{aligned}
$$

其次证(i).令

$$
\alpha_t = \begin{cases} 1, & t < \tau_1; \\ 0, & t \leqslant \tau_1. \end{cases}
$$

则由(ii)及 τ_1 为第一个随机跳时刻知,$(\alpha_t)_{t \geqslant 0}$ 为过程 X 的齐次可乘泛函.于是 $X^{(1)} = (X(t,\omega), t < \tau_1)$ 仍为马尔可夫过程(参见 Gihman & Skorohod,[1].注意到,$x(t,\omega) = \varphi(t, x_0), 0 \leqslant t < \tau_1$,由马尔可夫性立得 $\varphi(0,x) = x, \varphi(t+s, x) = \varphi(s, \varphi(t,x))$.

最后证(iii).对任意 $x \in E, s, t \in \mathbf{R}_+$ 使得 $t + s \in [0, c_*(x))$,我们有

$$
\begin{aligned}
&G(x, t+\mathrm{d}s, \mathrm{d}y) = P_x(\tau_1 \in t+\mathrm{d}s, X_{\tau_1} \in \mathrm{d}y) = \\
&F(x,t) P_x(\tau_1 \in t+\mathrm{d}s, X_{\tau_1} \in \mathrm{d}y \mid \tau_1 > t) = \\
&F(x,t) E_x(P_x(\tau_1 \in t+\mathrm{d}s, X_{\tau_1} \in \mathrm{d}y \mid \mathscr{F}_t) \mid \tau_1 > t) = \\
&F(x,t) E_x(P_{X_t}(\tau_1 \in \mathrm{d}s, X_{\tau_1} \in \mathrm{d}y) \mid \tau_1 > t) = \\
&F(x,t) E_x(P_{\varphi(t,x)}(\tau_1 \in \mathrm{d}s, X_{\tau_1} \in \mathrm{d}y) \mid \tau_1 > t) =
\end{aligned}
$$

$$F(x,t)P_{\varphi(t,x)}(\tau_1 \in \mathrm{d}s, X_{\tau_1} \in \mathrm{d}y) =$$
$$F(x,t)G(\varphi(t,x),\mathrm{d}s,\mathrm{d}y).$$

故由(ii)得

$$Q(x,t+s,\mathrm{d}y) = \frac{G(x,t+\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)}{F(x,t+\mathrm{d}s)} =$$
$$\frac{F(x,t)G(\varphi(t,x),\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)}{F(x,t)F(\varphi(t,x),\mathrm{d}s)} = Q(\varphi(t,x),s,\mathrm{d}y).$$

必要性得证.

充分性.我们先证明简单的马尔可夫性,即证明 $\forall t \geqslant 0, s \geqslant 0$,

$$E_x[f(X_{t+s}) \mid \mathscr{F}_t] = E_{X_t}f(X_s), x \in E,$$

对任何有界可测函数 f 成立.由过程的构造,我们知道 $P(\sigma_{k+1} > s \mid \mathscr{F}_{\tau_k}) = F(X_{\tau_k}, s)$.于是由(ii)有

$$P_x[\tau_{k+1} > t+s \mid \mathscr{F}_t]I_{(\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1})} =$$
$$\frac{F(X_{\tau_k}, t+s-\tau_k)}{F(X_{\tau_k}, t-\tau_k)}I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]} =$$
$$\frac{F(\varphi(t-\tau_k, X_{\tau_k}), s)\cdot F(X_{\tau_k}, t-\tau_k)}{F(X_{\tau_k}, t-\tau_k)}I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]} =$$
$$F(\varphi(t-\tau_k, X_{\tau_k}), s)I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]} =$$
$$F(X_t, s)I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]}.$$

因此,记 $\bar{\tau} = \tau_{k+1}$,若 $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$,亦即 $\bar{\tau}$ 为下一个随机跳时刻.对上式两端求和即得

$$P_x(\bar{\tau} > t+s \mid \mathscr{F}_t) = F(X_t, s). \tag{4}$$

注意到

$$Q(x,s+t,\mathrm{d}y) = Q(\varphi(t,x),s,\mathrm{d}y),$$
$$F(x,\mathrm{d}s+t) = F(x,t)F(\varphi(t,x),\mathrm{d}s).$$

亦由过程的构造,有

$$P_x(X_{\bar{\tau}} \in \mathrm{d}y \mid \mathscr{F}_t)I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]} =$$

$$P_x(X_{\bar{\tau}_{k+1}} \in \mathrm{d}y \mid \mathscr{F}_t) I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]} =$$

$$\frac{\int_{[t,\infty]} Q(X_{\tau_k}, u, \mathrm{d}y) F(X_{\tau_k}, \mathrm{d}u)}{F(X_{\tau_k}, t)} I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]} =$$

$$\frac{\int_{[0,\infty]} Q(\varphi(t, X_{\tau_k}), s, \mathrm{d}y) F(X_{\tau_k}, t) F(\varphi(t, X_{\tau_k}), \mathrm{d}s)}{F(X_{\tau_k}, t)} I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]} =$$

$$\int_{[0,\infty]} Q(X_t, s, \mathrm{d}y) F(X_t, \mathrm{d}s) I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]} =$$

$$P_{x_t}(X_{\bar{\tau}} \in \mathrm{d}y) I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]}.$$

故有

$$P_x(X_{\bar{\tau}} \in \mathrm{d}y \mid \mathscr{F}_t) = P_{x_t}(X_{\bar{\tau}} \in \mathrm{d}y). \tag{5}$$

对所有 $x \in E$ 成立.

由(4)与(5)式可见,在给定 $\mathscr{F}_t$ 的条件下,过程下一次马尔可夫随机跳时刻,以及跳达的状态与从 x_t 出发的过程的第一次马尔可夫随机跳时刻及跳达的状态的分布相同.因为下一次跳后过程两次相邻马尔可夫随机跳间的时间间隔 σ_m,及跳达的状态仅与下一次跳达的状态 x_τ 有关,而 x_τ 仅依赖于 x_t,与 t 前的历史无关.于是我们便证明了,若 f 为定义在 $E_\Delta^{[0,\infty)}$ 上的有界 $\mathscr{E}_\Delta^{[0,\infty)}$ - 可测函数,则

$$E_x(f(X(t+\cdot,\omega)) \mid \mathscr{F}_t) = E_{X_t}[f(X(\cdot,\omega))].$$

对任意 $x \in E$, P_x-a.s.成立.

为了得到强马尔可夫性,我们利用关于离散型流停时的特征.如果我们令 $Y_k = (X, \sigma_1, X_{\tau_1}, \sigma_2, X_{\tau_2}, \cdots, \sigma_k, X_{\tau_k})$,则对每个停时 T,存在一列函数 $s_1, s_2, \cdots$,使得

$$TI_{[\tau_{k-1} < T \leqslant \tau_k]} = ((\tau_{k-1} + s_k(Y_{k-1})) \wedge \tau_k) I_{[\tau_{k-1} < T \leqslant \tau_k]}.$$

这一特征指出,在集$(T < \infty)$上有三种可能情形:或者 $T = 0$,或 $T = \tau_k$ 对某个 k 成立,或者 $T = \tau_{k-1} + s_k(Y_{k-1})$ 对某个 k 成立,并

且$(T=0)$、$(T=\tau_k)$、$(T=\tau_{k-1}+s_k(Y_{k-1}))$均为$\mathscr{F}_T$可测的.同样地,我们定义$\bar{\tau}=\tau_n$,如果$\tau_{n-1}\leqslant T<\tau_n$.则对这三种情形作如前段同样的推导,可证明

$$P_x[(\tau>T+s)\cap(T<\infty)\mid\mathscr{F}_T]=F(X_T,s)I_{[T<\infty]},$$

$$P_x[(X_{\bar{\tau}}\in dy\mid\mathscr{F}_T)=P_{X_T}(X_{\tau_1}\in dy).$$

与马尔可夫性证明相同的推理便证明了,对任意定义在$E_\Delta^{[0,\infty)}$上的有界$\mathscr{E}_\Delta^{[0,\infty)}$可测函数$f$,有

$$E_x[f(X(T+\cdot,\omega))I_{(T<\infty)}\mid\mathscr{F}_T]=E_{X_T}[f(x(\cdot,\omega))]I_{[T<\infty]}.$$

这便证明了过程X的强马尔可夫性.

由上面定理易得如下推论.

推论1 1)齐次逐段决定马尔可夫过程成为强马尔可夫过程的充要条件是它关于$\tau_n(n\geqslant0)$满足马尔可夫性质.

2) $F(x,0)=F(x,(0,+\infty])=1, x\in E$.

任给一随机过程,通常证其为马尔可夫过程是困难的,证明其为强马尔可夫过程更困难.定理1的意义在于,对广泛的一类随机过程——离散型过程,提供了验证其为强马尔可夫过程的简单明了的方法.在后面第五节我们将会看到,它为化非马尔可夫模型为马尔可夫模型提供了一般方法和步骤.

下面我们先看一些简单的例子.

例1 设$\{X_n,n\in Z_+\}$为取值于$E=Z_+$的马尔可夫链,转移矩阵为$P=(p_{ij})$.我们考察它的平凡连续化$X=\{x_t,t\in\mathbf{R}_+\}$,其中

$$X_t=X_n,当 n\leqslant t<n+1.$$

周知,这样的连续化不是马尔可夫过程.由定理3.5.1我们容易发现其分布特征

$$\varphi(t,i)=i,\quad t\in\mathbf{R}_+$$

$$F(i,t)=p_{ii}^{[t]},\quad t\in\mathbf{R}_+,$$

如下的连续化$X^\diamond=\{X_t^\diamond,t\in\mathbf{R}_+\}$是有趣的,它可以保证所得

过程是马尔可夫过程.同时可以使过程的轨道与上面平凡连续化的轨道间的距离小于给定的正数 $\delta < 1$.

$$X_t^\delta = X_n + \delta(t - n), \text{若 } n \leqslant t < n + 1.$$

此时,

$$\varphi(t, x) = x + \delta(t - n),$$

当 $0 \wedge \left(n - \frac{x - [x]}{\delta}\right) \leqslant t < (n + 1) - \frac{x - [x]}{\delta}$;

$$F(x, t) = p_{[x],[x]}^{\left[t + \frac{x - [x]}{\delta}\right]}, t \in \mathbf{R}_+; \tag{6}$$

$$Q(x, t, \{j\}) = \frac{p_{[x],j}}{1 - p_{[x],[x]}}, j \neq [x], t \in \mathbf{R}_+.$$

容易验证,如此的三元特征(φ, F, Q)满足定理 1 的三条件.

与 X 比较,X^δ 的不足之处在于,状态空间由 Z^+ 扩大为 $\bigcup_{n=0}^{\infty}[n, n + \delta)$.事实上,$X$ 为半马尔可夫过程.将半马尔可夫过程马尔可夫化,状态空间的扩大是不可避免的.

例 2　最小 Q 过程　设 $Q = (q_{ij})$ 为保守的 Q 矩阵,$X = (X_t, 0 \leqslant t < \tau)$ 为最小 Q 过程,状态空间为 E.则 X 为逐段决定过程,三元特征为

$$\varphi(t, i) = i, F(i, t) = \mathrm{e}^{-q_i t},$$
$$Q(i, t, \{j\}) = q_{ij}/q_i, i, j \in E, t \in \mathbf{R}_+,$$

其中,$q_i = -q_{ii}, i \in E$.容易验证,此三元特征满足定理 1 的三条件.

例 2 说明最小 Q 过程是逐段决定马尔可夫过程的特例.

例 3　Davis[2,4] 的 PDP.Davis 的 PDP 定义形式上显得繁杂.原因在于,他把补充变量纳入了他的定义,其目的在于展示 PDP 的广泛适用性.去掉其补充变量的繁赘,Davis PDP 的三元特征如下给出.

动力系统 $\varphi(t, x)$ 由向量场 χ 唯一决定,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi(t, x)) = \chi f(\varphi(t, x)), \varphi(0, x) = x;$$

生存函数 $F(x, t)$ 有如下形式

$$F(x,t)=\begin{cases}\exp\left(-\int_0^t\lambda(\varphi(s,x))\mathrm{d}s\right), & t<c_*(x);\\ 0, & t\geqslant c_*(x).\end{cases}\tag{7}$$

跳转移函数 $Q(x,t,\mathrm{d}y)$ 为

$$Q(x,t+s,\mathrm{d}y)=Q(\varphi(t,x)s,\mathrm{d}y).$$

它们显然满足定理 1 的三条件，从而是这里逐段决定马尔可夫过程的特例．

注意到，例 1 中的过程 X^δ 的分布特征(6)式不能写成(7)式的形式，过程 X^δ 是逐段决定马尔可夫过程，但不是 Davis 的 PDP．这表明，这里的逐段决定马尔可夫过程本质地推广了 Davis 的 PDP 概念．

例 4　跳线性系统(JLS)　所谓跳线性系统是指具有多种运行模式的混杂系统(hybrid system)．每种模式对应一决定性系统，而模式的转换由一马尔可夫过程决定．这种系统及其控制理论的研究在近 10 年里得到了广泛的重视．跳线性系统由如下随机常微分方程给出

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}=A(r_t)X_t+B(r_t)u(X_t,r_t),\quad x_0=x,\tag{8}$$

其中，$X_t\in\mathbf{R}^n$ 是系统状态．$(r_t,t\in\mathbf{R}_+)$ 是取值于 $S=\{1,2,\dots,N\}$ 的马尔可夫过程，其 Q 矩阵 $Q=(q_{ij})_{i,j\in S}$ 是保守的．对任意给定的 $r\in S$，方程

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}=A(r)x_t+B(r)u(X_t,r),\tag{9}$$

$$x_0=x$$

的解的存在唯一性是设定的．

由于方程(8)不是定常的，严格地说，方程(8)给出的微分系统不是动力系统．因而，过程(X_t)不是马尔可夫过程．欲将跳线性系统纳入逐段决定马尔可夫过程框架，首先必须将方程(9)用定常微分方程(组)替代．考察新过程(X_t,r_t)．此时，

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}=A(r)X_t+B(r)u(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0.$$

为定常微分方程,决定一动力系统;而且对任意$(x,r),(x',r') \in R^n \times S$,

$$F((x,r),t) = e^{-q_r t},\ t \in \mathbf{R}_+;$$

$$Q((x,r),t,(x',r')) = q_{rr'}/q_r.$$

容易验证,它们满足定理1的条件.从而,过程(x_t, r_t)为逐段决定马尔可夫过程.

例5　时滞跳线性系统(JLS with delay)　时滞跳线性系统是例4.4的推广,由如下随机常微分方程给出.

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t} = A(r_t)X_t + A_1(r_t)X_{t-\tau} + B(r_t)u(X_t, r_t),$$

$$X_t = \varphi(t), t \in [-\tau, 0],$$

其中,$\tau > 0$是常数,$\varphi(\cdot)$为$[-\tau,0]$上的给定函数.

由于增加了时滞项,系统的分析变得困难.即便是决定性系统仍然有很多问题没搞清楚.此时,过程(X_t, r_t)已不再是马尔可夫过程.但若记

$$Y_t = (X_s, s \in [t-\tau, t]), Y_0 = \varphi(\cdot).$$

则过程(Y_t, r_t)为逐段决定马尔可夫过程,其状态空间为$R^{[0,\tau]\times S}$.读者不妨自行验证.

u通常称为(反馈)控制项.对时滞跳线性系统而言,可取$u = u(Y_t, r_t)$.

§6　马尔可夫建模与补充变量法

补充变量法的研究至少可以追溯到Cox[1],它与半马尔可夫过程的思想有密切的联系(Cinlar,[2]).半马尔可夫过程的一般定义就是借助于补充变量给出的(Gihman & Skorohod,[1]p.295).有关补充变量法的结果之一是非齐次马尔可夫过程的齐次化－空

间－时间马尔可夫过程(Revuz & Yor,[1],p.80),这一结果为用齐次马尔可夫过程理论研究非齐次马尔可夫过程打开了方便之门.另一方面,对任何与时间 t 相关的决定性系统 φ,补充上时间变量 t 后,空间－时间系统 (φ,t) 就成为动力系统.补充变量的技巧在具体随机模型的研究中已得到广泛的应用(参见 Davis,[4] 或 Asmussen,[1]).相对于补充变量法的应用而言,一般技巧的探讨显得过于贫乏.我们的目的是,在广泛的意义下,研究补充变量的一般方法和技巧.具体说来,就是研究化逐段决定马尔可夫骨架过程为齐次马尔可夫过程的一般方法和技巧.

给定一个逐段决定马尔可夫骨架过程,如何通过引入适当的补充变量化为齐次马尔可夫过程呢?一般说来,可归结为两个步骤:1) 齐次化:把逐段决定马尔可夫骨架过程化为齐次逐段决定马尔可夫骨架过程;2) 马尔可夫化:把齐次逐段决定马尔可夫骨架过程化为齐次强马尔可夫过程.

1. 齐次化技术

设 $X=(X(t,\omega),0\leqslant t<\tau)$ 为一逐段决定马尔可夫骨架过程,状态空间 $(E,\mathscr{E})$ 为一 Polish 空间.我们来定义一个新的过程.令

$$E_H:=\{(n,x):x\in E,n=0,1,2,\cdots\},$$

$$\mathscr{E}_H:=\{\bigcup_{n=0}^{\infty}\{n\}\times B_n:B_n\in\mathscr{E},n\in N\}.$$

则 $(E_H,\mathscr{E}_H)$ 为一 Polish 空间.定义取值于 $(E_H,\mathscr{E}_H)$ 的过程 $X_H=(x_h(t,\omega):0\leqslant t<\tau)$ 如下,

$$X_h(t,\omega):=(n,X(t,\omega)),\tau_n\leqslant t<\tau_{n+1},n=0,1,2,\cdots. \tag{1}$$

我们说,随机过程 X_H 为齐次逐段决定马尔可夫骨架过程.进一步地,我们有如下定理.

定理 1 如果 $X=(X(t,\omega):0\leqslant t<\tau)$ 为逐段决定马尔可夫骨架过程,其三元特征列为 $(\varphi_n,F_n,Q_n)_{n\geqslant0}$,则由(1)式定义的过程 $X_H=(X_h(t,\omega):0\leqslant t<\tau)$ 为齐次逐段决定马尔可夫骨架

过程，且其三元特征有如下形式：

$$\varphi(t,(n,x)) = (n,\varphi_n(t,x)),(n,x) \in E_H, t \in \mathbf{R}_+;$$

$$F((n,x),A) = F_n(x,A),(n,x) \in E_H, A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+);$$

$$Q((n,x),t,\{n+1\} \times B) =$$

$$Q_n(x,t,B),(n,x) \in E_H, t \in \mathbf{R}_+, B \in \mathscr{E},$$

$$Q((n,x),t,\{v\} \times B) =$$

$$0,(n,x) \in E_H, t \in \mathbf{R}_+, B \in \mathscr{E}, v \neq n+1.$$

证明　显然由(1)式定义的过程 X_H 仍为马尔可夫骨架过程．我们来求 X_H 的三元特征列 $(\varphi_n, F_n, \bar{Q}_n)_{n \geq 0}$．首先，由(1)式及 X 为逐段决定马尔可夫骨架过程，对 $\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}$，有

$$X_h(t,\omega) = (n, X(t,\omega)) = (n, \varphi_n(t-\tau_n, X_{\tau_n})) =$$

$$\varphi(t-\tau_n,(n,X_{\tau_n})).$$

故得 $\bar{\varphi}_n = \varphi$ 与 n 无关．其次，对 $A \in \mathscr{B}(\bar{R}_+)$，

$$\bar{F}_n(X_h(\tau_n),A) = P(\sigma_{n+1} \in A \mid X_h(\tau_n)) =$$

$$P(\Delta_{n+1} \in A \mid (n,X(\tau_n))) = F_n(X(\tau_n),A) =$$

$$F((n,X_{\tau_n}),A).$$

故得 $\bar{F}_n = F$ 与 n 无关．最后，对任意 $B \in \mathscr{E}_\Delta$，

$$\bar{Q}_n(X_h(\tau_n),\sigma_{n+1},\{n+1\} \times B) =$$

$$P(X_h(\tau_{n+1}) \in \{n+1\} \times B \mid X_h(\tau_n),\sigma_{n+1}) =$$

$$P((n+1,X_{\tau_{n+1}}) \in \{n+1\} \times B \mid (n,X_{\tau_n}),\sigma_{n+1}) =$$

$$P(X_{\tau_{n+1}} \in B \mid X_{\tau_n},\sigma_{n+1}) = Q_n(X_{\tau_n},\sigma_{n+1},B) =$$

$$Q((n,X_{\tau_n}),\sigma_{n+1},\{n+1\} \times B);$$

而对 $v \neq n+1$，注意到(1)式蕴含 $X_h(\tau_{n+1}) = (n+1, X_{\tau_{n+1}})$，立得

$$\bar{Q}_n(X_h(\tau_n),\sigma_{n+1},\{v\} \times B) =$$

$$Q((n,X_{\tau_n}),\sigma_{n+1},\{v\} \times B) = 0.$$

这就证明了 $\bar{Q}_n = Q$ 与 n 无关．综上所述，由推论 2 即得所欲证．

2．马尔可夫化技术

设给定一齐次逐段决定马尔可夫骨架过程 $X = (X(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau)$，其状态空间 $(E, \mathscr{E})$ 为一 Polish 空间．我们来定义新的过程 $Y_M = (X_m(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau)$．令

$$E_M := \mathbf{R}_+ \times E, \quad \mathscr{E}_M := \mathscr{B}(\mathbf{R}_+) \times \mathscr{E}.$$

则 $(E_M, \mathscr{E}_M)$ 为一 Polish 空间．定义取值于 $(E_M, \mathscr{E}_M)$ 的过程 $X_M = (X_m(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau)$ 如下：

$$X_m(t,\omega) := (t - \tau_n, X(t,\omega)),$$
$$\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}, \quad n = 0,1,2,\cdots. \tag{2}$$

我们有如下定理．

定理 2　如果 $X = (X(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau)$ 为齐次逐段决定马尔可夫骨架过程，其三元特征为 (φ, F, Q)，则由 (2) 式定义的过程 $X_M = (X_m(t,\omega): 0 \leqslant t < \tau)$ 为齐次强马尔可夫过程，且其三元特征 (φ_m, F_m, Q_m) 满足：对任意 $(s,x) \in E_M, t \in \mathbf{R}_+, A \in \mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$ 有

$$\varphi_m(t,(s,x)) = (t+s, \varphi(t+s, x_0)),$$

$$F_m((s,x),A) = \begin{cases} F(x_0, s+A)/F(x_0,(s,\infty]), & s \in [0, c_*(x)); \\ \delta_{\{0\}}, & s \in [c_*(x), \infty). \end{cases}$$

$$Q_m((s,x),t,A \times B) = \begin{cases} Q(x_0, s+t, B), & s+t \in A; \\ 0, & s+t \notin A. \end{cases}$$

其中 x_0 使得 $x = \varphi(s, x_0)$，$\delta_{\{0\}}$ 为集中在 $\{0\}$ 点的退化分布．

证明　首先，我们证明由 (5.2) 式定义的过程为齐次马尔可夫骨架过程．事实上，由 (2) 式，对 $\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}$，

$$X_m(t,\omega) = (t-\tau_n, X(t,\omega)) =$$
$$(t-\tau_n, \varphi(t-\tau_n, X_{\tau_n})) =$$
$$\varphi_m(t-\tau_n,(0, X_{\tau_n})) = \varphi_m(t-\tau_n, X_m(\tau_n)).$$

由于 X 为齐次的，其马尔可夫骨架 $(\sigma_n, X_{\tau_n})_{n \geqslant 0}$ 为齐次马尔可夫序列，且其转移概率只依赖于第二个分量，与第一个分量无关．注意

到 X_M 的马尔可夫骨架为$(\sigma_n,(0,X_{\tau_n}))$,亦为齐次马尔可夫序列,且其转移概率只依赖于第二个分量,与第一个分量无关.从而,X_M 的三元特征列的项与 n 无关.这便证明了 X_M 为齐次马尔可夫骨架过程.

其次,由第二节最后给出的三元特征的概率表达式,容易验证 X_M 的三元特征具有定理所给形式.

最后,验证 X_M 的三元特征(φ_m,F_m,Q_m)满足定理3.5.1的三条件,从而证明 X_M 为齐次强马尔可夫过程.事实上,对任意$(u,x)\in E_M;s,t\in\mathbf{R}_+,s>0,s+t\in[0,c_*(x)-u)$,有

(i) φ_m 为半动力系统.事实上

$$\varphi_m(0,(u,x))=(u,\varphi(0,x))=(u,x),$$

$$\varphi_m(t,\varphi_m(s,(u,x)))=$$
$$\varphi_m(t,(s+u,\varphi(s+u,x_0)))=$$
$$(t+s+u,\varphi(t+s+u,x_0))=\varphi_m(t+s,(u,x)).$$

(ii) X_M 的生存时间函数 $F_m((u,x),t)$ 满足

$$F_m((u,x),t+s)=F_m((u,x),(t+s,\infty])=$$
$$F(x_0,(t+s+u,\infty])/F(x_0,(u,\infty])=$$
$$F(x_0,t+s+u)/F(x_0,u)=$$
$$[F(x_0,t+u)/F(x_0,u)]\cdot$$
$$[F(x_0,t+s+u)/F(x_0,t+u)]=$$
$$[F(x_0,(u+t,\infty])/F(x_0,(u,\infty])]\cdot$$
$$[F(x_0,(t+s+u,\infty])/F(x_0,(t+u,\infty])]=$$
$$F_m((u,x),(t,\infty])\cdot F_m(\varphi_m(t,(u,x)),(s,\infty])=$$
$$F_m((u,x),t)\cdot F_m(\varphi_m(t,(u,x)),s).$$

(iii) X_M 的转移核 $Q_m((u,x),t,\cdot)$ 满足

$$Q_m((u,x),t+s,\{t+s+u\}\times dy)=$$
$$Q(x_0,t+s+u,dy)=$$
$$Q_m((t+u,\varphi(t+u,x_0))s,\{t+s+u\}\times dy)=$$

$$Q_m(\varphi_m(t+u,(0,x_0)),s,\{t+s+u\}\times dy)=$$
$$Q_m(\varphi_m(t,(u,x)),s,\{t+s+u\}\times dy).$$
这就完成了定理的证明.

应该指出,定理1和定理2仅提供了补充变量的通用方法.针对具体问题而言,通用的未必是最好的.例如,例5.4跳线性系统的讨论,补充变量(r_t)使之马氏化或许更自然.因此,借助补充变量的马尔可夫建模,与其称之为方法,毋宁说是技巧.如果系统的将来的演化不仅仅依赖于系统当前的状态,找出所依赖的量并作为补充变量,也许是最自然的思路.

§7 补充与注记

本章的主要结果是§4、§5及§6,大都属于刘国欣.

$$Q_m(\varphi_m(t+u,(0,x_0)),s,\{t+s+u\}\times dy) =$$
$$Q_m(\varphi_m(t,(u,x)),s,\{t+s+u\}\times dy).$$

这就完成了定理的证明.

应该指出,定理 1 和定理 2 仅提供了补充变量的通用方法.针对具体问题而言,通用的未必是最好的.例如,例 5.4 跳线性系统的讨论,补充变量(r_t)使之马氏化或许更自然.因此,借助补充变量的马尔可夫建模,与其称之为方法,毋宁说是技巧.如果系统的将来的演化不仅仅依赖于系统当前的状态,找出所依赖的量并作为补充变量,也许是最自然的思路.

§7 补充与注记

本章的主要结果是 §4、§5 及 §6,大都属于刘国欣.

12 逐段决定马尔可夫过程

§1 基本概念与性质

1.半动力系统

我们知道,如果一个系统的发展变化完全由系统内部的关系所制约,就叫做决定性系统.用数学语言来描述,决定性系统是这样的系统:在取定了计时起点后,系统在时刻 t 的状态 x_t 完全由初始状态 x_0 和时间 t 所决定.用符号表示就是:$x_t = \varphi(t, x_0)$,即 x_t 是初始状态 x_0 与时间 t 的函数.而且这个函数 φ 与计时起点的选择无关.

但并非随便什么函数都可以充当这种描写决定性系统因果关系的工具,容易看出,φ 应满足下列两条件:

(i) $\varphi(0, x) = x$;

(ii) $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(s + t, x)$,

$(x \in E; s, t \in \mathbf{R})$,其中 E 称为状态空间为系统各种可能状态的集合.这两条的意思直观上很清楚:(ii) 表示,若从状态 x 出发,经过时间 s 到状态 $y = \varphi(s, x)$;从状态 y 出发经过时间 t 到达状态 z;则从状态 x 出发经过时间 $s + t$ 也到达状态 z.这是说,因果关系与时间的起点无关,只决定于时间间隔.函数 $\varphi: \mathrm{R} \times E \to E$ 便定义了一个 E 上的动力系统.

动力系统名目的来由,是因为当初 Poincare 采用了这样的数学模型研究多个天体在万有引力作用下的运行规律.这正好是质

点组动力学系统.

我们在连接决定马尔可夫过程理论中感兴趣的是所谓半动力系统.

定义 1 设$(E,\mathscr{E})$为 Polish 空间,$\varphi:(\mathrm{R}_+\times E,\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)\times\mathscr{E})\to(E,\mathscr{E})$为可测映射.我们称$\varphi$为$E$上的**半动力系统** semi-dynamic system) 或**半流**(semi-flow),若

(i) $\varphi(0,x)=x$;

(ii) $\varphi(t,\varphi(s,x))=\varphi(s+t,x)$,

其中,$x\in E;s,t\in\mathbf{R}_+$且$s+t<c(x)$.而函数$c:E\to\overline{\mathrm{R}}_+\setminus\{0\}$满足

$$c(x)=c(\varphi(t,x))+t,0\leqslant t<c(x). \tag{1}$$

对固定的$x\in E$,$c(x)$表示,若以状态x作为计时起点,系统至多只能发展变化至时刻$c(x)$.$c(x)$称为半动力系统φ的**中断时刻**(terminal time).

通过扩大状态空间的办法,补充$\varphi(\cdot,x)$在$c(x)$点的值使得定义 1 中的条件(ii) 当$s+t=c(x)(s,t\in\mathbf{R}_+)$时仍满足.令

$$\partial^+E=\{\varphi(c(x),x):x\in E\}.$$

我们称∂^+E为状态空间E的φ**流出边界**.

半动力系统定义中的(ii) 意味着,只要知道了系统当前的状态就可准确推测未来,而与系统的历史无关.这正是决定性系统的"马尔可夫性".可见,马尔可夫过程是半动力系统概念的推广.半动力系统与动力系统的本质差异在于,从初始状态出发,半动力系统只能预测未来而无法回溯历史.

下面我们介绍关于(半) 动力系统的一些基本概念.

函数$t\to\varphi(t,x)$称为系统从x出发的**运动**(motion).

状态空间的子集$\Phi_x:=\{\varphi(t,x):0\leqslant t\leqslant c(x)\}(x\in E)$称为系统从$x$出发的**轨迹**(trajectory).

状态$x\in E$称为**平衡点**(equilibrium point),若$\varphi(t,x)=x$对所有$t\in[0,c(x))$成立.平衡点亦称为**静点**(rest point) 或**不动点**(fixed point).

一个轨迹 Φ_x 称为周期的(periodic).若它是周期运动的轨迹,亦即,对某 $T(0 < T < c(x))$,$\varphi(t + T, x) = \varphi(t, x)$ 对所有 $t \in [0, c(x) - T)$ 成立.此时,x 称为**周期点**(periodic point)(包括平衡点作为特例).所有周期为某个**最小周期**(minimal period)T_0 的倍数.通常所说的周期系指此最小周期.

定理 1 若 $x \in E$ 为周期点,则 $c(x) = \infty$.

证明 设 $T > 0$ 为 x 的周期,则有 $\varphi(T, x) = \varphi(0, x) = x$.于是由(1)式

$$c(x) = c(\varphi(T, x)) + T = c(x) + T.$$

上式蕴含 $c(x) = \infty$.

定义 2 状态 $x \in E$ 称为**交汇点**,若存在两状态 x_1, x_2 满足

$$x_1 \notin \Phi_{x_2}, x_2 \notin \varphi_{x_1}; \Phi_{x_1} \cap \Phi_{x_2} \neq \varnothing,$$

使得

$$x = \varphi(t^*(x_1, x_2), x_1),$$

其中,

$$t^*(x_1, x_2) = \inf(t: \varphi(t, x_1) \in \Phi_{x_2}).$$

半动力系统 φ 的交汇点的几何意义为,从 x_1, x_2 出发的两轨迹相交的点.

最后,我们来考察半动力系统的时间可逆性.我们称 φ 是**时间可逆的**,若对任何固定的 $t \in \mathbf{R}^+$,映射 $\varphi(t, \cdot): (x \in E, t < c(x)) \rightarrow E$ 是可逆的.此时,若 $x = \varphi(t, y)$,我们可令 $y = \varphi_-(t, x)$.我们称 φ_- 为由 φ 逆转时间得到.显然,时间可逆的半动力系统不存在交汇点.

我们称 φ 为一**光滑半动力系统**,若 $\varphi(t, x)$ 关于时间 t 是可微的.此时,

$$\frac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t} = \lim_{h \to 0} \frac{x_{t+h} - x_t}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(t + h, x_0) - \varphi(t, x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h,\varphi(t,x_0))-\varphi(t,x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h,x_t)-x_t}{h}$$

仅与 x_t 有关. 因此, 它可以表示为状态 x_t 的函数 $v(x_t)$. 于是得到

$$\frac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t}=v(x_t).$$

这是一个右端不含主变元 t 的常微分方程(组). 通常称光滑半动力系统为**定常的常微系统**, 或简称**微分动力系统**.

如果微分动力系统 φ 是时间可逆的且有速度场 x, 则 φ 为具速度场 x 的微分动力系统.

2. φ- 无后记忆分布(族)

设 φ 为 $(E,\mathscr{E})$ 上的半动力系统.

定义 3 设分布族 $\{F(x,\cdot)\}_{x\in E}$ 满足

(i) 对固定的 $x\in E$, $F(x,\cdot)$ 为 $(\bar{\mathrm{R}}_+,\mathscr{B}(\bar{\mathrm{R}}_+))$ 上的概率分布, 且满足

$$c(x)=\inf\{t: F(x,(t,\infty])=0\};$$

(ii) 对固定的 $A\in\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$, $F(\cdot,A)$ 为 $\mathscr{E}$- 可测的.

我们称分布族 $\{F(x,\cdot)\}_{x\in E}$ 为 **φ- 无后记忆分布(族)**, 如果

$$F(x,s+t)=F(x,s)F(\varphi(s,x),t),\tag{2}$$

其中, $F(x,t):=F(x,(t,\infty])(x\in E,t\in\bar{\mathrm{R}}_+)$.

引理 1 设 $\{F(x,\cdot)\}_{x\in E}$ 为 φ- 无后记忆分布(族), $x\in E$, $s\in(0,c(x))$. 如果函数 $F(x,t)$ 在 $t=s$ 点的右导数存在, 则 $F(\varphi(s,x),t)$ 在 $t=0$ 点的右导数存在, 且

$$\frac{\partial^+F(\varphi(s,x),t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=[F(x,s)]^{-1}\frac{\partial^+F(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=s}.\tag{3}$$

证明 由 $F(x,s+t)=F(x,s)F(\varphi(s,x),t)$, 故得

$$\frac{\partial^+F(x,s)}{\partial s}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{F(x,s+t)-F(x,s)}{t}=$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{F(x,s)[F(\varphi(s,x),t)-1]}{t}=$$

$$F(x,s)\frac{\partial^+F(\varphi(s,x),0)}{\partial t}.$$

此即(3)式.

对任意 $x \in E$,令

$$\lambda(x)=\begin{cases}-\dfrac{\partial^{+}F(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}, & 若\dfrac{\partial^{+}F(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}存在;\\ 0, & 否则.\end{cases}$$

注意到 $F(x,t)$ 关于 x 的可测性,立得 $\lambda(x)$ 为定义在 E 上的 $\mathscr{E}$ 可测函数.

定理2 设 $\{F(x,\cdot)\}_{x\in E}$ 为 φ- 无后记忆分布(族).如果 $F(x,t)$ 为 $[0,c(x))(x\in E)$ 上的绝对连续函数且至多有可列个 $t\in(0,c(x))$ 使得 $\varphi(t,x)$ 为 φ- 交汇点,则

$$F(x,t)=\begin{cases}\exp\left[-\int_0^t\lambda(\varphi(u,x))\mathrm{d}u\right], & t\in[0,c(x));\\ 0, & t\in[c(x),+\infty).\end{cases}\tag{4}$$

证明 设 $F(x,t)$ 为 $[0,c(x))$ 上的绝对连续函数.由于 $F(x,t)$ 关于 t 的单调性知,它在 $[0,c(x))$ 上几乎处处可微.则由引理1有

$$\frac{\partial F(x,t)}{\partial t}/F(x,t)=-\lambda(\varphi(t,x)),\text{a.e.于}[0,c(x)).$$

定义函数

$$G(x,t)=\begin{cases}\exp\left[-\int_0^t\lambda(\varphi(u,x))\mathrm{d}u\right], & t\in[0,c(x));\\ 0, & t\in[c(x),+\infty).\end{cases}$$

则 $G(x,t)$ 关于 t 在 $[0,c(x))$ 上是绝对连续的,且有

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}/G(x,t)=-\lambda(\varphi(t,x)),\text{a.e.于}[0,c(x)).$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln G(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\ln F(x,t),\text{a.e.于}[0,c(x)).$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ln G(x,t)-\ln F(x,t))=0,\text{a.e.于}[0,c(x)).$$

注意到 $G(x,0)=F(x,0)=1$,由 $G(x,t),F(x,t)$ 关于 t 的绝对连续性知,$\ln G(x,t)-\ln F(x,t)$ 在 $[0,c(x))$ 上绝对连续,且有

$$\ln G(x,t)-\ln F(x,t)=\ln G(x,0)-\ln F(x,0)=0,$$

a.e.于 $[0,c(x))$

所以

$$F(x,t)=G(x,t),t\in[0,c(x)).$$

这就证明了定理.

(4) 式即 Davis([4]p.59)PDMP 模型中规定的随机跳时 τ_1 的生存函数的形式.定理 2 说明,Davis 理论只适于分布族 $\{F(x,t)\}$ 为绝对连续分布族的情形.

推论 1 设 E_e 为半动力系统 φ 的平衡点的全体.则存在定义于 E_e 上的非负函数 λ,使得对任意的 $x\in E_e$,

$$F(x,t)=e^{-\lambda(x)t},t\in\mathbf{R}_+.$$

证明 注意到平衡点为周期点的特例,定理 1 保证 $c(x)=\infty,x\in E_e$.再由平衡点定义与定理 2 立得结论.

推论 1 即"马尔可夫跳跃过程两相邻跳间逗留时间服从负指数分布"的命题的推广.

定义 4 令

$$J(E)=\{\varphi(t,x):F(x,t-)-F(x,t)>0,x\in E,t\in\mathbf{R}_+\}.$$

我们称 $x\in E$ 为 F- 跳点,若 $x\in J(E)$.

对任意 $x\in E,t\in(0,c(x)]$,令

$$a(x,t)=\frac{F(x,t-)-F(x,t)}{F(x,t-)}$$

(约定:$\frac{0}{0}=0$).显然,若 $y=\varphi(t,x)$ 不是 F- 跳点,则 $a(x,t)=0$.

引理 2 如果 y 不是 F- 跳点,则 $a(x,t)=a(y)=0$;若 y 是 F- 跳点但不是 φ- 交汇点,则

$$a(x,t)=a(y)$$

为 y 的函数且与 x,t 的选择无关,其中 x,t 满足 $y=\varphi(t,x)$.

证明 显然,当 y 不是 F- 跳点时, $a(y)=0$.

设 y 是 F- 跳点但不是 φ- 交汇点. 于是,对任意两状态 x_1,x_2 满足 $y=\varphi(t_1,x_1),y=\varphi(t_2,x_2)$,存在 $u:0<u<\min\{t_1,t_2\}$ 及状态 z,使得

$$z=\varphi(t_1-u,x_1),z=\varphi(t_2-u,x_2),y=\varphi(u,z).$$

于是

$$a(x_1,t_1)=\frac{F(x_1,t_1-)-F(x_1,t_1)}{F(x_1,t_1-)}=$$

$$\frac{F(x_1,t_1-u)[F(z,u-)-F(z,u)]}{F(x_1,t_1-u)F(z,u-)}=$$

$$\frac{F(z,u-)-F(z,u)}{F(z,u-)}.$$

同理可得

$$a(x_2,t_2)=\frac{F(z,u-)-F(z,u)}{F(z,u-)}.$$

所以

$$a(x_1,t_1)=a(x_2,t_2).$$

由 $(x_1,t_1),(x_2,t_2)$ 的任意性便证明了 $a(x,t)=a(y)$ 为 y 的函数与 x,t 的选择无关.

引理 2 实际上给出了函数 $a(y)$ 于非交汇点 y 处的值. $a(y)$ 有如下概率意义:

$$a(y)=\sup\{F(x,t_-)-F(x,t):\varphi(t,x)=y\}.$$

显然, $a(y)$ 满足: $a(y)\leqslant 1$;且 $a(y)=1$ 的充分必要条件是 y 为 F- 跳点且为 φ- 边界点.

定理 3 设 $x\in E,F(x,t)$ 为离散型且其跳时可按时间顺序排列为: $t_1,t_2,\cdots$. 若对每个自然数 $n,x_n=\varphi(t_n,x)$ 均非交汇点,则

$$p(x_n)=a(x_n)\prod_{m=1}^{n-1}(1-a(x_{m-1})),$$

其中，$p(x_n)=F(x,t_n-)-F(x,t_n)$ 为 $F(x,t)$ 在 t_n 点的跃度.

证明 我们知道，$a(x_n)=p(x_n)/F(x,t_n-)$，$n=1,2,\cdots$. 而此时 $F(x,t_n-)=\sum_{m=n}^{\infty}p(x_m)$. 于是，

$$p(x_n)=a(x_n)\sum_{m=n}^{\infty}p(x_m).$$

所以

$$a(x_n)p(x_{n-1})-a(x_{n-1})p(x_n)=a(x_{n-1})a(x_n)p(x_{n-1}),$$

亦即，

$$p(x_n)=\frac{a(x_n)}{a(x_{n-1})}(1-a(x_{n-1}))p(x_{n-1}),n=2,3,\cdots.$$

故得

$$p(x_n)=a(x_n)\prod_{m=1}^{n-1}(1-a(x_{m-1})).$$

证毕.

在定理条件下，特别地，若 $a(x_n)\equiv c$(常数)，则 $p(x_n)=c(1-c)^{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，为几何分布.

3. 沿半动力系统的时间推移不变测度族

先介绍把对连续增函数的 Lebesgue-Stieltjes 积分化为通常 Lebesgue 积分的所谓 Lebesgue 引理.

设 $A(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上一非负连续增函数(可取 ∞). 令

$$C(t):=\inf(s:A(s)>t),t\in\mathbf{R}_+. \tag{5}$$

容易见得，$C(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上非负右连续增函数，称为 $A(t)$ 的右逆函数. 设 $t\in\mathbf{R}_+$，则为要 $C(t)<\infty$，必须且只需 $t<A(\infty)=\lim_{t\to\infty}A(t)$；且有

$$A(C(t))=t,0\leqslant t<A(\infty); \tag{6}$$

$$A(s)=\sup(t:C(t)\leqslant s),s\in\mathbf{R}_+. \tag{7}$$

引理 3 设 $A(t)$ 为 $\mathbf{R}_+$ 上一有限零初值非负连续增函数，则对任有界或非负 Borel 函数 $f(t)$，我们有，

$$\int_{[0,\infty)} f(s)\mathrm{d}A(s) = \int_{[0,\infty)} f(C(s)) I_{[C(s)<\infty]}(s)\mathrm{d}s, \tag{8}$$
其中 $C(s)$ 由(5)式定义.

证明 设 $u \in \mathbf{R}_+$,如果 $f(t) = I_{[0,u]}(t)$,则由(7)式

$$\int_{[0,\infty)} f(s)\mathrm{d}A(s) = A(u) = \sup\{t: C(t) \leqslant u\} =$$
$$\int_{[0,\infty]} I_{[C(s)\leqslant u]}(s)\mathrm{d}s =$$
$$\int_{[0,\infty]} f(C(s)) I_{[C(s)<\infty]}(s)\mathrm{d}s,$$
于是,对这样的 f,(8)式成立.由单调类定理,(8)式对有界或非负 Borel 函数 f 成立.

设 $F(t)$ 为 R_+ 上非负右连续非升函数,$F(0) = 1$.令
$$\Lambda(t) = \int_{[0,t]} -\frac{\mathrm{d}F(s)}{F(s-)}, t \in \mathbf{R}_+. \tag{9}$$
显然有,$\Lambda(t)$ 在 R_+ 上连续非降,$\Lambda(0) = 0$.取
$$c := \inf\{t: F(t) = 0\}.$$
若 $t < c$,则因 $F(t) > 0$,有 $\Lambda(t) = \int_0^t \frac{-\mathrm{d}F(s)}{F(s-)} \leqslant \frac{1-F(t)}{F(t)} < \infty$.实际上,$F$ 与 Λ 有如下关系.

引理 4 设 $F(t)$ 为 R_+ 上非负连续非升函数,$F(0) = 1$,则由(9)式定义的 $\Lambda(t)$ 在 R_+ 上连续非降,$\Lambda(0) = 0$,且有
$$F(t) = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}, t \in \mathbf{R}_+ \tag{10}$$
(按约定:$\mathrm{e}^{-\infty} = 0$).反过来,若(10)式中的 $\Lambda(t)$ 为 R_+ 上非负连续非降函数,$\Lambda(0) = 0$;则有(9)式成立.

证明 记 $A(t) = 1 - F(t)$ 由引理 4.1.10 及(5)式
$$\Lambda(t) = \int_{[0,t]} -\frac{\mathrm{d}F(s)}{F(s)} =$$
$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{F(s)} I_{[0,t]}(s)\mathrm{d}(1-F(s)) =$$
$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{1-A(s)} I_{[0,t]}(s)\mathrm{d}A(s) =$$

$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{1-s} I_{\{C(t)\leq t\}}(s)\mathrm{d}s =$$

$$\int_{[0,\Lambda(t)]} \frac{1}{1-s}\mathrm{d}s = -\log(1-s)\Big|_0^{1-F(t)} = \log F(t),$$

这便证明了(10)式.

反过来,若 $F(t)$ 由(10)式定义,则由 $\Lambda(t)$ 在 R_+ 上连续非降 $\Lambda(0)=0$ 知,$F(t)$ 为 R_+ 上非负连续非升函数,$F(0)=1$.逆转上段证明的式子即得(9)式.

定义 5 对任意 $x\in E$,设 $\Lambda(x,\cdot)$ 为 $(R_+\setminus\{0\}),\mathscr{B}(\mathrm{R}_+\setminus\{0\})$ 上的测度,满足

(i) 对任意 $t\in[0,c(x))$,$\Lambda(x,[0,t])<\infty$;$c(x)=\inf\{t:\Lambda(x,(t,\infty))=0\}$;

(ii) 对固定的 $A\in\mathscr{B}(R_+)$,$F(\cdot,A)$ 为 $\mathscr{E}$-可测的.

我们称 $(\Lambda(x,\cdot))_{x\in E}$ 为**沿半动力系统 φ 时间推移不变的**(或简称 **φ-时间推移不变的**),若对任意的 $t\in[0,c(x))$,$x\in E$,

$$\Lambda(x,t+\cdot)=\Lambda(\varphi(t,x),\cdot). \tag{11}$$

下面我们建立 $(0,\infty]$ 上概率分布族 $F=(F(x,\cdot))_{x\in E}$ 与测度族 $\Lambda=(\Lambda(x,\cdot))_{x\in E}$ 间的联系.

定理 4 ① 对任意 $x\in E$,$B\in\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$

$$\Lambda(x,B)=\int_B\frac{F(x,\mathrm{d}t)}{F(x,,t-)}, \tag{12}$$

的充分必要条件是,对任意 $x\in E$,$t\in R_+$

$$F(x,t)=\mathrm{e}^{-\Lambda(x,t)}\prod_{s\leq t}(1-\Delta\Lambda(x,s))\mathrm{e}^{\Delta\Lambda(x,s)}, \tag{13}$$

其中 $F(x,t)=F(x,(t,\infty])$,$\Lambda(x,t)=\Lambda(x,[0,t])$.

② 概率分布族 $F=(F(x,\cdot))_{x\in E}$ 为 φ-无后记忆的充分必要条件是,由(12)式定义的测度族 $\Lambda=(\Lambda(x,\cdot))_{x\in E}$ 为 φ-时间推移不变的.

证明 ① 往证必要性.记(13)式右端为 $G(x,t)$,由(11)式,对任意 $x\in E$,$G(x,t)$ 与 $F(x,t)$ 有相同的跳跃点,且对 $t\in R_+$

$$\Delta G(x,t) = G(x,t) - G(x,t-) =$$
$$G(x,t-)(1 - \Delta\Lambda(x,t)) - G(x,t-) =$$
$$- G(x,t-)\Delta\Lambda(x,t) = G(x,t-)\frac{1}{F(x,t-)}\Delta F(x,t).$$

注意到,$G(x,0) = F(x,0) = 1$,为证 $F(x,t) = G(x,t)$,只需证 $G^c(x,t) = F^c(x,t)$,其中

$$F^c(x,t) = F(x,t)\prod_{s\leq t}\left(\frac{F(x,s-)}{F(x,s)}\right); G^c(x,t) = \mathrm{e}^{-\Lambda^c(x,t)}$$

(Λ^c 为 Λ 的连续部分).由引理 4,只需证

$$\Lambda^c(x,t) = \int_{[0,t]}\frac{F^c(x,\mathrm{d}t)}{F^c(x,t)}$$

事实上,注意到 $F(x,t) = F^c(x,t)\prod_{s\leq t}\left(\frac{F(x,s)}{F(x,s-)}\right)$,

$$\Lambda^c(x,t) = \Lambda(x,t) - \sum_{s\leq t}\Delta\Lambda(x,s) =$$
$$\int_{[0,t]}\frac{F(x,\mathrm{d}t)}{F(x,t-)} - \sum_{s\leq t}\Delta\Lambda(x,s) =$$
$$\int_{[0,t]\setminus J(x)}\frac{F(x,\mathrm{d}x)}{F(x,t-)} + \int_{J(x)\cap[0,t]}\frac{F(x,\mathrm{d}t)}{F(x,t-)} -$$
$$\sum_{s\leq t}\Delta\Lambda(x,s) =$$
$$\int_{[0,t]\setminus J(x)}\frac{F^c(x,\mathrm{d}t)\prod_{s<t}\left(\frac{F(x,s)}{F(x,s-)}\right)}{F^c(x,t)\prod_{s<t}\left(\frac{F(x,s)}{F(x,s-)}\right)} =$$
$$\int_{[0,t]\setminus J(x)}\frac{F^c(x,\mathrm{d}t)}{F^c(x,t)} = \int_{[0,t]}\frac{F^c(x,\mathrm{d}t)}{F^c(x,t)},$$

其中,$J(x) = \{t:\Delta\Lambda(x,t) > 0\}$ 为可列集.这便证明了①.

② 设 $F = (F(x,\cdot))_{x\in E}$ 为 φ- 无后记忆分布族,即对任意 $x \in E$,$s \in [0,c(x))$,有 $F(x,x + \mathrm{d}t) = F(x,s)F(\varphi(s,x),\mathrm{d}t)$,故有

$$\Lambda(x,s + \mathrm{d}t) = \frac{F(x,s + \mathrm{d}t)}{F(x,s + t-)} =$$

$$\frac{F(x,s)F(\varphi(s,x),\mathrm{d}t)}{F(x,s)F(\varphi(s,x),t-)} = \Lambda(\varphi(s,x),\mathrm{d}t).$$
可见,$\Lambda = (\Lambda(x,\cdot))_{x\in E}$ 为φ- 时间推移不变的.

反过来,设 $\Lambda = (\Lambda(x,\cdot))_{x\in E}$ 为φ- 时间推移不变的,即对任意 $x \in E, s \in E[0,c(x))$ 有 $\Lambda(x,s+\mathrm{d}t) = \Lambda(\varphi(s,x),\mathrm{d}t)$,亦即

$$\Lambda(x,s+t) = \Lambda(x,s) + \Lambda(\varphi(s,x),t).$$
于是,由 ① 的(13) 式

$$F(x,s+t) = \mathrm{e}^{-\Lambda(x,s+t)}\prod_{u\leqslant s+t}(1-\Delta\Lambda(x,u))\mathrm{e}^{\Delta\Lambda(x,u)} =$$
$$\mathrm{e}^{-\Lambda(x,s)}\prod_{u\leqslant s}(1-\Delta\Lambda(x,u))\mathrm{e}^{\Delta\Lambda(x,u)}\times$$
$$\mathrm{e}^{-\Lambda(\varphi(s,x),t)}\prod_{s<u\leqslant s+t}(1-\Delta\Lambda(x,u))\mathrm{e}^{\Delta\Lambda(x,u)} =$$
$$F(x,s)\mathrm{e}^{-\Lambda(\varphi(s,x),t)}\prod_{u\leqslant t}(1-\Delta\Lambda(\varphi(s,x),u))\mathrm{e}^{\Delta\Lambda(\varphi(s,x),u)} =$$
$$F(x,s)F(\varphi(s,x),t).$$
这便证明了 ②,从而定理得证.

设测度 $\Lambda(x,\cdot)(x\in E)$ 有如下 Lebesgue 分解,

$$\Lambda(x,\cdot) = \Lambda^{ac}(x,\cdot) + \Lambda^{sc}(x,\cdot) + \Lambda^{d}(x,\cdot),$$
其中 Λ^{ac} 和Λ^{sc} 和Λ^{d} 分别为Λ 关于 Lebesgue 测度的绝对连续部分,奇异连续部分和离散部分. 于是由 Lebesgue 分解的唯一性,当 $(\Lambda(x,\cdot))_{x\in E}$ 为φ- 时间推移不变时,分解式中各部分均为 φ- 时间推移不变的.

定理 5 设 $\Lambda = (\Lambda(x,.))_{x\in E}$ 为φ- 时间推移不变的.

① 如果对任意的 $x \in E$,至多有可列个 $t \in (0,c(x)]$ 使得 $\varphi(x,t)$ 为 φ- 交汇点,则存在 E 上的非负 $\mathscr{E}$- 可测函数$\lambda(x)$,使得对每个 $x \in E$,

$$\Lambda^{ac}(x,t) = \begin{cases}\int_0^t \lambda(\varphi(s,x))\mathrm{d}s, & t\in[0,c(x));\\ \int_0^{c(x)}\lambda(\varphi(s,x))\mathrm{d}s, & t\in[c(x),\infty].\end{cases}$$

② 如果 $E \cup \partial^+ E$ 中每个 F- 跳点均非 φ- 交汇点，则存在 $E \cup \partial^+ E$ 上可测函数 $a(x)$，使得对每个 $x \in E$，

$$\Lambda^d(x,\{t\}) = \begin{cases} a(\varphi(t,x)), & t \in (0,c(x)]; \\ 0, & t \in \{0\} \cup (c(x),\infty]. \end{cases}$$

证明 ① 由于 $\Lambda = (\Lambda(x,.))_{x\in E}$ 为 φ- 时间推移不变的，我们知道 $(\Lambda^{ac}(x,.))_{x\in E}$ 亦为 φ- 时间推移不变的. 令

$$G(x,t) = e^{-\Lambda^{ac}(x,t)}, x \in E, t \in R_+.$$

则 $G(x,t)$ 为 $[0,c(x))(x \in E)$ 上绝对连续函数. 又至多有可列个 $t \in (0,c(x)]$ 使得 $\varphi(t,x)$ 为 φ- 交汇点，由定理2知，存在 E 上的非负 $\mathscr{E}$- 可测函数 $\lambda(x)$ 使得

$$G(x,t) = \exp[-\int_0^t \lambda(\varphi(s,x))ds], t \in [0,c(x)).$$

从而

$$\Lambda^{ac}(x,t) = \int_0^t \lambda(\varphi(s,x))ds, t \in [0,c(x)).$$

注意到，$0 \leqslant \Lambda^{ac}(x,(c(x),\infty]) \leqslant \Lambda(x,(c(x),\infty]) = 0$，显然有

$$\Lambda^{ac}(x,t) = \int_0^{c(x)} \lambda(\varphi(s,x))ds, t \in [c(x),\infty].$$

这便证明了 1).

② 同样地，由于 $\Lambda = \Lambda(x,\cdot))_{x\in E}$ 为 φ – 时间推移不变的，因为 $E \cup \partial^+ E$ 中每个 F – 跳点均非 φ – 交汇点，由引理2，存在 $E \cup \partial^+ E$ 上的函数 $a(x)$ 使得，对每个 $x \in E$，

$$\Lambda(x,\{0\}) = 0; \Lambda^d(x,\{t\}) = a(\varphi(t,x)), t \in (0,c(x)).$$

同样由于 $0 \leqslant \Lambda^d(x,(c(x),\infty]) \leqslant \Lambda(x,(c(x),\infty]) = 0$ 立得

$$\Lambda^d(x,\{t\}) = 0, t \in (c(x),\infty].$$

这便证明了定理.

推论 2 设 $F = (F(x,\cdot))_{x\in E}$ 为 φ- 无后记忆分布族. 如果 $E \cup \partial^+ E$ 中没有 φ- 交汇点，则

$$F(x,t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \lambda(\varphi(s,x))ds} e^{-\Lambda^{ac}(x,t)} \prod_{s\leqslant t}[1 - a(\varphi(s,x))]; \\ \qquad t \in [0,c(x)); \\ 0, \qquad t \in [c(x),\infty]. \end{cases}$$

证明　由定理 4 及定理 5 立得.

4. 转移核 $Q(x,t,B)$

定义 6　设 $Q(x,t,B)(x \in E, t \in \mathbf{R}_+, B \in \mathscr{E})$ 满足

(i) 对固定的 (x,t), $Q(x,t,\cdot)$ 是 $(E,\mathscr{E})$ 上的概率测度;

(ii) 对固定的 B, $Q(\cdot,\cdot,B)$ 是 $\mathscr{E} \times \mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$- 可测的.

我们称 Q 为 φ- **时间推移不变的**,如果对任意的 $x \in E, s, t \in R_+$ $(t > 0)$, $s + t \in (0, c(x)]$ 有

$$Q(x, s+t, B) = Q(\varphi(s,x), t, B), \quad B \in \mathscr{E}.$$

定理 6 设转移核 Q 为 φ- 时间推移不变的.则

① 当 $x \in E \cup \partial^+ E$ 不是 φ- 交汇点或者平衡点时,对任意满足 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 $x_0 \in E, t \in (0, c(x)]$ 有

$$Q(x_0, t, B) = Q(x, B), \quad B \in \mathscr{E},$$

与 (x_0, t) 的选择无关.

② 当 $x \in E$ 为平衡点时,

$$Q(x,t,B) = Q_e(x,B), \quad B \in \mathscr{E}, t \in R_+ \setminus \{0\},$$

与 t 的选择无关.如果同时 x 又不是 φ- 交汇点,对满足 $x = \varphi(t, x_0)$ 的 $x_0(\neq x) \in E, t \in (0, c(x_0)]$ 有

$$Q(x_0, t, B) = \begin{cases} Q(x,B), & t = t_0; \\ Q_e(x,B), & t > t_0, \end{cases} B \in \mathscr{E},$$

其中, $t_0 = \inf(s : \varphi(t, x_0) = x)$ 为 φ 从 x_0 出发首中 x 的时刻.

证明　① 设 $x \in E$ 不是平衡点,对任意 $x_1, x_2 \in E, t_1 \in (0, c(x_1)], t_2 \in (0, c(x_2)]$,满足 $x = \varphi(t_1, x_1) = \varphi(t_2, x_2)$,由于 x 不是 φ- 交汇点,存在 $t_0 : 0 < t_0 < t_1 \wedge t_2$ 使得

$$\varphi(t_1 - t_0, x_1) = \varphi(t_2 - t_0, x_2) := x_0.$$

于是,有

$$\begin{aligned} &Q(x_1, t_1, B) = Q(\varphi(t_1 - t_0, x_1), t_0, B) = \\ &Q(x_0, t_0, B) = Q(\varphi(t_2 - t_0, x_2), t_0, B) = \\ &Q(x_2, t_2, B), \quad B \in \mathscr{E}. \end{aligned}$$

由(x_1,t_1),(x_2,t_2)的任意性,便证明了

$$Q(x_0,t,B) = Q(x,B), \quad B \in \mathscr{E}$$

与(x_0,t)的选择无关.

② 设$x \in E$为平衡点.注意到对任意的$t \in \mathbf{R}_+$,$\varphi(t,x) = x$成立,对任意的$0 < t_1 < t_2$,有

$$Q(x,t_2,B) = Q(\varphi(t_1,x),t_2 - t_1,B), \quad B \in \mathscr{E}$$

与t_1,t_2的选择无关.令其为$Q_e(x,B)$,则

$$Q(x,t,B) = Q_e(x,B), \quad B \in \mathscr{E}.$$

又若x同时也不是φ-交汇点,类似于①中证明可得

$$Q(x_0,t_0,B) = Q(x,B),$$

其中,t_0为φ从x_0出发首中平衡点x的时刻.而当$t > t_0$时,则有

$$Q(x_0,t,B) = Q(\varphi(t_0,x_0),t - t_0,B) =$$
$$Q(x,t - t_0,B) = Q_e(x,B).$$

对任意$B \in \mathscr{E}$成立.这就证明了定理.

注 直观上跳转移核Q刻画逐段决定马尔可夫过程沿半动力系统运动,击中某状态x而发生跳转移时跳达状态的分布.从证明中不难发现,此分布仅仅依赖于过程击中x前瞬间所划过的轨迹.因此,如果x为φ-交汇点,此分布不仅仅依赖x.同样地,首次击中平衡点x时的转移分布亦未必等于从此平衡点出发的转移分布$Q_e(x,\cdot)$.

5.标准逐段决定马尔可夫过程

由定理11.5.1,齐次逐段决定马尔可夫过程有如下等价定义.

定义6 设$X = (x(t,\omega),t < \tau)$为取值于Polish空间$(E,\mathscr{E})$的齐次逐段决定马尔可夫骨架过程,具有三元特征$(\varphi,F,Q)$.我们称$X$为**齐次逐段决定马尔可夫过程**,如果

(i) φ为E上的半动力系统;

(ii) $F = (F(x,\cdot))$为φ-无后记忆分布族;

(iii) $Q = (Q(x,t,\cdot))$为φ-时间推移不变转移核.

从本节前段的讨论我们看到,如果半动力系统φ在状态空间

中没有交汇点(此时 φ 为时间可逆的),则分布族 F 与跳转移核 Q 都具有较为理想的形式. 于是,我们引入标准逐段决定马尔可夫过程的概念.

定义 7 一个三元特征为(φ,F,Q)的齐次逐段决定马尔可夫过程称为**标准的**,若状态空间及其 φ- 流出边界$E\cup\partial^+ E$中没有 φ- 交汇点,且 φ- 平衡点均非 F- 跳点.

定理 7 设 $X=(X(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega))$ 为取值于Polish空间$(E,\mathscr{E})$上的标准逐段决定马尔可夫过程,具有三元特征(φ,F,Q).则

① 存在 E 上的非负 $\mathscr{E}$- 可测函数$\lambda(x)$,及 $a(x)$(满足 $a(x)=0,x\notin J(E)$)使得,对每个 $x\in E$,

$$F(x,t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\int_0^t\lambda(\varphi(s,x))\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-\Lambda^{\pi}(x,t)}\prod_{s\leqslant t}[1-a(\varphi(s,x))], & t\in[0,c(x));\\ 0, & t\in[c(x),\infty].\end{cases}$$

② 存在 $E\cup\partial^+ E$ 上的转移核$(Q(x,\cdot))_{x\in E}$满足:对固定的 $x\in E\cup\partial^+ E$,$Q(x,\cdot)$为$(E,\mathscr{E})$上的概率测度;对固定的 $B\in\mathscr{E}$,$Q(\cdot,B)$为 $E\cup\partial^+ E$ 上的可测函数使得,对每个 $x\in E$,

$$Q(x,t,B)=Q(\varphi(t,x),B),\quad t\in(0,c(x)],B\in\mathscr{E}.$$

证明 ① 由推论 2 得到.

② 由定理6的①,当$\varphi(t,x)\in E\cup\partial^+ E$不是平衡点时,(14)式成立;而当 $\varphi(t,x)\in E\cup\partial^+ E$ 为平衡点时,由定理 6 的 ②,

$$Q(x,t,B)=\begin{cases}Q(\varphi(t,x),B), & t=t_0;\\ Q_e(\varphi(t,x),B), & t>t_0.\end{cases}$$

其中,t_0 为 φ 从 x 出发首中 $\varphi(t,x)$ 的时刻.由于 $\varphi(t,x)$ 不是 F-跳点,$a(\varphi(t,x))=0$),再由 ① 有

$$F(x,\{t_0\})=0.$$

于是,修改 $Q(x,t,B)(B\in\mathscr{E})$ 在 $t=t_0$ 点的值为 $Q_e(\varphi(t_0,x),B)$ 不会影响过程的有限维分布.亦即,可取

$$Q(x,t,B)=Q_e(\varphi(t,x),B),\text{若 }\varphi(t,x)\text{ 为平衡点}.$$

于是，重新定义 $Q(x,B)$ 当 x 为平衡点时的值为 $Q_e(x,B)$，即得②. 这就证明了定理.

推论 3 如果标准逐段决定马尔可夫过程的三元特征(φ、F、Q)中的 $F=(F(x,\cdot))_{x\in E}$ 满足，对每个 $x\in E$，$F(x,\cdot)$ 的 Lebesgue 分解式中无连续奇异部分，则

$$\Lambda(x,t)=\int_0^t\lambda(\varphi(s,x))\mathrm{d}s+\sum_{s\leq t}a(\varphi(s,x)). \tag{14}$$

证明 这由定理 7 的 ① 及定理 4 立得.

§2 广义生成元与 Ito 公式

1. 广义生成算子

设 $X=(X(t,\omega),0\leq t<\tau)$ 为取值于 Polish 空间$(E,\mathscr{E})$ 的标准逐段决定齐次马尔可夫过程，三元特征为(φ,F,Q). 我们如下定义过程 $X_-=(X_-(t,\omega),0\leq t<\tau)$:

$$X_-(t,\omega)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi(t-\tau_n,X_{\tau_n})I_{[\tau_n<t\leq\tau_{n+1}]},0\leq t<\tau. \tag{1}$$

显然，如果 $t\neq\tau_n,n=1,2,\cdots$，则 $X_{t-}=X_t$；如果 $t=\tau_n$，$X_{\tau_n}-$ 表示"假如此时不发生随机跳，系统按动力系统 φ 演化应该处的状态"(其中，$X_{t-}=X_-(t,\omega)$). 换句话说，X_- 只是修改了 X 于随机跳时刻的值. 由定理 27.4.6 知 X_- 是可料过程.

引理 1 设 $X=(X(t,\omega),0\leq t<\tau)$ 为取值于 Polish 空间$(E,\mathscr{E})$ 的标准逐段决定马尔可夫过程，三元特征为(φ,F,Q). 则 X 相关跳跃过程的跳测度 μ 的可料对偶投影(或补偿子)

$$\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\Lambda(\mathrm{d}t)Q(X_{t-},\mathrm{d}x). \tag{2}$$

其中

$$\Lambda(\mathrm{d}t)=\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda(X_{\tau_n},\mathrm{d}t-\tau_n)I_{[\tau_n<t\leq\tau_{n+1}]}.$$

进一步地,若对任一 $x\in E$, X 的分布特征 $F(x,dt)$(关于 Lebesgue 测度)的分解式中无连续奇异部分,则

$$\Lambda([0,t])=\int_0^t\lambda(X_s)ds+\sum_{s\leq t}a(X_s),t\in\mathbf{R}_+. \tag{3}$$

证明 由 28.2.3 中的定义式及定义 1.1.2 后的讨论知

$$\nu(dt,dx)=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F(X_{\tau_n},dt-\tau_n)Q(X_{\tau_n},t-\tau_n,dx)}{F(X_{\tau_n},t-\tau_n-)}I_{[\tau_n<t\leq\tau_{n+1}]}=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda(X_{\tau_n},dt-\tau_n)Q(X_{\tau_n},t-\tau_n,dx)I_{[\tau_n<t\leq\tau_{n+1}]},$$

其中 $\Lambda(x,\cdot)$ 由(1.12)式定义.而由过程是标准的及定理7的②,得

$$Q(X_{\tau_n},t-\tau_n,\cdot)I_{[\tau_n<t\leq\tau_{n+1}]}=$$
$$Q(\varphi(t-\tau_n,X_{\tau_n}),\cdot)I_{[\tau_n<t\leq\tau_{n+1}]}=$$
$$Q(X_{t-},\cdot)I_{[\tau_n<t\leq\tau_{n+1}]}.$$

所以,

$$\nu(dt,dx)=$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda(X_{\tau_n},dt-\tau_n)I_{[\tau_n<t\leq\tau_{n+1}]}Q(X_{t-},dx)=$$
$$\Lambda(dt)Q(X_{t-},dx).$$

这便证明了引理的第一部分.

其次,当 $F(x,\cdot)(x\in E)$ 的 Lebesgue 分解式中无连续奇异部分时,由推论 1.3 知,

$$\Lambda(X_{\tau_n},t\wedge\tau_{n+1}-\tau_n)I_{[\tau_n<t\wedge\tau_{n+1}\leq\tau_{n+1}]}=$$
$$\int_0^{t\wedge\tau_{n+1}-\tau_n}\lambda(\varphi(s,X_{\tau_n}))dsI_{[\tau_n<t\wedge\tau_{n+1}\leq\tau_{n+1}]}+$$
$$\sum_{0<s\leq t\wedge\tau_{n+1}-\tau_n}a(\varphi(s,X_{\tau_n}))I_{[\tau_n<t\wedge\tau_{n+1}\leq\tau_{n+1}]}=$$
$$\int_0^{t\wedge\tau_{n+1}-\tau_n}\lambda(X_{\tau_n+s-})dsI_{[\tau_n<t\wedge\tau_{n+1}\leq\tau_{n+1}]}+$$

$$\sum_{0<s\leqslant \tau_{n+1}-\tau_n} a(X_{\tau_n+s-}) I_{[\tau_n<t\wedge\tau_{n+1}\leqslant\tau_{n+1}]} =$$

$$\int_{\tau_n}^{t\wedge\tau_{n+1}}\lambda(X_{s-})\mathrm{d}s I_{[\tau_n<t\wedge\tau_{n+1}\leqslant\tau_{n+1}]} +$$

$$\sum_{\tau_n<s\leqslant t\wedge\tau_{n+1}} a(X_{s-}) I_{[\tau_n<t\wedge\tau_{n+1}\leqslant\tau_{n+1}]}.$$

所以

$$\Lambda([0,t]) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Lambda(X_{\tau_n}, t\wedge\tau_{n+1}-\tau_n) I_{[\tau_n<t\wedge\tau_{n+1}\leqslant\tau_{n+1}]} =$$

$$\int_0^t\lambda(X_{s-})\mathrm{d}s + \sum_{s\leqslant t}a(X_{s-}),$$

对所有 $t\in\mathbf{R}_+$ 成立.证毕.

下面,我们给出 PDMP 的广义生成算子的定义.这里的概念较 Davis([4]p.32) 有所推广,目的在于使之适于研究非正则(即中断)过程.

定义 1 令 $\mathscr{D}(\mathrm{A})$ 表示满足如下性质的可测函数 $f: E\to \mathrm{R}$ 的集合:存在可测函数 $h_a: E\to\mathrm{R}$ 及可测函数 $h_d: E\cup\partial' E\to\mathrm{R}$,使得对每个 $x\in E$ 函数 $t\to h_a(X_t)$ 是 P_x-a.s.可积的,而函数 $t\to h_d(X_t)I_{[X_{t-}\in J]}$ 是可和的,且过程

$$C_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t h_a(X_s)\mathrm{d}s - \int_0^t h_d(X_{s-})\mathrm{d}p$$

是 τ- 前局部鞅,其中 p 为过程分布跳点的计数测度.则我们记 $h = \mathrm{A}f$,其中 $h=(h_a,h_d)$,$\mathrm{A}=(\mathrm{A}_{ac},\mathrm{A}_d)$,并称$(\mathrm{A},\mathscr{D}(\mathrm{A}))$ 为 PDMP$X=(X(t,\omega),0\leqslant t<\tau)$ 的**广义生成算子**.其中,A_{ac} 和 A_d 分别称为广义生成算子 A 的绝对连续部分和离散部分.

注 1 当 $\tau=+\infty$,P_x-a.s.对所有 $x\in E$ 成立且 $\mathrm{A}_d=0$时,此定义与 Davis([4]p.32) 一致.以往连续时间马尔科夫过程的生成算子概念均没有离散型部分.从下面定理 1 的证明中我们不难看到,产生离散部分的原因是因为允许跳时的分布有离散型部分.

而以往过程随机连续性的要求排除了跳时分布离散部分的存在性.

与第 28 章相同,我们仍令 $L_1^{loc}(\mathrm{d}\mu)$ 表示满足如下条件的函数 $g:\Omega\times\mathrm{R}_+\times E\to\mathrm{R}$ 的集合:

(i) 对任意的 $x\in E$, $g(\cdot,\cdot,x)$ 为可料过程;

(ii) 存在严格增的停时列 $\{T_n\}:T_n\nearrow\tau$, 使得对每个 n 有 $E\int_{R_+\times E_\Delta}|g|I_{(t\leq T_n)}\mathrm{d}\mu<+\infty$.

我们简记 $J=J(E)$, $\Gamma=\partial^+E$ 且仍对任一 $x\in E$,令

$c(x)=\inf\{t:F(x,t)=0\}=\inf\{t:P_x(\tau_1>t)=0\}$.

又记 $\mathscr{D}\mathscr{R}\mathscr{C}$ 为满足如下条件的可测函数 $f:E\to\mathrm{R}$ 的集合:

对任意 $x\in E$,函数 $t\to f(\varphi(t,x))$ 有如下分解

$$f(\varphi(t,x))=f_{ac}(\varphi(t,x))+f_d(\varphi(t,x)),$$

其中 $f_{ac}(\varphi(t,x))$ 为 $[0,c(x))$ 上的绝对连续函数, $f_d(\varphi(t,x))$ 为 $[0,c(x))$ 上的右连续跳跃函数,且跳点 t_i 满足 $\varphi(t_i,x)\in J$.

引理 2 设 φ 为 E 上无交汇点的半动力系统, $f:E\to\mathrm{R}$ 为可测函数.若对固定的 $x\in E$, $f(\varphi(t,x))$ 为 $[0,c(x))$ 上的绝对连续函数,则

$$f(\varphi(t,x))-f(\varphi(s,x))=\int_s^t\chi f(\varphi(u,x))\mathrm{d}u,\quad 0\leq s<t<c(x).$$

其中

$$\chi f(x)=\begin{cases}\dfrac{\partial^+f(\varphi(t,x))}{\partial t}\Big|_{t=0}, & \text{若}\dfrac{\partial^+f(\varphi(t,x))}{\partial t}\Big|_{t=0}\text{存在;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}\tag{4}$$

证明 注意到 φ 为半动力系统,

$$\frac{\partial^+f(\varphi(t,x))}{\partial t}=\frac{\partial^+f(\varphi(s,\varphi(t,x)))}{\partial s}\Big|_{s=0},$$

成立,只需等式两端有一个存在.又由绝对连续函数几乎处处可微

知,对任意 $x \in E$ 有

$$\frac{\partial^+ f(\varphi(t,x))}{\partial t} =$$

$$\chi f(\varphi(t,x)), \text{.a.e. 于}[0,c(x)).$$

于是,由实函数论的基本事实知,对任意的 $x \in E$,

$$f(\varphi(t,x)) - f(\varphi(s,x)) =$$

$$\int_s^t \chi f(\varphi(u,x))\mathrm{d}u, 0 \leqslant s \leqslant t < c(x).$$

证毕.

现在我们给出本节的主要结果,即给出广义生成算子 A 的表达式及其定义域 $\mathscr{D}(\mathrm{A})$ 的刻画.

定理 1 设 $X = (X(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau)$ 为一标准的 PDMP,且 X 的分布特征的分解式中无奇异部分.则 X 的广义生成算子 A 的定义域 $\mathscr{D}(\mathrm{A})$ 由满足如下条件的可测函数 $f: E \cup \Gamma \to \mathrm{R}$ 组成:

(i) $f \in \mathscr{RAC}$ 且在 $t = c(x)$ 点左连续;

(ii) (边界条件)$\mathrm{C}f(x) = 0, x \in \Gamma$,其中

$$\mathrm{C}f(x) = \int_E f(y)Q(x,\mathrm{d}y) - f(x), x \in E \cup \Gamma;$$

(iii) $\mathrm{B}f \in L_1^{\mathrm{loc}}(d\mu)$,其中

$$\mathrm{B}f(x,t,\omega) = f(x) - f(x_{t-}(\omega)).$$

对 $f \in \mathscr{D}(\mathrm{A})$, $\mathrm{A}f = (\mathrm{A}_{\mathrm{ac}}f, \mathrm{A}_{\mathrm{d}}f)$ 由下式给出

$$\mathrm{A}_{\mathrm{ac}}f(x) =$$

$$\chi f(x) + \lambda(x)\int_E (f(y) - f(x))Q(x,\mathrm{d}y). x \in E, \tag{5}$$

$$\mathrm{A}_{\mathrm{d}}f(x) = \Delta f(x) + a(x)\int_E (f(y) -$$

$$f(x))Q(x,\mathrm{d}y). x \in E \cup \Gamma, \tag{6}$$

其中

$$\chi f(x) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^+ f(\varphi(t,x))}{\partial t}\Big|_{t=0}, & \text{若}\dfrac{\partial^+ f(\varphi(t,x))}{\partial t}\Big|_{t=0}\text{存在;} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

而若 x_0, t_0 使得 $x = \varphi(t_0, x_0)$，则

$$\Delta f(x) = \Delta f(\varphi(t_0, x_0)) = f(\varphi(t_0, x_0)) - \lim_{s \uparrow t_0} f(\varphi(s, x_0)).$$

为 $f(\varphi(t, x_0))$ 在 t_0 点的跃度.

注 2 ① 由 f 的可测性及 X_- 的可料性知，对每个 $x \in E$，$\mathrm{B}f$ 为可料过程. $\mathrm{B}f$ 关于 μ 的积分为

$$\int_{E \times R_+} \mathrm{B}f\mu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(x_{\tau_n}) - f(x_{\tau_n -})).$$

于是，当对每个自然数 n

$$\mathbf{E}_x(\sum_{k=1}^{n} | f(x_{\tau_k}) - f(x_{\tau_k -}) |) < \infty,$$

或

$$\mathbf{E}_x(| \sum_{\tau_k \leq n} f(x_{\tau_k}) - f(x_{\tau_k -}) |) < \infty, \tag{7}$$

$(x \in E)$ 时，$\mathrm{B}f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$. 特别地，当 f 有界时 $\mathrm{B}f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$.

② 显然，当 $f \in \mathscr{RAC}$ 时，

$$\Delta f(x) = 0, x \notin J \setminus \Gamma.$$

在证明定理 1 之前，我们来叙述定理 1 的简单推论——PDMP 的 Ito 微分公式，它在 PDMP 的理论及其应用中起基本作用.

定理 2（PDMP 的 Ito 微分公式） 设 $X = (X(t, \omega), 0 \leq t < \tau)$ 为一标准的 PDMP，且 X 的分布特征的分解式中无连续奇异部分. 设 $f \in \mathscr{RAC}$ 且 $\mathrm{B}f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$，则对每个 $t \in \mathbf{R}^+$

$$\begin{aligned} & f(x_t) - f(x_0) = \\ & \int_0^t \mathrm{A}_{ac} f(x_s) \mathrm{d}s + \int_0^t \mathrm{A}_d f(x_{s-}) I_{[x_{s-} \in J \setminus \Gamma]} \mathrm{d}p + \\ & \int_0^t \int_E \mathrm{B}f \mathrm{d}(\mu - \nu) + \int_0^t \mathrm{C}f(x_{s-}) I_{[x_{s-} \in \Gamma]} \mathrm{d}p. \end{aligned}$$

其中，p 为过程击中分布跳点的计数测度. 特别地，如果(7) 成立，上式右端随机积分项是鞅.

证明 f 满足定理 1 中除边界条件外的全部条件. 类似于定理 1 前半段的证明即得本定理.

2.定理1的证明

定理1之证明 设$(\tilde{A},\mathscr{D}(\tilde{A}))$为PDMP$X=(X(t,\omega),0\leqslant t<\tau)$的广义生成算子.我们来证明$(\tilde{A},\mathscr{D}(\tilde{A}))=(A,\mathscr{D}(A))$.假设$f\in\mathscr{D}(A)$.由引理1,当$0\leqslant t<\tau(\omega)$时,有

$$\int_{[0,t]\times E}Bf\nu(dt,dx)=$$
$$\int_0^t\lambda(X_s)\int_E(f(y)-f(X_s))Q(X_s,dy)ds+$$
$$\int_0^t a(X_{s-})\int_E(f(y)-f(X_{s-}))Q(X_{s-},dy)dp.$$

而由边界条件,上式右端第二项为

$$\int_0^t a(X_{s-})\int_E(f(y)-f(X_{s-})Q(X_{s-},dy)I_{[X_{s-}\in J\setminus\Gamma]}dp.$$

此时,

$$\int_{[0,t]\times E}Bf\mu(dt,dx)=\sum_{\tau_k\leqslant t}(f(X_{\tau_k})-f(X_{\tau_k-})).$$

因此,当$0\leqslant t<\tau(\omega)$时,有

$$M_t^{Bf}=\int_{[0,t]\times E}Bfd(\mu-\nu)=$$
$$\sum_{\tau_k\leqslant t}(f(X_{\tau_k})-f(X_{\tau_k-}))-$$
$$\int_0^t\lambda(X_s)\int_E(f(y)-f(X_s))Q(X_s,dy)ds-$$
$$\int_0^t a(X_{s-})\int_E(f(y)-f(X_{s-}))Q(X_{s-},dy)I_{[X_{s-}\in J\setminus\Gamma]}dp. \quad (8)$$

故由条件(iii)及定理28.3.3,$M^{Bf}=(M_t^{Bf},0\leqslant t<\tau)$满足:存在一严格增的停时列$\{T_n\}(T_n\nearrow\tau)$,使得对每个$n$,$M_{t\wedge T_n}^{Bf}$为一致可积鞅.令$n=\max\{k:\tau_k\leqslant t\}$.则

$$\sum_{\tau_k\leqslant t}(f(X_{\tau_k}-f(X_{\tau_k-}))=$$
$$\{f(X_t)-f(X_{\tau_n})+\sum_{k=1}^{n}(f(X_{\tau_k})-f(X_{\tau_{k-1}}))\}-$$

$$\{f(X_t) - f(X_{\tau_n}) + \sum_{k=1}^{n}(f(X_{\tau_k -}) - f(X_{\tau_{k-1}}))\}.$$

上式右端第一个大括号项等于 $f(X_t) - f(X_0)$. 为计算第二个大括号项,注意到定理条件(i) 及 $X_{\tau_k -} = \varphi(\tau_k - \tau_{k-1}, X_{\tau_{k-1}})$,有

$$f(X_{\tau_k -}) - f(X_{\tau_{k-1}}) =$$

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f(\varphi(s - \tau_{k-1}, X_{\tau_{k-1}}))\mathrm{d}s + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \Delta f(X_{s-})\mathrm{d}p =$$

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \chi f(X_s)\mathrm{d}s + \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \Delta f(X_{s-})\mathrm{d}p.$$

因此,第二个大括号项

$$\{f(X_t) - f(X_{\tau_n}) + \sum_{k=1}^{n}(f(X_{\tau_k -}) - f(X_{\tau_{k-1}}))\} =$$

$$\int_0^t \chi f(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \Delta f(X_{s-})\mathrm{d}p.$$

于是,由(8) 式得

$$C_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathrm{A}_{ac} f(X_s)\mathrm{d}s -$$

$$\int_0^t \mathrm{A}_d f(X_{s-})\mathrm{d}p = M_t^g,$$

其中 $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{ac}, \mathrm{A}_d)$ 由(5),(6) 式给出. 所以 $f \in \mathscr{D}(\widetilde{\mathrm{A}})$ 且 $\widetilde{\mathrm{A}} f = \mathrm{A} f$.

反过来,设 $f \in \mathscr{D}(\widetilde{\mathrm{A}})$. 则过程

$$M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t h_a(X_s)\mathrm{d}s$$

$$- \int_0^t h_d(X_{s-})\mathrm{d}p, \quad 0 \leqslant t < \tau,$$

满足:存在一严格增加停时列 $\{T_n\}: T_n \nearrow \tau$,使得 $M_{t \wedge T_n}$ 为一致可积鞅,其中 $h = (h_a, h_d) = \widetilde{\mathrm{A}} f$. 由定理的 28.3.3,存在 $g \in L_1^{loc}(\mathrm{d}\mu)$ 使得 $M_t = M_t^g, 0 \leqslant t < \tau$,且有

$$M_t^g = \sum_{\tau_k \leqslant t} g(X_{\tau_k}, \tau_k, \omega) -$$

$$\int_0^t \lambda(X_s)\int_E g(y,s,\omega)Q(X_s,\mathrm{d}y)\mathrm{d}s -$$

$$\int_0^t a(X_{s-})\int_E g(y,s,\omega)Q(X_{s-},\mathrm{d}y)\mathrm{d}p. \tag{10}$$

因为 $M_t = M_t^g$,故 $\Delta M_t = \Delta M_t^g$.显然,

$$\Delta M_t = f(X_t) - f(X_{t-}) + \Delta f(X_{t-}) - h_d(X_{t-}),$$

$$\Delta M_t^g = g(X_t,t,\omega) - a(X_{t-})\int_E g(y,t,\omega)Q(X_{t-},\mathrm{d}y).$$

因此,当 $X_{t-} \notin J\cup\Gamma$ 时,$g(X_t,t,\omega) = f(X_t) - f(X_{t-}$.这说明,若 $x \notin J\cup\Gamma$,则 $g(x,t,\omega) = f(x) - f(X_{t-})$.假设 $z = X_{t-} \in J\cup\Gamma$.则

$$f(X_t) - f(z) + \Delta f(z) - h_d(z) =$$

$$g(X_t,t,\omega) - a(z)\int_E g(y,t,\omega)Q(z,\mathrm{d}y).$$

因此,

$$f(x) - f(z) + \Delta f(z) - h_d(z) =$$

$$g(x,t,\omega) - a(z)\int_E g(y,t,\omega)Q(z,\mathrm{d}y). \tag{11}$$

令

$$\tilde{g}(x,t,\omega) =$$

$$g(x,t,\omega) - (f(x) - f(z)) - \Delta f(z) + h_d(z).$$

则由(11)式,有

$$\tilde{g}(x,t,\omega) = a(z)\int_E g(y,t,\omega)Q(z,\mathrm{d}y)$$

不依赖于 x.因此,$\tilde{g}(x,t,\omega) = a(t,\omega)$.所以 g 的一般表达式为

$$g(x,t,\omega) = f(x) - f(X_{t-}) + \Delta f(X_{t-}) -$$

$$h_d(X_{t-}) + a(t,\omega)I_{[X_{t-}\in J]}. \tag{12}$$

代入(11)式,得

$$a(t,\omega)I_{[X_{t-}\in J]} =$$

$$a(X_{t-})a(t,\omega)I_{[X_{t-}\in J]} + a(X_{t-})\Delta f(X_{t-}) -$$

$$a(X_{t-})h_d(X_{t-}) + a(X_{t-})\int_E(f(y) -$$

$$f(X_{t-}))Q(X_{t-},\mathrm{d}y).$$

注意到，当 $z\in\Gamma$ 时，$a(z)=1$；当 $z\in J\setminus\Gamma$ 时，$0<a(z)<1$，由上式即得

$$a(t,\omega)I_{(X_{t-}\in J\setminus\Gamma(E))} =$$

$$\frac{a(X_{t-})}{1-a(X_{t-})}\{\Delta f(X_{t-}) - h_d(X_{t-}) +$$

$$\int_E(f(y)-f(X_{t-}))Q(X_{t-},\mathrm{d}y)I_{(X_{t-}\in J)}\}, \tag{13}$$

$$\int_E(f(y)-f(x))Q(x,\mathrm{d}y) = 0, x\in\Gamma.$$

于是证明了 f 满足边界条件(ii).将(12)再代入(10)式，并注意到对任意的 $\omega\in\Omega$，至多有可列个时刻 t 使 $X_{t-}\in J(E)$，经简单计算可得

$$M_t^g = \sum_{\tau_k\leqslant t}(f(X_{\tau_k}) - f(X_{\tau_k-})) - \int_0^t\lambda(X_s)\mathrm{C}f(X_{s-})\mathrm{d}s -$$

$$\int_0^t a(X_{s-})\mathrm{C}f(X_{s-})\mathrm{d}p + \sum_{\tau_k\leqslant t}\frac{1}{1-a(X_{\tau_{k-}})}[\Delta f(X_{\tau_{k-}}) +$$

$$a(X_{\tau_{k-}})\mathrm{C}f(X_{\tau_{k-}}) - h_d(X_{\tau_k-})] - \int_0^t\frac{a(X_{s-})}{1-a(X_{\tau_i})}[\Delta f(X_{s-}) +$$

$$a(X_{s-})\mathrm{C}f(X_{s-}) - h(X_{s-})]\mathrm{d}p. \tag{14}$$

我们还发现上式左端不依赖于 $a(s,\omega)$ 当 $X_{s-}\in\Gamma(E)$ 时的值，可以取 $a(s,\omega)=0$ 若 $X_{s-}\in\Gamma$.

考虑过程 M_t 与 M_t^g 在 $[0,\tau_1(\omega))$ 上的样本轨道.假设PDMP从状态 $x\in E$ 出发.这时，

$$M_t = f(\varphi(t,x)) - f(x) + \int_0^t h_a(\varphi(s,x))\mathrm{d}s +$$

$$\int_0^t h_d(\varphi(s,x))\mathrm{d}p,$$

同时,由(14)式,有

$$M_t^g = -\int_0^t \lambda(\varphi(s,x))\mathrm{C}f(\varphi(s,x))\mathrm{d}s -$$

$$\int_0^t a(\varphi(s,x))\mathrm{C}f(\varphi(s,x))\mathrm{d}p -$$

$$\int_0^t \frac{a(\varphi(s,x))}{1-a(\varphi(s,x))}(\Delta f(\varphi(s,x)) +$$

$$a(\varphi(s,x))\mathrm{C}f(\varphi(s,x)) - h_a(\varphi(s,x)))\mathrm{d}p.$$

由于 $M_t = M_t^g$ 关于 t 几乎处处成立,函数

$$f(\varphi(t,x)) = f_{ac}(\varphi(t,x)) + f_d(\varphi(t,x)),$$

其中,

$$f_{ac}(\varphi(t,x)) = -\int_0^t h(\varphi(s,x))\mathrm{d}s +$$

$$\int_0^t \lambda(\varphi(s,x))\mathrm{C}f(\varphi(s,x))\mathrm{d}s$$

为$[0,c(x))$上的绝对连续函数;而

$$f_d(\varphi(t,x)) = f(x) - \int_0^t a(\varphi(s,x))\mathrm{C}f(\varphi(s,x))\mathrm{d}p -$$

$$\int_0^t \frac{a(\varphi(s,x))}{1-a(\varphi(s,x))}(\Delta f(\varphi(s,x)) + a(\varphi(s,x)) \times$$

$$\mathrm{C}f(\varphi(s,x)) - h_a(\varphi(s,x)))\mathrm{d}p.$$

为$[0,c(x))$上的右连续跳跃函数,且跳点 t_i 满足 $\varphi(t_i,x) \in J.\varphi$ 这就证明了 $f \in \mathscr{PAC}$.

类似前半段证明的推演可得

$$\sum_{\tau_k \le t}(f(X_{\tau_k}) - f(X_{\tau_k -})) =$$

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \chi f(X_s)\mathrm{d}s - \int_0^t \Delta f(X_{s-})\mathrm{d}p.$$

代入(14)即得

$$M_t^g = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathrm{A}_{ac} f(X_s)\mathrm{d}s -$$

$$\int_0^t A_d f(X_{s-})\mathrm{d}p + \sum_{\tau_k \leqslant t} \frac{1}{1 - a(X_{\tau_k})}(A_d f(X_{k-}) -$$

$$h(X_{k-})) - \int_0^t \frac{a(X_{s-})}{1 - a(X_{s-})}(A_d f(X_{s-}) - h(X_{s-})). \qquad (15)$$

再与 M_t 对照可见 $h_{ac} = A_{ac} f$. 于是

$$0 = M_t - M_t^g = -\int_0^t (h_d(X_{s-}) - A_d f(X_{s-})) +$$

$$\sum_{\tau_k \leqslant t} \frac{1}{1 - a(X_{\tau_k -})}(h_d(X_{\tau_k -}) - A_d f(X_{k-})) -$$

$$\int_0^t \frac{a(X_{s-})}{1 - a(X_{s-})}(h(X_{s-}) - A_d f(X_{s-}))\mathrm{d}p =$$

$$-\int_0^t \frac{1}{1 - a(X_{s-})}(h(X_{s-}) - A_d f(X_{s-}))\mathrm{d}p +$$

$$\sum_{\tau_k \leqslant t} \frac{1}{1 - a(X_{\tau_k -})}(h(X_{k-}) - A_d f(X_{k-})).$$

考虑 $M_t - M_t^g$ 在 $[0, \tau_1(\omega))$ 上的轨道可见, 对任意的 $x \in E$, $h_d(\varphi(t,x)) = A_d f(\varphi(t,x)), t \in [0, c(x))$. 所以, $h_d(z) = A_d f(z), z \in J$. 故由(15)式, 对所有 $t \geqslant 0$,

$$M_t^g = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t A_{ac} f(X_s)\mathrm{d}s -$$

$$\int_0^t A_d f(X_{s-})\mathrm{d}p.$$

再将 $h_d(z) = A_d f(z), z \in J$ 代入(13)即得

$$a(t,\omega) I_{(X_{t-} \in J} = a(X_{t-}) C f(X_{t-}).$$

于是, 由(12)式即得

$$g(x,t,\omega) = f(x) - f(x_{t-}(\omega)).$$

从而条件(iii)得证. 因此, $f \in \mathscr{D}(A)$ 且 $(\tilde{A}, \mathscr{D}(\tilde{A})) = (A, \mathscr{D}(A))$. 这就证明了定理.

§3 一类积分型泛函的期望与脉冲积分微分方程

设 $X=(X(t),0\leqslant t<\tau)$ 为逐段决定马尔可夫过程(简记为PDMP).本节主要研究如下积分型泛函的期望值的计算问题

$$V(x)=\mathbf{E}_x\left\{\int_0^\tau l(X_t)\mathrm{d}t+\int_0^\tau c(X_{t-})\mathrm{d}p\right\},\tag{1}$$

其中 l,c 是给定的函数,p 为过程击中分布跳点的计数测度.这个泛函经常作为值函数(报酬函数、费用函数等)出现在随机服务系统、随机优化与控制理论中.它蕴含了许多表面上不同的过程泛函作为特例.

首先,我们讨论一般 PDMP 的变换.这些过程的变换在马尔可夫过程理论中是标准的(参见 Williams[1] 或 Davis[4]).这里的目的是说明(1)定义的期望具有相当的一般性,许多表面不同的过程泛函期望值可化为这种形式.本节的核心是证明了,在一定条件下,V 与过程的半动力系统的复合(关于 t)是逐段绝对连续的,而且满足一脉冲积分－微分方程(组).当过程的分布特征 F(首次随机跳时 τ_1 的分布函数)为绝对连续型时,这一方程成为(不带脉冲的)积分－微分方程;而当 F 为纯离散型时,此方程成为脉冲微分方程.而脉冲微分方程的求解亦成为泛函常微分方程理论新的热点(参见郭大钧,孙经先,刘兆理[1].作为在特殊情形的应用,分别讨论了有限时间水平(finite time horizon)和折扣(discount)问题.给出了这两种情形相应脉冲积分－微分方程的形式.

为了讨论的方便,我们先给出本节的基本假设如下:

基本假设 (i) 过程 X 是标准的 PDMP;

(ii) 对任意 $x\in E$,X 的首次随机跳时 τ_1 的分布函数 $F(x,t)=P_x(\tau_1>t)$ 的 Lebesgue 分解式中不含奇异连续部分;

(iii) 对固定的 $x\in E$,$F(x,t)$ 的跳点的集合至多有一个聚点 $c(x)$.其中,$c(x)=\inf(t>0:F(x,t)=0)$.

为了叙述上的方便,我们总是通过在状态空间增加一个孤立点Δ,并令$X_t(\omega)=\Delta,\tau\leqslant t<+\infty$,将过程正则化.并且,在不致引起混淆的情况下,我们不加区分的与原过程使用同一记号X.

最后指出,我们将沿用上一节的记号.

1.PDMP 的变换

1) 非齐次过程的齐次化

一种经常发生的情况是,逐段决定过程$X=(x(t),0\leqslant t<\tau)$相应的三元特征不仅依赖当前状态而且依赖于到达该状态x的时间t.一个化为 PDMP 的标准方法是扩大状态空间E到$E\times R_+$,定义一个辅助 PDMP.$\tilde{X}=(\tilde{x}(t),0\leqslant t<\tau)$,其中

$$\tilde{x}(t)=(t,x(t)),0\leqslant t<\tau.$$

这时新的过程$\tilde{X}$的状态空间$\tilde{E}=R_+\times E$.$\tilde{X}$的局部特征

$$\tilde{\varphi}(u,\tilde{x})=$$

$$(t+u,\varphi(u;t,x)),\tilde{\lambda}(\tilde{x})=\lambda(t,x),$$

$$a(\tilde{x})=a(t,x),\tilde{Q}(\tilde{x};\{t\}\times A)=Q((t,x);A).$$

则$\tilde{X}$的(广义)生成算子

$$\tilde{A}_{\alpha}f(\tilde{x})=\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)+A_{\alpha}f(t,x),$$

其中A_d由 §4.2 的(5)式给出,即

$$A_{\alpha}f(t,x)=$$

$$\chi f(t,x)+\lambda(t,x)\int_E(f(t,y)-f(t,x))Q(t,x;dy),$$

$$A_df(t,x)=$$

$$\Delta f(t,x)+a(t,x)\int_E(f(t,y)-f(t,x))Q(t,x;dy).$$

一般地,当处理非时齐过程时,我们将(广义)生成算子简记为

$$\tilde{A}_{\alpha}f(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}f(t,x)+A_{\alpha}f(t,x),\tag{2}$$

因为任意非时齐马尔可夫过程均可通过加入时间变量而时齐化,所以我们一般地只讨论时齐过程.

2）中断过程

在应用中，经常要求 PDMP 的期望折扣报酬(或费用)

$$V(x) = \mathbf{E}_x\int_0^\infty \exp(-\int_0^t \delta(X_s)\mathrm{d}s)l(X_t)\mathrm{d}t,$$

其中 $l:E\to\mathrm{R}_+$ 为给定可测函数，折扣率 $\delta:E\to\mathrm{R}_+$ 为可测函数且满足，对任意 $x\in E$，存在 $\varepsilon>0$ 使 $\delta(\varphi(t,x))$ 在$[0,\varepsilon]$上可积．易见

$$\alpha_t := \exp(-\int_0^t \delta(X_s)\mathrm{d}s) \tag{3}$$

定义一个 PDMPX 的可乘泛函．由此可乘泛函可定义一状态空间为 $E_\Delta = E\cup\{\Delta\}$ 的辅助过程 $\tilde{X} = (\tilde{x}_t, 0\leqslant t<+\infty)$：

$$\tilde{x}_t = \begin{cases} X_t, t<\sigma; \\ \Delta, t\geqslant\sigma, \end{cases} \tag{4}$$

为 X 在 σ 时刻中断的过程，其中 Δ 为一孤立点．容易证明，中断过程 $\tilde{X}$ 为 E_Δ 上的 PDMP，其局部特征为

$$\begin{aligned} &\tilde{Q}(x,\mathrm{d}y) = \\ &\frac{\lambda(x)}{\lambda(x)+\delta(x)}Q(x,\mathrm{d}y), \tilde{Q}(x,\{\Delta\}) = \\ &\frac{\delta(x)}{\lambda(x)+\delta(x)}; \\ &\tilde{\lambda}(x) = \lambda(x)+\delta(x), \tilde{a}(x) = a(x). \end{aligned} \tag{5}$$

(广义)生成算子为

$$\tilde{\mathrm{A}}_{ac}f(x) = \mathrm{A}_{ac}f(x) - \delta(x)f(x), \tilde{\mathrm{A}}_d f(x) = \mathrm{A}_d f(x).$$

其中 A 为原过程 X 的(广义)生成算子．

定理 1　设 $X = (X_t, 0\leqslant t<\tau)$ 为满足基本假设的 PDMP，$\tilde{X} = (\tilde{x}_t, 0\leqslant t<\infty)$ 为由(4)式定义的 X 的中断过程，其中 $\delta:E\to\mathrm{R}_+$ 满足对任意 $x\in E$ 存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\delta(\varphi(t,x))$ 在$[0,\varepsilon]$上可积．又设 $l:E\to\mathrm{R}_+$ 及 $c:J\cup\Gamma\to\mathrm{R}_+$ 为可测函数．对每个 $x\in E$ 有

$$\mathbf{E}_x\{\int_0^\infty \exp[-\int_0^t \delta(X_s)\mathrm{d}s]l(X_t)\mathrm{d}t +$$

$$\exp(-\int_0^t \delta(X_s)\mathrm{d}s)c(X_t)I_{(X_{t-}\in J\cup\Gamma)}\mathrm{d}p\} =$$

$$\mathbf{E}_x\{\int_0^\infty l(\tilde{x}_t)\mathrm{d}t + \int_0^\infty c(\tilde{x}_{t-})\mathrm{d}\tilde{p}\}, \tag{7}$$

(约定, $l(\Delta) = c(\Delta) = 0$) 其中, $p, \tilde{p}$ 分别为过程 $X, \tilde{X}$ 击中分布跳点的计数测度. (7) 式两端可取 $+\infty$.

证明 显然给定 $\mathscr{F}_\infty = \sigma(X_t, t \geqslant 0)$ 的 σ 的条件分布

$$P(\sigma > t \mid \mathscr{F}_\infty) = \alpha(t) = \exp(-\int_0^t \delta(X_s)\mathrm{d}s)$$

在 $[0,\infty)$ 上具有条件密度函数 $\delta(X_t)\alpha(t)$, 且 $P_x(\tau = \infty \mid \mathscr{F}_\infty) = \alpha(\infty)$. 所以

$$\mathbf{E}_x\{\int_0^\infty l(\tilde{x}_t)\mathrm{d}t\} = \mathbf{E}_x\{\int_0^\sigma l(X_t)\mathrm{d}t\} =$$

$$\mathbf{E}_x\{\mathbf{E}_x[\int_0^\sigma l(X_t)\mathrm{d}t \mid \mathscr{F}_\infty]\} =$$

$$\mathbf{E}_x\{\alpha(\infty)\int_0^\infty l(X_t)\mathrm{d}t +$$

$$\int_0^\infty \delta(X_s)\alpha(X_s)\int_0^s l(X_t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\} = \mathbf{E}_x\{\int_0^\infty \alpha(t)l(X_t)\mathrm{d}t\}.$$

类似地,

$$\mathbf{E}_x\{c(\tilde{x}_{t-})I_{(\tilde{x}_{t-}\in J\cup\Gamma)}\mathrm{d}\tilde{p}\} =$$

$$\mathbf{E}_x\{\sum_{i=1}^\infty c(X_{\tau_i-})I_{(X_{\tau_i-}\in J\cup\Gamma)}I_{(\tau_i<\sigma)}\} =$$

$$\mathbf{E}_x\{\sum_{i=1}^\infty c(X_{\tau_i-})I_{(X_{\tau_i-}\in J\cup\Gamma)}P_x(\sigma > \tau_i \mid \mathscr{F}_\infty)\} =$$

$$\mathbf{E}_x\{\sum_{i=1}^\infty c(X_{\tau_i-})I_{(X_{\tau_i-}\in J\cup\Gamma)}\alpha(\tau_i)\} =$$

$$\mathbf{E}_x\{\int_0^\infty \alpha(t)c(X_{t-})I_{(\tilde{x}_{t-}\in J\cup\Gamma)}\mathrm{d}p\}.$$

这就证明了定理.

3) 仅依赖过程随机跳的泛函

下面讨论如下形式的泛函

$$J(x) = E_x \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\delta\tau_i} b(X_{\tau_i}, X_{\tau_i -}). \tag{8}$$

借助于相关跳过程的跳测度,上式可改写为

$$J(x) = \mathbf{E}_x \int_0^{\infty} \int_E e^{-\delta t} b(y, X_{t-}) \mu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y).$$

由一般跳跃过程的鞅的积分理论可知,如果 $f \in L_1(\mathrm{d}\mu)$(其中,$f(t,y,\omega) = e^{-\delta t} b(y, X_{t-}(\omega))$),则 $f \in L_1(\mathrm{d}\nu)$ 且

$$J(x) = \mathbf{E}_x \int_0^{\infty} \int_E e^{-\delta t} b(y, X_{t-}) \nu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y),$$

这里 ν 为随机测度 μ 的补偿子.注意到本章基本假设,有

$$\nu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}y) = \lambda(X_t) Q(X_t, \mathrm{d}y)\mathrm{d}t + a(X_{t-}) Q(X_{t-}, \mathrm{d}y).$$

因此,

$$J(x) = \mathbf{E}_x \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \int_E b(y, X_t) Q(X_t, \mathrm{d}y) \lambda(X_t) \mathrm{d}t + \int_0^{\infty} \int_E b(y, X_t) Q(X_t, \mathrm{d}y) a(X_{t-}) \mathrm{d}p \right\} =$$

$$\mathbf{E}_x \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\delta t} l(X_t) \mathrm{d}t + \int_0^{\infty} e^{-\delta t} c(X_{t-}) \mathrm{d}p \right\}, \tag{9}$$

其中

$$l(x) = \lambda(x) \int_E b(y, X_t) Q(x, \mathrm{d}y), x \in E \setminus (J \cup \Gamma),$$

$$c(x) = a(x) \int_E b(y, x) Q(x, \mathrm{d}y), x \in J \cup \Gamma.$$

所以形如(9)的泛函包含(8)定义的 $J(x)$ 作为特例.这也是我们在(1)中增加过程击中分布跳点与边界点($J \cup \Gamma$),而不仅仅是边界点(Γ)的原因.

2 主要定理

定理 2 设 $l: E \to \mathrm{R}_+$, $c: J \cup \Gamma \to \mathrm{R}_+$ 为可测函数.假定对每个 $x \in E$,函数 $t \to l(\varphi(t,x))$ 在区间$[0, c(x))$ 可积;(1)式定义的函数 V 是有界的.则 $V \in \mathscr{P\!A\!C}$ 且满足

$$A_{\omega}V(x)+l(x)=0, x\in E, \tag{10}$$

$$A_{d}V(x)+a(x)c(x)=0, x\in J, \tag{11}$$

及边界条件

$$CV(x)+c(x)=0, x\in \Gamma. \tag{12}$$

(11) 式的另一种表达方式为

$$\Delta V(x)=-a(x)(CV(x)+c(x)), x\in J.$$

其中，$\Delta V(x)=V(x)-\lim_{t\downarrow 0}V(\varphi(-t,x))$ 为函数 V 的跃度. 因此，(10) ~ (12) 式就组成一脉冲积分 — 微分方程(组). 值得注意的是，当过程的首次随机跳时 τ_1 的分布为离散型分布时，方程(10)不再含有积分项. 这时，方程(10) ~ (12) 退化为脉冲微分方程；当过程的首次随机跳时 τ_1 的分布不含离散部分时，脉冲方程(11) 就从方程组中消失了，方程退化为积分 — 微分方程.

证明　对固定的 $x\in E$ 由基本假设(iii) 有，$0<s_1(x)$，这里

$$s_1(x)=\inf(t:\varphi(t,x)\in J, t\leqslant c(x)).$$

在不致引起混淆的情况下，我们对可测函数 $f(\varphi(t,x))$，$t\geqslant 0$ 将使用简单记号 $f(t):=f(\varphi(t,x))$(于是 $f(0)=f(x)$). 取 $t_1\in(0,s_1(x))$ 使得函数 $s\to\lambda(s)$，$s\to l(s)$ 在 $[0,t_1]$ 上可积. 由强马尔可夫性，对任意 $t\leqslant t_1$ 函数 $V(x)$ 满足

$$V(x)=\mathbf{E}_x\left\{\int_0^{\tau_1\wedge t}l(X_s)\mathrm{d}s+V(X_{\tau_1\wedge t})\right\}=$$

$$\mathbf{E}_x\left\{\int_0^{\tau_1\wedge t}l(X_s)\mathrm{d}s+V(t)I_{(t<\tau_1)}+QV(\tau_1)I_{(t\geqslant\tau_1)}\right\}.$$

这里，τ_1 为过程的首次随机跳时刻. 因此

$$V(0)(:=V(x))=$$

$$\int_0^t l(s)\mathrm{d}sF(t)+\int_0^t\lambda(s)F(s)\int_0^s l(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s+$$

$$V(t)F(t)+\int_0^t\lambda(s)F(s)QV(s)\mathrm{d}s,$$

等价地，

$$V(t) = \frac{V(0)}{F(t)} + \frac{1}{F(t)}\int_0^t g(s)F(s)\mathrm{d}s. \tag{13}$$

其中，$g(s) = -(l(s) + \lambda(s)QV(s))$. 如果 V 是有界的，则 g 在 $[0, t_1]$ 上是可积的. 利用(13)通过计算积分 $\int_0^t \lambda(s)V(s)\mathrm{d}s$，可证明 V 满足

$$V(t) - V(0) = \int_0^t \lambda(s)V(s)\mathrm{d}s + \int_0^t g(s)\mathrm{d}s. \tag{14}$$

因此，在 $[0, t_1]$ 上 V 是绝对连续的，且其(关于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym)导数为 $(\lambda(t)V(t) + g(t))$. 这便证明了(10)式.

现在，我们来证明 V 满足关于分布跳点跃度的(11)式. 取 $z \in J$. 固定 $t > 0$ 且令 x 使得 $\varphi(t, x) = z$ 且 $t = s_1(x)$. 由强马尔可夫性，

$$V(x) = \mathbf{E}_x\left\{\int_0^{s_1 \wedge \tau_1} l(X_s)\mathrm{d}s + c(\tau_1)I_{(\tau_1 = s_1)} + V(X_{\tau_1 \wedge s_1})\right\} =$$

$$\int_0^{s_1} l(s)\mathrm{d}sF(s_1 -) - \int_0^{s_1}\int_0^s l(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}F(s -) +$$

$$c(s_1)a(s_1)F(s_1 -) + v(s_1)F(s_1) -$$

$$\int_0^{s_1} QV(s)\mathrm{d}F(s -) + F(s_1 -)a(s_1)QV(s_1).$$

容易验证，当 $t \downarrow 0$ 时，上式右端收敛到

$$0 - 0 + c(z)a(z) + V(z)(1 - a(z)) - 0 + a(z)QV(z) =$$

$$V(z) + a(z)c(z) + a(z)CV(z).$$

因此，$\lim_{t \downarrow 0} V(\varphi(-t, z))$ 存在. 故得

$$\Delta V(x) = -a(x)(CV(x) + c(x)), x \in J.$$

这就证明了(11)式.

其次，取 $z \in \Gamma$，固定 $t > 0$ 且令 $x = \varphi(-t, z)$. 同样由强马尔可夫性，

$$V(x) = \mathbf{E}_x\left\{\int_0^{\tau_1} l(s)\mathrm{d}s + QV(X_{\tau_1 -}) + c(z)I_{(\tau_1 = c(x))} + \right.$$

$$\left.\sum_n c(s_n)I_{(\tau_1 = s_n)}\right\} =$$

$$- \int_0^{c(x)} [\int_0^s l(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}F(s) - \int_0^{c(x)} QV(s)\mathrm{d}F(s-) +$$

$$c(z)F(c(x)-) + \sum_n c(s_n)F(s_n -)a(s_n) =$$

$$- \int_0^{c(x)} [\int_0^s l(u)du]\mathrm{d}F(s) + \int_0^{c(x)} QV(s)F(s-)\lambda(s)\mathrm{d}s +$$

$$\sum_n F(s_n -)a(s_n)QV(s_n) + F(c(x)-)QV(z) +$$

$$c(z)F(c(x)-) + \sum_n F(s_n -)a(s_n)c(s_n -).$$

注意到 V 的有界性，容易验证，当 $t \downarrow 0$ 时上式右端收敛到 $QV(z) + c(z)$. 于是 $V(z) := \lim_{t \downarrow 0} V(\varphi(-t, z))$ 存在，故得(12) 式. 从而，$V \in \mathscr{PAC}$. 这就完成了定理的证明.

3. 两个特殊积分型泛函的期望

下面我们研究特殊情形. 首先，我们讨论有限时间水平(finite time horizon) 如下期望值的计算问题

$$V_1(t, x) =$$

$$\mathbf{E}_{(t,x)} \{\int_t^{t_f} l(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_t^{t_f} c(s, X_{s-})\mathrm{d}p + \Phi(X_{t_f})\}. \quad (15)$$

这时，问题的适用范围可推广到(X_t) 的三个特征依赖于时间 t 的情形. 由 1.1)，可构造新的过程 $\tilde{X} = (\tilde{x}_t)$，使得 $\tilde{X}$ 的(广义) 生成算子为

$$\tilde{\mathrm{A}}_{ac} f(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) + \mathrm{A}_{ac} f(t, x).$$

对固定的时刻 t_f，考虑 $\tilde{X}$ 在 t_f 中断的过程(仍记为 $\tilde{X}$). 这时，状态空间 $\tilde{E} := ([0, t_f] \times E)$，$\tilde{\Gamma} := ([0, t_f] \times \Gamma) \cup (\{t_f\} \times E)$. 于是方程(10) ~ (12) 成为

$$\frac{\partial}{\partial t} V_1(t, x) + \mathrm{A}_{ac} V_1(t, x) + l(t, x) = 0,$$

$$x \in E, t \in [0, t_f), \quad (16)$$

$$\Delta V_1(t, z) =$$

$$- a(t, z)(\mathrm{C}V_1(t, z) - c(z)), z \in J, t \in [0, t_f), \quad (17)$$

与边界条件

$$CV_1(t,z)+c(t,z)=0,z\in\Gamma,t\in[0,t_f), \tag{18}$$

$$V_1(t_f,x)=\Phi(x),x\in E. \tag{19}$$

此时,若 l,c,Φ 是有界的且 $c\equiv 0$ 或

$$\sup_{x\in E}E_xN_{t_f}<+\infty \tag{20}$$

则 V_1 是有界的(其中,N_t 为过程随机跳的计数过程).下面结果是定理2的简单推论.

定理3 在基本假设下,如果 $l:\mathrm{R}_+\times E\to\mathrm{R}_+$,$c:\mathrm{R}_+\times(J\cup\Gamma)\to\mathrm{R}_+$,$\Phi:E\to\mathrm{R}_+$ 为有界可测函数且 $c\equiv 0$ 或(20)式满足,则(15)式定义的 $V_1\in\mathscr{RBC}$ 且是方程(16)~(19)的解.

其次,我们类似讨论折扣情形.为了记号的简单,我们仅讨论定常折扣率 $\delta>0$ 的情形.折扣率 $\delta(x)$ 依赖于状态情形的讨论完全类似.我们考虑泛函

$$V_2(x)=\mathbf{E}_x\left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t}l(X_t)\mathrm{d}t+\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t}c(X_{t-})\mathrm{d}p\right\}, \tag{21}$$

其中,l,c 满足 $0\leqslant l,c\leqslant K$.同样地,用过程变换方法构造新的PDMP,$\tilde{X}=(\tilde{x}_t,0\leqslant t<\tilde{\tau}))$.由1.2小节的讨论,新过程 $\tilde{X}$ 的(广义)生成算子

$$\tilde{A}_\infty f(x)=\mathrm{A}_\infty f(x)-\delta f(x).$$

我们知道

$$V_2(x)=\mathbf{E}_x\left\{\int_0^\infty l(\tilde{x}_t)\mathrm{d}t+\int_0^\infty c(\tilde{x}_{t-})\mathrm{d}p\right\}.$$

因此,(10)~(12)成为

$$\mathrm{A}_\infty f(x)-\delta f(x)+l(x)=0,x\in E; \tag{22}$$

$$\Delta f(z)=-a(z)(\mathrm{C}f(z)+c(z)),z\in J; \tag{23}$$

$$\mathrm{C}f(z)+c(z)=0,z\in\Gamma. \tag{24}$$

由定理2及上述讨论,我们得到如下定理:

定理4 在基本假设下,如果 $l:E\to\mathrm{R}_+$,$c:J\cup\Gamma\to\mathrm{R}_+$ 为有界可测函数且 $c\equiv 0$ 或(20)式满足,则(21)式定义的 $V_2\in\mathscr{RBC}$ 且

是方程(22) ~ (24)的解.

§4 平稳分布

1.基本假设与记号

设 $X = (x(t), 0 \leq t < \tau)$ 为状态空间$(E, \mathscr{E})(E \subset \mathrm{R}^d)$上三元特征为$(\varphi, F, Q)$的标准 PDMP.此时,刻画过程随机跳间决定性运动的半动力系统 φ 在E中没有φ - 交汇点.于是,X的演化由三元特征决定:

(i) 从 x 出发的 PDMP.X 按$\varphi(t, x)$运动到随机时刻 τ_1;

(ii) τ_1 的分布满足 $P_x(\tau_1 > t) = F(x, t)$;

(iii) 过程 X 按转移概率$Q(\varphi(\tau_1, x), \cdot)$跳达状态 $z_1 = X_{\tau_1}$.

过程再从跳达的状态 z_1 重新开始作如上运动.依此类推,我们得到一列随机跳时 τ_n 及跳达的状态 $z_n = X_{\tau_n}$.我们称 $Z = (z_n)_{n \geq 0}$(约定 $z_0 = X_0$)为 PDMP.X 的**嵌入链**.显然,Z为齐次马尔可夫链且有一步转移概率$p(x, \cdot)$:对任意 $A \in \mathscr{E}$有

$$p(x, A) = P_x(X_{\tau_1} \in A) = -\int_0^{c(x)} Q(\varphi(t, x), A) \mathrm{d}F(x, t). \tag{1}$$

我们仍简记

$J = (z \in E: z = \varphi(t, x)$ 对某 $x \in E$ 及 $0 < t < c(x)$ 成立,使得 $F(x, t-) - F(x, t) > 0)$,

$\Gamma = (z: z = \varphi(c(x), x), x \in E, c(x) < \infty)$.

J称为过程的F - 跳点集,Γ称为过程的φ - 流出边界集.

现在我们来给出本节的基本假设.

基本假设

(i) $\varphi(t, x)$关于t是右连左极的;对任意$x \in E$, $F(x, t)$关于 Lebesgue 测度的 Lebesgue 分解式中不含连续奇异部分.

(ii) 对所有满足 $c(x)(:=\inf(t>0:F(x,t)=0))=+\infty$ 的 $x\in E$ 有

$$F(x,\infty)=\lim_{t\to\infty}F(x,t)=0;$$

且对每一个 $x\in E$, $F(x,t)$ 的跳点至多只有一个聚点 $c(x)$;

(iii) 对任意 $t>0$ 及 E 上的概率测度 π 有

$$E^{\pi}N_t=\int_E E_x(N_t)\pi(\mathrm{d}x)<\infty,$$

其中 $N_t=\sum_t I_{(X_{t-}\in J\cup\Gamma)}$ 为 PDMP.X 击中 $J\cup\Gamma$ 的计数过程.

基本假设(ii)即 $P_x(\tau_1<\infty)=1$.如果从 $X_0=x$ 出发的过程 (X_t) 的分布收敛到平稳分布,这一条件当然是必要的.而基本假设(iii)蕴含 $P(\tau=\infty)=1$,且比后者要强一些.基本假设(i)是为了数学处理上的方便.

设 X 为满足基本假设的标准的 PDMP.由 §2 知,X 的广义生成算子

$$\mathrm{A}_{ac}f(x)=\chi f(x)+\lambda(x)\int_E(f(y)-f(x))Q(x;\mathrm{d}y);$$

$$\mathrm{A}_d f(x)=\Delta f(x)+a(x)\int_E(f(y)-f(x))Q(x;\mathrm{d}y).$$

其中,$\lambda(x)$ 为过程随机跳的跳率函数

$$\chi f(x)=\frac{\mathrm{d}F(\varphi(t,x))}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}$$

$$a(z)=\sup\{F(x,t-)-F(x,t):z=\varphi(t,x),\ x\in E,0<t\leqslant c(x)\}.$$

其概率意义为,当已知过程沿 φ 击中 z 点时,过程随机跳发生的条件概率.

A 的定义域 $\mathscr{D}(\mathrm{A})$ 由满足下列条件的可测函数 $f:E\cup\Gamma\to\mathrm{R}_+$ 组成:(i)$f\in\mathscr{PAC}$;(ii) $\mathrm{C}f(z)=0,z\in\Gamma$;

(iii) $\mathrm{B}f\in L_1^{loc}(\mathrm{d}\mu)$(其中,$\mathrm{B}f(x,t,\omega)=f(x)-f(X_t(\omega))$).

而 $\mathscr{PAC}$ 由满足下列条件的可测函数 $f:E\cup\Gamma\to\mathrm{R}_+$ 组成:

对任意 $x\in E$,函数 $t\to f(\varphi(t,x))$ 有如下分解

$$f(\varphi(t,x)) = f_{ac}(\varphi(t,x)) + f_d(\varphi(t,x)),$$

其中 $f_{ac}(\varphi(t,x))$ 为 $[0,c(x))$ 上的绝对连续函数, $f_d(\varphi(t,x))$ 为 $[0,c(x))$ 上的右连续跳跃函数,且跳点 t_i 满足 $\varphi(t_i,x) \in J$.

2.关于平稳分布的若干性质

给定可测空间 $(E,\mathscr{E})$ 及定义其上的转移函数 $p(x,t,A)$, $t \in \mathrm{R}_+$, $x \in E$, $A \in \mathscr{E}$. 我们称 $(E,\mathscr{E})$ 上的测度 π 是转移函数 p 的**不变测度**,如果

$$\pi(A) = \int_E p(x,t,A)\pi(\mathrm{d}x), t \in R_+, A \in \mathscr{E}. \tag{2}$$

我们称 π 为转移函数 p(或相应过程)的**平稳分布**,如果关于 p 的不变测度是概率测度,亦即 $\pi(E) = 1$.

如果 π 为 E 上的概率测度,我们可以定义 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的测度

$$P^{\pi}(A) = \int_E P_x(A)\pi(\mathrm{d}x).$$

在 P^{π} 下,相应的过程 (X_t) 是一马尔可夫过程,其初始分布为 π,转移函数为 p. 记 E^{π} 为关于 P^{π} 的期望. 我们知道, π 为平稳分布的充要条件是对任意有界可测函数 $f: E \to \mathrm{R}$ 有

$$E^{\pi}f(X_t) = \int_E f(y)\pi(\mathrm{d}y). \tag{3}$$

对任意 $x \in E$,定义

$$c(x) = \inf\{t > 0: \varphi(t,x) \notin E\},$$
$$t_*(x) = \inf\{t > 0: \varphi(-t,x) \notin E\},$$
$$s_*^1(x) = \inf\{t > 0: \varphi(t,x) \in J\},$$
$$t_*^1(x) = \inf\{t > 0: \varphi(-t,x) \notin J\}$$

$(\inf\varnothing = +\infty)$. 又对任意 $h > 0$,令

$$J_h = \{\varphi(-s,x): x \notin E \setminus J, 0 < s < h \wedge t_*^1(x)\},$$
$$\Gamma_h = \{\varphi(-s,x): x \in \Gamma, 0 < s < h \wedge t_*(x)\}.$$

定理 1 设 $f: J \cup \Gamma \to R$ 为有界可测函数. 对 $t > 0$ 定义

$$I_J(t,h) = \frac{1}{h}\int_0^t f(\varphi(s_*^1(X_s),X_s))I_{J_h}(X_s)\mathrm{d}s,$$

$$I_\Gamma(t,h) = \frac{1}{h}\int_0^t f(\varphi(s_*(X_s), X_s)) I_{\Gamma_h}(X_s)\mathrm{d}s.$$

则

$$\lim_{h\downarrow 0} I_J(t,h) = \int_0^t f(X_{s-})\mathrm{d}p,$$

$$\lim_{h\downarrow 0} I_\Gamma(t,h)\int_0^t f(X_{s-})\mathrm{d}p^*.$$

这里,p 与 p^* 分别为过程击中过程分布跳点与边界点的计数测度.

证明 注意到 $\varphi(s_*^1(x), x) \in J$, $\varphi(c(x), x) \in \Gamma$, $I_J(t,h)$ 与 $I_\Gamma(t,h)$ 的定义是明确的.由基本假设(iii),(4) 与(5) 两式右端项以概率 1 是有限和.只要证明,对所有充分小的 $h > 0$, $I_J(t,h)$ 与 $I_\Gamma(t,h)$ 分别等于(4) 与(5) 式右端的有限和,则命题得证.事实上,对任何固定的样本点 ω,令

$$n(\omega) = \sup\{n : \tau_n \leqslant t\} < +\infty, \text{a.s.}$$

又记

$$\delta(\omega) = \min\{\tau_k - \tau_{k-1} : k = 1,2,\cdots, n(\omega)\},$$

$$\delta_*(\omega) = \min\{t_*^1(X_{s-}) : s \leqslant t, X_{s-} \in J\}.$$

(注,由假设(iii),X_t 在$[0,t]$内至多击中分布跳点(即 J 中点)有限次,且基本假设(ii) 保证 $t_1^*(x) > 0, x \in J$.) 则当 $h < \delta \wedge \delta_*$ 时,

$$I_J(t,h) = \int_0^t f(X_{s-}) I_{(X_{s-}\in J)}\mathrm{d}p.$$

类似可证,对所有充分小的 $h > 0$,

$$I_\Gamma(t,h) = \int_0^t f(X_{s-}) I_{(X_{s-}\in \Gamma)}\mathrm{d}p.$$

这就证明了定理.

定理 2 在基本假设下,如果 π 是 PDMPX 的平稳分布,$f: J \cup \Gamma \to R$ 为有界可测函数,则存在 $J \cup \Gamma$ 上的有限测度 σ 使得对所有的 $t > 0$ 有

$$\mathbf{E}^\pi \frac{1}{t}\int_0^t f(X_{s-}) I_{(X_{s-}\in J)}\mathrm{d}p = \int_J f(x)\sigma(\mathrm{d}x), \tag{6}$$

$$\mathbf{E}^\pi \frac{1}{t}\int_0^t f(X_{s-}) I_{(X_{s-}\in\Gamma)}\mathrm{d}p = \int_J f(x)\sigma(\mathrm{d}x), \tag{7}$$

证明 注意到

$$I_J(t,h) \leqslant K(N_t+1),\ I_\Gamma(t,h) \leqslant K(N_t+1),$$

(其中,K 为 f 的界)及基本假设中的 $E^\pi N_t < \infty$,由定理1及控制收敛定理,当 $h \downarrow 0$ 时

$$\frac{1}{t}\mathbf{E}^\pi I_J(t,h) \to \frac{1}{t}\mathbf{E}^\pi \int_0^t f(X_{s-}) I_{(X_{s-}\in J)}\mathrm{d}p, \tag{8}$$

$$\frac{1}{t}\mathbf{E}^\pi I_\Gamma(t,h) \to \frac{1}{t}\mathbf{E}^\pi \int_0^t f(X_{s-}) I_{(X_{s-}\in\Gamma)}\mathrm{d}p, \tag{9}$$

然而由 Fubini 定理,并注意到平稳分布的性质(3),

$$\frac{1}{t}E^\pi I_J(t,h) =$$

$$\frac{1}{th}\int_0^t E^\pi[f(\varphi(s^1_*(X_s),X_s))I_{J_h}(X_s)]\mathrm{d}s =$$

$$\frac{1}{th}\int_0^t\int_E f(\varphi(s^1_*(x),x))I_{J_h}(x)\pi(\mathrm{d}x)\mathrm{d}s =$$

$$\frac{1}{h}\int_E f(\varphi(s^1_*(x),x))I_{J_h}(x)\pi(\mathrm{d}x).$$

与 $t>0$ 无关.此即说明(8)式右端对所有 $t>0$ 是相同的.对任意 J 的 Borel 子集 A,定义

$$\sigma(A) = \frac{1}{t}\mathbf{E}^\pi \int_0^t I_A(X_{s-})\mathrm{d}p. \tag{10}$$

则由积分的性质及基本假设(iii)知,σ 是可列可加的有限测度.(6)式由 f 的简单函数逼近得到.类似地,对 Γ 的 Borel 子集 A 定义

$$\sigma(A) = \frac{1}{t}\mathbf{E}^\pi \int_0^t I_A(X_{s-})\mathrm{d}p^*. \tag{11}$$

同样可得(7)式.注意到 $J\cap\Gamma=\varnothing$,σ 是 $J\cup\Gamma$ 上的有限测度.这就完成了定理的证明.

测度 σ 有如下概率解释,对任意 $J\cup\Gamma$ 的 Borel 子集 A,$\sigma(A)$ 为过程(X_t)单位时间内击中 A 的平均次数.

定理 3 在基本假设下,设 π 是 PDMPX 的平稳分布.则对所

有满足

$$\mathbf{E}_x\Big(\sum_{k\geq 1}|f(X_{\tau_k})-f(X_{\tau_{k-1}-})|\Big)<\infty \tag{14}$$

的 $f\in\mathscr{D}\cap\mathscr{C}$,有

$$\int_E \mathrm{A}_{oc}f(x)\pi(\mathrm{d}x)+\int_J \mathrm{A}_d f(z)\sigma(\mathrm{d}z)+\int_\Gamma \mathrm{C}f(z)\sigma(\mathrm{d}z)=0. \tag{15}$$

其中

$$\mathrm{A}_{oc}f(x)=\chi f(x)+\lambda(x)\mathrm{C}f(x),$$
$$\mathrm{A}_d f(z)=\Delta f(z)+a(z)\mathrm{C}f(z)$$
$$\mathrm{C}f(x)=Qf(x)-f(x).$$

证明 由 Ito 微分公式(定理 2.3),若 f 满足定理条件,则

$$f(X_t)-f(X_0)=\int_0^t \mathrm{A}_{oc}f(X_s)\mathrm{d}s+\int_0^t \mathrm{A}_d f(X_{s-})\mathrm{d}p+$$
$$\int_0^t\int_E \mathrm{B}f\mathrm{d}(\mu-\nu)+\int_0^t \mathrm{C}f(X_{s-})\mathrm{d}p^*,$$

其中,p,p^* 分别为过程击中分布跳点与边界点的计数测度,且上式右端随机积分项是鞅.于是利用平稳分布的性质(3)及定理 2,关于 E^π 对上式两端取期望,得

$$0=\mathbf{E}^\pi\int_0^t \mathrm{A}_{oc}f(X_s)\mathrm{d}s+\mathbf{E}^\pi\int_0^t \mathrm{A}_d f(X_{s-})\mathrm{d}p+\mathbf{E}^\pi\int_0^t \mathrm{C}f(X_{s-})\mathrm{d}p^*=$$
$$t\int_E \mathrm{A}_{oc}f(x)\pi(\mathrm{d}x)+t\int_J \mathrm{A}_d f(z)\sigma(\mathrm{d}z)+t\int_\Gamma \mathrm{C}f(z)\sigma(\mathrm{d}z).$$

这就证明了(15).证毕.

下面引入可区分类的概念.设 $\mathscr{C}_b(E)$ 为 E 上有界可测函数的全体.我们称一函数类 $\mathscr{D}\subset\mathscr{C}_b(E)$ 是**可区分类**,如果对 E 上的两概率测度 π^1,π^2 有,$\pi^1=\pi^2$ 当且仅当 $\int_E fd_{\pi^1}=\int_E fd_{\pi^2}$ 对所有 $f\in\mathscr{D}$ 成立.令

$$\mathscr{D}_1=\{f\in\mathscr{D}(\mathrm{A}):\mathrm{A}_d f(z)=0,z\in J\}. \tag{16}$$

定理 4 在基本假设下,如果 $\mathscr{D}_1\cap\mathscr{C}_b(E)$ 是可区分类,则 E

上的概率分布 π 是一平稳分布的充分必要条件是,对所有的 $f \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{E}_b(E)$

$$\int_E \mathrm{A}_{ac} f(x)\pi(\mathrm{d}x) = 0. \tag{17}$$

证明 由基本假设中的条件(iii)及 f 的有界性知(15)满足.再注意到定理 2.1 的边界条件及 $\mathscr{D}_1$ 的定义,条件的必要性由定理 2.1 得到.

下证充分性.若 π^t 记 X_t 的分布,则由定理 2.1 有

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \mathrm{A}_{ac} f(X_s)\mathrm{d}s +$$

$$\int_0^t \mathrm{A}_d f(X_{s-})\mathrm{d}p + \int_0^t\int_E \mathrm{B}f\mathrm{d}(\mu - \nu).$$

再由基本假设的条件(iii) 及 f 的有界性知(17) 满足,从而上式随机积分项是鞅.于是,(16) 与(17) 式蕴含

$$\int_E f(x)\pi^t(\mathrm{d}x) = \int_E f(x)\pi(\mathrm{d}x), f \in \mathscr{D} \cap \mathscr{E}_b(E).$$

于是,由定理 1 中 $\mathscr{D} \cap \mathscr{E}_b(E)$ 为可区分类知,$\pi^t = \pi$.这就证明了定理.

3. PDMP 与其嵌入链的平稳分布间的关系

设 Π_{PDMP} 与 Π_{MC} 分别为 PDMP X 与相关嵌入链 Z 的平稳分布的全体.定义

$$\Pi^*_{\mathrm{PDMP}} = \{\pi \in \Pi_{\mathrm{PDMP}} : \int_E \lambda(x)\pi(\mathrm{d}x) < \infty\}.$$

定理 5 设 $\pi \in \Pi^*_{\mathrm{PDMP}}$,则

$$\int_E \lambda(x)\pi(\mathrm{d}x) + \int_{J\cup\Gamma} s(z)\sigma(\mathrm{d}z) > 0, \tag{18}$$

且 $\pi^0 \in \Pi_{MC}$,其中,对任意的 $A \in \mathscr{E}$,

$$\pi^0(A) = \frac{\int_E \lambda(x)Q(x,A)\pi(\mathrm{d}x) + \int_{J\cup\Gamma} a(z)Q(z,A)\sigma(\mathrm{d}z)}{\int_E \lambda(x)\pi(\mathrm{d}x) + \int_{J\cup\Gamma} a(z)\sigma(\mathrm{d}z)}. \tag{19}$$

证明 若$\int_E \lambda(x)\pi(dx) + \int_{J\cup\Gamma} a(z)\sigma(dz) = 0$,则

$$E^{\pi}\left(\int_0^{\infty} \lambda(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^{\infty} \mathrm{d}(p + p^*)\right) = 0.$$

上式蕴含$\lambda(X_t) = 0, I_{(X_{t-} \in J\cup\Gamma)} = 0, P^{\pi}$-a.s.对所有的$t > 0$成立.这与基本假设(ii)矛盾.因此,(18)成立.记$D = \int_E \lambda(x)\pi(\mathrm{d}x) + \int_{J\cup\Gamma} a(z)\sigma(\mathrm{d}z)$.设$p(x,A)$为嵌入链$Z$的转移函数,由(1)定义.由基本假设(i),对任意$x \in E, F(x,t)$不含关于Lebesgue测度的连续奇异部分.再由(1)式,对任意$A \in \mathscr{E}$,函数$f(x) = P(x,A) \in \mathscr{PAC}$.注意到$s_*(\varphi(t,x)) = c(x) - t, t < c(x)$,

$$p(\varphi(t,x),A) =$$

$$-\int_0^{c(x)-t} Q(\varphi(t+s,x),A)[F(x,t)]^{-1}\mathrm{d}F(x,t+s)$$

$$-\int_t^{c(x)} Q((\varphi(s,x),A)[F(x,t)]^{-1}\mathrm{d}F(x,s).$$

因此,当被积函数连续时,

$$\chi p(x,A) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}(p(\varphi(t,x),A) - p(x,A)) =$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t Q(\varphi(s,x),A)\mathrm{d}F(x,s) +$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_t^{c(x)} Q(\varphi(s,x),A)[1 - F(x,t)]\mathrm{d}F(x,s) =$$

$$-\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\int_0^t Q(\varphi(s,x),A)F(x,s)\lambda(\varphi(s,x))\mathrm{d}s +$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}[1 - F(x,t)]\int_t^{c(x)} Q(\varphi(s,x),A)\mathrm{d}F(x,s) =$$

$$\lambda(x)(p(x,A) - Q(x,A)).$$

一般地,由$f(x) = p(x,A) \in \mathscr{PAC}$保证上式的正确性.而对$z \in J\cup\Gamma$,存在$x \in E$及$t > 0$使得$z = \varphi(t,x)$.这时

$$\Delta p(z,A) = p(\varphi(t,x),A) - \lim_{s\uparrow t} p(\varphi(s,x),A) =$$

$$-\int_{t}^{c(z)} Q(\varphi(u,x),A)[F(x,t)]^{-1}\mathrm{d}F(x,u) +$$

$$\lim_{s\uparrow t}\int_{s}^{c(z)} Q(\varphi(u,x),A)[F(x,s)]^{-1}\mathrm{d}F(x,u) =$$

$$-\lim_{s\uparrow t}\int_{t}^{c(z)} Q(\varphi(u,x),A)([F(x,t)]^{-1} -$$

$$[F(x,s)]^{-1}\mathrm{d}F(x,u) +$$

$$\lim_{s\uparrow t}\int_{s}^{t} Q(\varphi(u,x),A)[F(x,s)]^{-1}\mathrm{d}f(x,u) =$$

$$a(z)(p(z,A) - Q(z,A)).$$

因此,

$$\mathbf{A}_{ac}p(x,A) =$$

$$\chi p(x,A) + \lambda(x)\int_E (p(y,A) - p(x,A))Q(x,\mathrm{d}y) =$$

$$\lambda(x)\int_E p(y,A)Q(x,\mathrm{d}y) - \lambda(x)Q(x,A), x \in E;$$

$$\mathbf{A}_d p(z,A) =$$

$$\Delta p(z,A) + a(z)\int_E (p(y,A) - p(z,A))Q(z,\mathrm{d}y) =$$

$$a(z)\int_E p(y,A)Q(z,\mathrm{d}y) - a(z)Q(z,A), z \in J \cup \Gamma.$$

注意到,当 $z \in \Gamma$ 时 $a(z) = 1$ 及

$$p(z,A) = \lim_{t\downarrow 0} p(\varphi(-t,z),A) = Q(z,A),$$

对 $f(x) = p(x,A)$ 应用定理 3,我们有

$$\int_E \lambda(x)\int_E p(y,A)Q(x,\mathrm{d}y)\pi(\mathrm{d}x) -$$

$$\int_E \lambda(x)Q(x,A)\pi(\mathrm{d}x) +$$

$$\int_{J\cup\Gamma} a(z)\int_E p(y,A)Q(x,\mathrm{d}y)\sigma(\mathrm{d}z) -$$

$$\int_{J\cup\Gamma} a(z)Q(z,A)\sigma(\mathrm{d}z) = 0,$$

亦即

$$\frac{1}{D}\int_E \lambda(x)\int_E p(y,A)Q(x,\mathrm{d}y)\pi(\mathrm{d}x) +$$

$$\frac{1}{D}\int_{J\cup\Gamma} a(z)\int_E p(y,A)Q(z,\mathrm{d}y)\sigma(\mathrm{d}z) =$$

$$\frac{1}{D}\int_E \lambda(x)Q(x,A)\pi(\mathrm{d}x) +$$

$$\frac{1}{D}\int_{J\cup\Gamma} a(z)Q(z,A)\sigma(\mathrm{d}z).$$

这就是

$$\int_E p(x,A)\pi^0(\mathrm{d}x) = \pi^0(A).$$

其中，π^0 由(19)式定义.所以，$\pi^0 \in \Pi_{MC}$.证毕.

下面考虑相反的问题.给定 $\pi^0 \in \Pi_{MC}$，如何来寻求 PDMP 的平稳分布 π.这时仍需要一些限制.令

$$\Pi_{MC}^* = \{\pi^0 \in \Pi_{MC} : \int_E\int_0^{c(x)} F(x,t-)\mathrm{d}t\pi^0(\mathrm{d}x) < \infty\}.$$

上式中条件的概率直观如下，

$$\int_E\int_0^{c(x)} F(x,t-)\mathrm{d}t\pi^0(\mathrm{d}x) =$$

$$\int_E\int_0^{c(x)} \mathbf{E}_x I_{(\tau_1 \geq t)}\mathrm{d}t\pi^0(\mathrm{d}x) =$$

$$\int_E \mathbf{E}_x\tau_1\pi^0(\mathrm{d}x) = \mathbf{E}^{\pi^0}\tau_1 < \infty,$$

表示当初始分布为 π^0 时，首次随机跳时 τ_1 的期望有限.

定理 6 如果 $\pi^0 \in \Pi_{MC}^*$ 且 $\mathscr{D}_1 \cap B(E)$ 为可区分类，则 $\pi \in \Pi_{PDMP}$，其中

$$\pi(A) = \frac{\int_E\int_0^{c(x)} I_A(\varphi(t,x))F(x,t-)\mathrm{d}t\pi^0(\mathrm{d}x)}{\int_E\int_0^{c(x)} F(x,t-)\mathrm{d}t\pi^0(\mathrm{d}x)}, \tag{20}$$

其中 $\mathscr{D}_1$ 由(16)式定义.

证明　由定理4,只要证明对所有的$f \in \mathscr{D}_1 \cap B(E)$有

$$\int_E \mathbf{A}_{ac} f(x)\pi(\mathrm{d}x) = 0. \tag{21}$$

在证明(21)式之前,我们先来证明$M_{t\wedge\tau_1}$为一致可积鞅.事实上,由于

$$|M_{t\wedge\tau_1}| = \left|\int_0^{t\wedge\tau_1}\int_E \mathbf{B}f\mathrm{d}(\mu-\nu)\right| \leqslant |f(X_{\tau_1}) -$$

$$f(X_{\tau_1-})| + \int_0^{t\wedge\tau_1} |Qf(X_{t-}) - f(X_{t-})|\Lambda(\mathrm{d}t) \leqslant$$

$$2K(1 + \int_0^{t\wedge\tau_1}\Lambda(\mathrm{d}t)).$$

其中K为f的界.对任意$x \in E$,

$$\mathbf{E}_x\int_0^{t\wedge\tau_1}\Lambda(\mathrm{d}t) \leqslant \mathbf{E}_x\int_0^{\tau_1}\Lambda(\mathrm{d}t) =$$

$$\int_0^{c(x)}\mathbf{E}_x I_{(t\leqslant\tau_1)})\Lambda(\mathrm{d}t) - \int_0^{c(x)}F(x,t-)\Lambda(\mathrm{d}t) =$$

$$-\int_0^{c(x)}\mathrm{d}F(x,t) = 1.$$

于是,对任意的$x \in E$,

$$\lim_{c\uparrow\infty}\mathbf{E}_x |M_{t\wedge\tau_1}| I_{(|M_{t\wedge\tau_1}|>c)} \leqslant$$

$$2K\lim_{c\uparrow\infty}\Big\{P_x(\int_0^{t\wedge\tau_1}\Lambda(\mathrm{d}t) > \frac{c}{2K}) +$$

$$\mathbf{E}_x\int_0^{t\wedge\tau_1}\Lambda(\mathrm{d}t) I_{[\int_0^{t\wedge\tau_1}\Lambda(\mathrm{d}t)>\frac{c}{2K}]}\Big\} = 0,$$

对一切$t \geqslant 0$一致成立.这便证明了$M_{t\wedge\tau_1}$的一致可积性.从而$M_{t\wedge\tau_1}$为一致可积鞅.

对$f \in \mathscr{D}_1 \cap B(E)$应用定理2.1得

$$f(X_{t\wedge\tau_1}) - f(X_0) =$$

$$\int_0^{t\wedge\tau_1}\mathbf{A}_{ac}f(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^{t\wedge\tau_1}\mathbf{A}_d f(X_{s-})\mathrm{d}p + M_{t\wedge\tau_1}.$$

由 Doob 停时定理，$E_x M_{\tau_1} = 0$. 同时注意到 $f \in \mathscr{D}_1$ 时 $\mathbf{A}_d f(z) = 0$，我们有，对任意 $x \in E$，

$$\mathbf{E}_x f(X_{\tau_1}) - f(x) = \mathbf{E}_x \int_0^{\tau_1} \mathbf{A}_{ac} f(X_s) \mathrm{d}s.$$

另一方面，

$$\mathbf{E}_x \int_0^{\tau_1} \mathbf{A}_{ac} f(X_s) \mathrm{d}s = \mathbf{E}_x \int_0^{c(x)} \mathbf{A}_{ac} f(X_s) I_{[s \leqslant \tau_1]} \mathrm{d}s =$$

$$\int_0^{c(x)} \mathbf{A}_{ac} f(\varphi(s,x)) F(x, s-) \mathrm{d}s.$$

既然 $\pi^0 \in \Pi_{MC}$，我们有

$$\int_E \int_0^{c(x)} \mathbf{A}_{ac} f(\varphi(s,x)) F(x, s-) \mathrm{d}s \pi^0(\mathrm{d}x) = 0.$$

上式蕴含，当 π 由(20) 定义时(21) 成立. 证毕.

定理 7 假设 $\Pi^*_{\mathrm{PDMP}} = \Pi_{\mathrm{PDMP}}$，$\Pi^*_{MC} = \Pi_{MC}$ 且 $\mathscr{D}_1 \cap B(E)$ 是可区分类. 则对 $\pi \in \Pi_{\mathrm{PDMP}}$ 有 $\pi = BA\pi$；对 $\pi^0 \in \Pi_{MC}$ 有 $\pi^0 = AB\pi^0$. 因此 $B = A^{-1}$. 其中 $A: \Pi_{\mathrm{PDMP}} \to \Pi_{MC}$ 与 $B: \Pi_{MC} \to \Pi_{\mathrm{PDMP}}$ 分别由(19)，(20) 式定义.

证明 由(19)，$\pi^0 = A\pi$ 满足，对 $f \in \mathscr{PAC} \cap \mathscr{E}_b(E)$，

$$\int_E f(x) \pi^0(\mathrm{d}x) = \frac{1}{D_1} \int_E \lambda(x) \int_E f(y) Q(x, \mathrm{d}y) \pi(\mathrm{d}x) +$$

$$\frac{1}{D_1} \int_{J \cup \Gamma} a(x) \int_E f(y) Q(x, \mathrm{d}y) \sigma(\mathrm{d}x).$$

其中 D_1 为(19) 式中的分母. 应用定理 3，这等价于

$$\int_E f(x) \pi^0(\mathrm{d}x) =$$

$$\frac{1}{D_1} \int_E [\lambda(x) f(x) - \chi f(x)] \pi(\mathrm{d}x) +$$

$$\frac{1}{D_1} \int_{J \cup \Gamma} [a(x) f(x) - \Delta f(x)] \sigma(\mathrm{d}x). \tag{22}$$

另一方面，从(20)，$\pi' = B\pi^0$，对 $g \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{E}_b(E)$，

$$\int_E g(x) \pi'(\mathrm{d}x) = \frac{1}{D_2} \int_E f_g(x) \pi^0(\mathrm{d}x), \tag{23}$$

其中，

$$f_g(x)=\int_0^{c(x)}g(\varphi(t,x))F(x,t-)\mathrm{d}t,$$

而 D_2 为(20)式的分母.类似于定理5的证明,我们发现,

$$\mathscr{A}f_g(x)=\lambda(x)f_g(x)-g(x),x\in E,$$

$$\Delta f_g(z)=a(z)f(z),z\in J,$$

而且对 $z\in\Gamma$ 有,$f_g(z)=\lim_{t\downarrow 0}f_g(\varphi(-t,z))=0$.因此,由(22)

$$\int_E f_g(x)\pi^0(\mathrm{d}x)=\frac{1}{D_1}\int_E g(x)\pi(\mathrm{d}x),$$

故由(23)

$$\int_E g(x)\pi'(\mathrm{d}x)=\frac{1}{D_1D_2}\int_E g(x)\pi(\mathrm{d}x).$$

因为 π' 与 π 均为概率测度,$D_1D_2=1$.因此,由定理4,$\pi=BA\pi$.

反过来,由(20)定义的 $\pi=B\pi^0$ 满足,对 $g\in\mathscr{E}_b(E)$,

$$\int_E g(x)\pi(\mathrm{d}x)=$$

$$\frac{1}{D_2}\int_E\int_0^{c(x)}g(\varphi(t,x))F(x,t-)\mathrm{d}t\pi^0(\mathrm{d}x)+$$

$$\frac{1}{D_2}\int_E\int_0^{c(x)}g(\varphi(t,x))F(x,t-)\mathrm{d}p\pi^0(\mathrm{d}x).\tag{24}$$

利用定理1经简单的计算可证,对应于 $\pi=B\pi^0$ 的跳与边界测度 σ 满足:对有界可测函数 $h:J\cup\Gamma\to\mathbf{R}$,

$$\int_{J\cup\Gamma}h(x)\sigma(\mathrm{d}x)=$$

$$\frac{1}{D_2}\int_E\int_0^{c(x)}h(\varphi(s_*^1(x),x))F(x,t-)\mathrm{d}p\pi^0(\mathrm{d}x).\tag{25}$$

因此,从定义(19)及(24)与(25)式,对 $F\in\mathscr{E}$,

$$AB\pi^0(F)=\frac{1}{D_1}\Big(\int_E\lambda(x)Q(x,F)B\pi^0(\mathrm{d}x)+$$

$$\int_{J\cup\Gamma}a(z)Q(z,F)\sigma(\mathrm{d}z)\Big)=$$

$$\frac{1}{D_1 D_2}\left\{\int_E \int_0^{c(x)} \lambda(\varphi(t,x))Q(\varphi(t,x),F)F(x,t-)\mathrm{d}t\pi^0\mathrm{d}x + \int_E \int_0^{c(x)} a(\varphi(t,x))Q(\varphi(t,x),F)F(x,t-)\mathrm{d}p\pi^0(\mathrm{d}x)\right\} = \frac{1}{D_1 D_2}\int_E p(x,F)\pi^0(\mathrm{d}x) = \frac{1}{D_1 D_2}\pi^0(F).$$

其中最后一等式由 $\pi^0 \in \Pi_{MC}$ 得到.因为 $AB\pi^0$ 与 π^0 均为概率测度,亦有 $D_1 D_2 = 1$.因此,$\pi^0(F) = AB\pi^0(F), F \in \mathscr{E}$.这就完成了定理的证明.

注　如果 $\sup_{x\in E}\lambda(x) < \infty$,则显然有 $\Pi_{PDMP}^{*} = \Pi_{PDMP}$;而若

$$\sup_{x\in E}\int_0^{c(x)} F(x,t-)\mathrm{d}t = \sup_{x\in E} E_x\tau_1 < \infty,$$

则 $\Pi_{MC}^{*} = \Pi_{MC}$.因此,定理 7 的条件通常容易满足.

§5　补充与注记

本章结果大部分是刘国欣的.

§1 系统的讨论了逐段决定马尔可夫过程三元特征的性质.不难看到,Poisson 型随机跳的限制等价于要求跳时分布关于 Lebesgue 测度绝对连续.本节的某些结果可借助于随机分析的一般理论得到.例如,定理 1.3 的(13)式可借助 Gasanov 指数公式证得(参见何声武,汪嘉冈,严加安[1]).这里的优点是更直接明了.

直观上,跳时(分布)特征刻画逐段决定马尔可夫过程,在沿半动力系统运动而击中某状态时发生随机跳的概率(或跳率);跳转移特征刻画逐段决定马尔可夫过程,在击中某状态且发生随机跳的条件下,跳达状态的分布.

在 §2 中,带离散部分的广义生成算子的概念是刘国欣首次引入.Davis[2] 关于逐段决定马尔可夫过程的广义生成算子理论是这里不带离散部分的特殊情形.

§3 关于这类过程期望值的研究可追溯到60年代. 王梓坤[1]对生灭过程完全解决了 $V(x)$ 的计算问题. 继而吴立德[1]和杨超群[1]分别对较一般和一般可列马尔可夫过程研究了这一问题, 得到了若干结果. 侯振挺、郭青峰[1]基于"最小非负解方法"对一般可列马尔可夫过程得到了完整的结果. 侯振挺、刘国欣、周弋将侯、郭的结果完全移植于可列半马尔可夫过程. Davis[1,4] 对 PDMP 的积分型泛函 $V(x)$ 的计算问题作了深入的研究. 基于一类 PDMP 的 Ito 微分公式, 建立了期望值 $V(x)$ 与积分 - 微分方程的关系, 从而将 $V(x)$ 的计算转化为积分 - 微分方程的求解.

这里由于去掉了随机跳的出现为 Poisson 型的限制, 相应积分 - 微分方程化为更一般的脉冲积分 - 微分方程.

§4 的目的是将 Costa[1] 的结果推广到一般 PDMP 的情形.

Costa[1] 对 Davis 的 PDMP 模型证明了, 在一定条件下 PDMP 的平稳分布的存在与唯一性等价于其嵌入马尔可夫链的同一问题. Davis[4] 对 Costa[1] 的结果稍作了修正. 值得说明的是 Costa[1] 当然地把 Ethier & Kurtz[1] 关于强生成算子的结果(命题 4.9.2) 应用于广义生成算子情形. Davis[4] 在改写 Costa[1] 的结果时解释说, 这里可以应用的理由是因为广义生成算子为强生成算子的推广. 而问题在于, 广义生成算子与强生成算子的最大区别在于它们的定义域不同. 但是, 一般说来, 当 $\mathscr{D}_{\mathscr{A}} \cap \mathscr{C}_b(E)$ 构成(平稳分布的) 可区分类时, 属于强生成算子定义域的有界函数类未必能够成为可区分类. 因此, Davis[4] 的解释并没有克服 Costa[1] 的不足. 因此, 推广 Ethier & Kurtz[1] 命题 4.9.2 是必需的.

定理 1, 定理 2 和定理 3 分别是 Davis[4] 命题(34.13), 定理(34.15) 和定理(34.19) 的推广. 需要指出的是, Davis[4] 命题(34.11) 的证明有误. 他错误地应用了 Davis[4] 命题(32.12) 的结论. 命题(34.11) 的正确性直接影响后续结果中条件的表述. 我们把 Ethier & Kurtz[1] 的命题 4.9.2 推广到关于广义生成算子的 PDMP 情形, 得到了定理 4. 这一节的主要结果讨论 PDMP 的平稳分布与相关嵌入链的平稳分布间的关系. 定理 5, 定理 6 及定理 7 分别是

Davis 4 定理(34.12)、定理(34.31) 及命题(34.36) 的推广. 需要说明的是，定理 6 及定理 7 增加了一条假设，即增加了 Davis 1 命题(34.11) 的结论为真的假设. 这也是本节留下的遗憾.

第 4 篇
半马尔可夫过程

13 半马尔可夫过程的向后、向前方程

§1 半马尔可夫过程的定义

本篇我们讨论马尔可夫骨架过程另一重要且更简单的特例——半马尔可夫过程.

众所周知,马尔可夫过程的一个重要特征是过程在任一状态逗留时间服从负指数分布,由于在实际中有许多很重要的随机过程,其逗留时间不服从负指数分布,因此这一限制条件,使得马尔可夫过程的应用范围大大缩小.于是,1954 年 Lévy[1] 和 Smith[1] 引入了半马尔可夫过程的概念并加以研究.经过半个世纪的研究,半马尔可夫过程的理论和应用得到了广泛的发展,并日趋完善,已形成一个独立的研究方向.

在定义 1.4.2 中我们把半马尔可夫定义为马尔可夫骨架过程的一个特例:若 $X = \{X(t), t < \tau\}$ 是马尔可夫骨架过程,$\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ 是它的骨架时序列,若 E 为可列集及

$$X(t) = X(\tau_n), \quad \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}, \quad n \geqslant 0,$$

则称 X 为半马尔可夫过程.

但为了半马尔可夫过程理论的完整性和系统性,并考虑到部分读者只对半马尔可夫过程的理论和应用有兴趣,所以本篇尽可能做到自封.

定义 1 设 $X = \{X(t), 0 \leqslant t < \tau\}$ 为定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$,取值于 $E = \{0,1,2,\cdots\}$ 的 $\mathscr{F}_t$ 适应的随机过程,如果满足下列

条件:

(i) 存在停时$\{\tau_n, n = 0,1,2,\cdots\}$,$0 = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = \tau$, P - a.e.

(ii) $P(X(\tau_{n+1}) \in A \mid \mathscr{F}_{\tau_n}) = P(X(\tau_{n+1}) \in A \mid X(\tau_n))$, P - a.e. $A \in \mathscr{B}(E)$

(iii) $X(t) = X(\tau_n), \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}$, P - a.e.

则称 X 为半马尔可夫过程.

§2　半马尔可夫过程的向后和向前方程

设 $X(t) = \{X(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau(\omega)\}$ 是定义 1 中的半马尔可夫过程.令

$$Q_{ij}(t) = P(X(\tau_1) = j, \tau_1 \leqslant t \mid X(0) = i), \tag{1}$$

则 $Q_{ij}(t)$ 具有如下性质:

1) $Q_{ij}(t) = 0, t < 0$;

2) $Q_{ij}(t)$ 为非减的右连续函数$(-\infty < t < +\infty)$;

3) $\sum\limits_{j\in E} Q_{ij}(t) \leqslant 1, -\infty < t < +\infty$.

定义 1　称矩阵 $Q(t) = (Q_{ij}(t), i,j \in E)$ 为半马氏矩阵,若对任意的 $i,j \in E$,满足上述性质 1),2),3).

事实上,如果已给一个半马氏矩阵 $Q(t)$,则我们可以构造一个半马氏过程 $X(t)$ 使(1) 成立,所以我们亦称 $Q(t)$ 为半马氏过程,也称满足(1) 的 $Q(t)$ 为 $X(t)$ 的半马氏矩阵.令

$$P_{ij} = P(X(\tau_1) = j \mid X(0) = i),$$

即

$$P_{ij} = \lim_{t\to\infty} Q_{ij}(t) = Q_{ij}(\infty).$$

记

$$P = (P_{ij}, i,j \in E). \tag{2}$$

定义 2 半马氏过程 $Q(t)$ 称为正则的,若

$$\sum_{j\in E} P_{ij} = 1, \quad i \in E. \tag{3}$$

下面我们假定:

(A) $G_i(0) \triangleq \sum_{j\in E} Q_{ij}(0) < 1, i \in E$;

(B) 条件概率 $P_{ij}(t) = P(X(t) = j, t < \tau \mid X(0) = i), i \in E$,关于 t 是 Lebesgue 可测函数($t \in (0, \infty), t < \tau$).

设 A 为 E 的非空子集,令:

$$P_{iA}(t) = P(X(t) \in A, t < \tau \mid X(0) = i), \quad i \in E; \tag{4}$$

$$\varphi_{iA}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{iA}(t) dt, \lambda \geqslant 0, i \in E; \tag{5}$$

$$\hat{Q}_{ij}(\lambda) = \int_{0-}^\infty e^{-\lambda t} dQ_{ij}(t), \lambda \geqslant 0, i, j \in E; \tag{6}$$

$$h_i(\lambda) = \int_{0-}^\infty e^{-\lambda t}(1 - G_i(t)) dt, \lambda \geqslant 0, i \in E; \tag{7}$$

$$\hat{G}_i(\lambda) = \int_{0-}^\infty e^{-\lambda t} dG_i(t), \lambda \geqslant 0, i \in E. \tag{8}$$

其中

$$G_i(t) = \sum_{j\in E} Q_{ij}(t), i \in E. \tag{9}$$

定理 1 $\{\varphi_{iA}(\lambda), i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$X_i = \sum_{j\in E} \hat{Q}_{ij}(\lambda) X_j + \delta_{iA} h_i(\lambda), i \in E \tag{10}$$

的最小非负解.

证明 设 τ_1 是首次跳跃时刻,又设 $X(0) = i$,于时刻 t 转移到 A 的方式有两种:一是在$[0, t]$中没有发生跳跃(即 $\tau_1 > t$)而达到 A,二是在$[0, t]$中发生了跳跃(即 $\tau_1 \leqslant t$)而达到 A,没有第三种可能.

令 ${}_nP_{iA}(t)$ 表示在 $X(0) = i$ 的条件下,于时刻 t 位于A,而且由 n 次跳跃完成的概率,即

$$
\begin{aligned}
{}_nP_{iA}(t) = {} & P(X(t) \in A, \\
& X(\cdot,\omega)\text{ 在}[0,t]\text{ 中只有 } n \text{ 次跳跃} \mid X(0) = i),
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
{}_0P_{iA}(t) &= \delta_{iA}(1 - P_i(t)), \\
{}_{n+1}P_{iA}(t) &= \sum_{j\in E}\int_{0-}^{t} {}_nP_{jA}(t-x)\mathrm{d}Q_{ij}(x)(n \geqslant 0),
\end{aligned}
\right\} \tag{12}
$$

则：

$$
\begin{aligned}
& P_{iA}(t) = \\
& P(X(t) \in A, t < \tau \mid X(0) = i) = P(X(t) \in A, \\
& X(\cdot,\omega)\text{ 在}[0,t]\text{ 中至多有有限次跳跃} \mid X(0) = i) = \\
& \sum_{n=0}^{\infty} {}_nP_{iA}(t).
\end{aligned} \tag{13}
$$

对(13)两端同时取 Laplace 变换，并注意到(12)式即得：

$$
\varphi_{iA}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_n\varphi_{iA}(\lambda).
$$

其中

$$
\left.
\begin{aligned}
{}_0\varphi_{iA}(\lambda) &= \delta_{iA}h_i(\lambda), \\
{}_{n+1}\varphi_{iA}(\lambda) &= \sum_{j\in E}\hat{Q}_{ij}(\lambda)\,{}_n\varphi_{jA}(\lambda), (n \geqslant 0),
\end{aligned}
\right\} \tag{14}
$$

于是由侯振挺、郭青峰[1]的系 3.2.3 知，$\{\varphi_{iA}(\lambda), i \in E\}$ 为(10)的最小非负解，这就证明了我们的定理.

特别地，当 $A = \{j\}$ 时，(10)式化为

$$
X_i = \sum_{j\in E}\hat{Q}_{ij}(\lambda)X_j + \delta_{ij}h_i(\lambda), i,j \in E. \tag{15}
$$

由定理 1 立得如下推论：

系 1 $\{\varphi_{ij}(\lambda), i,j \in E\}$ 是第一型囿壹方程(15)的最小非负解.

由此，矩阵 $\varphi(\lambda) \triangleq (\varphi_{ij}(\lambda), i,j \in E)$ 满足矩阵方程

$$
\varphi(\lambda) = \hat{Q}(\lambda)\varphi(\lambda) + H(\lambda), \tag{16}
$$

其中

$$
H(\lambda) = (\delta_{ij}h_i(\lambda), i,j \in E). \tag{17}
$$

我们称(16)式为 $Q(t)$ 半马氏过程的向后方程(组).

由假设(A)并注意到 $P_i(t)$ 的右连续性，知 $H(\lambda)$ 为对角线上元素均为正的对角矩阵，因此，$H(\lambda)$ 可逆，令

$$\widetilde{Q}(\lambda) = H^{-1}(\lambda)\hat{Q}(\lambda)H(\lambda), \tag{18}$$

则由对偶定理(见侯振挺、郭青峰[1]，定理3.8.1)有如下定理：

定理 2 $\{\varphi_{ij}(\lambda), i,j \in E\}$ 是非负线性方程组

$$X_{ij} = \sum_{j\in E} X_{ik}\widetilde{Q}_{kj}(\lambda) + \delta_{ij}h_i(\lambda), i,j \in E \tag{19}$$

的最小非负解，其中：

$$\widetilde{Q}_{ij}(\lambda) = (h_i(\lambda))^{-1}\hat{Q}_{ij}(\lambda)h_j(\lambda), i,j \in E. \tag{20}$$

因此，矩阵 $\varphi(\lambda)$ 满足矩阵方程

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda)\widetilde{Q}(\lambda) + H(\lambda). \tag{21}$$

我们称(21)式为 $Q(t)$ 半马氏过程的向前方程(组)。

周知，马氏过程向前方程导出的概率方法需要任意时刻 t 前任意状态逗留时间的分布，因此，本质上需要过程在任意时刻 t 的马氏性质，但半马过程只在跳跃时刻具有马氏性，因此，用概率方法导出半马氏过程的向前方程遇到了本质的困难，用对偶定理向前方程可直接由向后方程写出，并且这种方法超越了概率论的范畴，具有一般性。

例 1 对密度矩阵为 Q 的保守马氏过程，有：

$$\hat{Q}_{ij}(\lambda) = \frac{q_{ij}}{\lambda + q_i}, (i \neq j), \lambda \geq 0;$$

$$h_{ij}(\lambda) = \frac{1}{\lambda + q_i}, \lambda \geq 0.$$

由(20)得

$$\widetilde{Q}_{ij}(\lambda) = \frac{q_{ij}}{\lambda + q_i}, (i \neq j), \lambda \geq 0.$$

再由定理2，立得向前方程.

$$\varphi_{ij}(\lambda) =$$

$$\sum_{k\neq j}\varphi_{ik}(\lambda)\frac{q_{kj}}{\lambda + q_i} + \frac{\delta_{kj}}{\lambda + q_i} \quad i,j \in E, \lambda \geq 0.$$

等价地，

$$P_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} \int_0^t P_{ik}(u) q_{kj} e^{-q_j(t-u)} du +$$

$$\delta_{ij} e^{-q_j t}, \quad i, j \in E, t \geqslant 0.$$

例 1 说明，对 Q 过程而言，方程(21) 即为 Q 过程的向前方程，这也是我们把(21) 称为半马氏过程的向前方程的理由之一.

例 2 一般地，当半马氏矩阵 $Q(t)$ 为上三角矩阵时，用向前方程求解转移概率 $P_{ij}(t)(i,j \in E)$ 较之用向后方程求解要容易.

设半马氏矩阵：

$$Q(t) = \begin{bmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t)\cdots \\ 0 & Q_{22}(t) & Q_{23}(t)\cdots \\ 0 & 0 & Q_{33}(t)\cdots \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

为上三角形，由(20) 式易得 $\tilde{Q}(\lambda)$ 亦为上三角矩阵：

$$\tilde{Q}(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11}(\lambda) & \tilde{Q}_{12}(\lambda) & \tilde{Q}_{13}(\lambda)\cdots \\ 0 & \tilde{Q}_{22}(\lambda) & \tilde{Q}_{23}(\lambda)\cdots \\ 0 & 0 & \tilde{Q}_{33}(\lambda)\cdots \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

由(21) 得向前方程组：

$$\varphi_{ij}(\lambda) = \sum_{k=1}^{j} \varphi_{ik}(\lambda) \tilde{Q}_{kj}(\lambda) + \delta_{ij} h_i(\lambda), i, j \in E,$$

等价地，

$$\frac{Q(\lambda)}{1 - \tilde{Q}_{ij}(\lambda)} = \frac{1}{1 - \tilde{Q}_{ij}(\lambda)} \sum_{k=1}^{j} \varphi_{ik}(\lambda) \tilde{Q}_{kj}(\lambda) +$$

$$\frac{\delta_{ij}}{1 - \tilde{Q}_{ij}(\lambda)} h_i(\lambda), \quad i, j \in E.$$

上式实际上给出了 $\{\varphi_{ij}(\lambda), i, j \in E\}$ 满足的递推关系式.

§3 正则性的充要条件

定义 1 半马氏过程 $X(t)=\{X(t,\omega),t<\tau\}$ 称为正则的,若对每个 $i\in E$,有:

$$P(\tau=+\infty\mid X(0)=i)=1. \tag{1}$$

定理 1 半马氏过程 $X(t)=\{X(t,\omega),t<\tau\}$ 为正则的充分必要条件是对每个 $i\in E$,对任意 $t>0$,有:

$$\sum_{j\in E}P_{ij}(t)=1, \tag{2}$$

或等价地,对每个 $i\in E$,任意 $\lambda>0$,

$$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)=1, \tag{3}$$

证明 首先,(2) 与(3) 的等价性是显然的.

设半马氏过程 $X(t)=\{X(t,\omega),t<\tau\}$ 正则,由(1)式,对每个 $i\in E$,任意 $t>0$ 有:

$$\sum_{j\in E}P_{ij}(t)=\sum_{j\in E}P(X(t)=j,t<\tau\mid X(0)=i)=$$
$$P(t<\tau\mid X(0)=i)=1.$$

这得证(1.3.2) 的必要性,逆转推理可推出它的充分性.

引入两个记号:

l^{∞}:为全体有界数列

$$Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\end{bmatrix},\quad 记\ 0_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\end{bmatrix},$$

$$I=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&&&1&\\&&&&\ddots\end{pmatrix}$$

l_1：为全体满足$\sum_{j\in E}|\alpha_i|<\infty$的实数列：

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots),\text{记}\,0=(0,0,\cdots).$$

定理 2 若$0_1\leqslant Y\in l^\infty$，及$(I-\hat{Q}(\lambda))Y=U(\lambda)\geqslant 0_1$

则$Y\geqslant\varphi(\lambda)U$，从而，如果方程

$$\begin{cases}(I-\hat{Q}(\lambda))Y=0_1,\lambda>0,\\ 0_1\leqslant Y\in l^\infty\end{cases}\tag{4}$$

只有零解，则$Y=\varphi(\lambda)U$，其中：

$$U(\lambda)=\begin{bmatrix}u_1h_1(\lambda)\\ u_2h_2(\lambda)\\ \vdots\end{bmatrix},U=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ \vdots\end{bmatrix}$$

证明 注意到$U(\lambda)\geqslant 0_1$，方程$(I-\hat{Q}(\lambda))y=U(\lambda)$可改写成非负线性方程组：

$$y_i=\sum_{k\in E}\hat{Q}_{ik}(\lambda)y_k+u_ih_i(\lambda)\quad(i\in E).\tag{5}$$

于是由定理 2 及侯振挺、郭青峰[1]的定理 3.3.2 知$\varphi(\lambda)U$是方程(5)的最小非负解，所以有：

$$Y\geqslant\varphi(\lambda)U.\tag{6}$$

令：$Z=Y-\varphi(\lambda)U$.

于是Z满足(4)，故若(4)只有零解，则$Z=0_1$，即$Y=\varphi(\lambda)U$.

引理 1

$$\hat{G}_i(\lambda)=\sum_{k\in E}\hat{Q}_{ij}(\lambda),\lambda>0,i\in E;\tag{7}$$

$$\hat{G}_i(\lambda)=1-\lambda h_i(\lambda),\lambda>0,i\in E;\tag{8}$$

证明 对任意的$i\in E,\lambda>0$，由：

$$\sum_{j\in E}\hat{Q}_{ij}(\lambda)=\sum_{j\in E}\int_{0-}^{\infty}e^{-\lambda t}dQ_{ij}(t)=$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{k}\int_{0-}^{\infty}e^{-\lambda t}dQ_{ij}(t)=$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{0-}^{\infty}e^{-\lambda t}d(\sum_{j=1}^{k}Q_{ij}(t)) = \int_{0-}^{\infty}e^{-\lambda t}dG_i(t) = \hat{G}_i(\lambda)$$

最后一等式由次分布函数的弱收敛性质得到. 这就证明了(7),再由 Fubini 定理

$$h_i(\lambda) = \int_{0-}^{\infty}e^{-\lambda t}(1 - G_i(t))dt =$$

$$\frac{1}{\lambda} - \int_{0-}^{\infty}e^{-\lambda t}G_i(t)dt =$$

$$\frac{1}{\lambda} - \int_{0-}^{\infty}e^{-\lambda t}dt\int_{0-}^{t}dG_i(s) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_{0-}^{\infty}e^{-\lambda s}dG_i(s) =$$

$$\frac{1}{\lambda}(1 - \hat{G}_i(\lambda)), i \in E, \lambda > 0.$$

(8) 式得证,这就证明了我们的引理.

定理 3 半马氏过程 $X(t) = \{X(t,\omega), t < \tau\}$ 正则的充分必要条件是方程

$$\begin{cases}(1 - \hat{Q}(\lambda))Y = 0_1, \lambda > 0, \\ 0_1 \leqslant Y \leqslant 1\end{cases} \tag{9}$$

只有零解.

证明 设方程(9) 只有零解,则由(9) 只有零解和定理 2 知方程

$$\begin{cases}(I - \hat{Q}(\lambda))Y = \lambda H(\lambda)I, \lambda > 0, \\ 0_1 \leqslant Y \leqslant 1\end{cases} \tag{10}$$

有唯一解, $Y = \lambda\Phi(\lambda)I$,但由引理 1 的(8) 式,可直接验证 $Y \equiv 1$ 满足方程(10),所以 $\lambda\Phi(\lambda)I = 1$,再由定理 1 得,半马氏过程 $X(t)$ 是正则的. 下证必要性,设半马氏过程 $X(t)$ 是正则的,令:

$$\xi_i(\lambda) = 1 - \lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda) \quad (i \in E, \lambda > 0).$$

首先,由系 2.1 知, $\{\varphi_{ij}(\lambda), i \in E\}$ 是非负线性方程组:

$$X_i = \sum_{k\in E}\hat{Q}_{ik}(\lambda)X_k + \delta_{ij}h_i(\lambda), \quad i \in E$$

的最小非负解, 于是由侯振挺、郭青峰[1] 的定理 3.3.2 知

$\{\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)(i\in E,\}$ 是非负线性方程组：

$$X_i = \sum_{j\in E}\hat{Q}_{ik}(\lambda)X_k + \lambda h_i(\lambda), i\in E$$

的最小非负解．又因为 $0\leqslant\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda)\leqslant 1$，由引理 1 知，$\{\xi_i(\lambda), i\in E\}$ 是方程(9) 的最大解，但由假设，半马氏过程 $X(t)$ 是正则的，故由定理 1 得，$\lambda\sum_{j\in E}\varphi_{ij}(\lambda) = 1(i\in E,\lambda>0)$，即 $\xi_i(\lambda)\equiv 0(i\in E,\lambda>0)$，所以(9) 只有零解．

必要性得证，这就完成了定理的证明．

下面给出一个极易验证的充分条件．

定理 4 如果半马氏过程 $X(t)=\{X(t,\omega),t<\tau\}$ 的半马氏矩阵满足条件：

$$\beta(\lambda)\triangleq\sup_{i\in E}\hat{G}_i(\lambda)<1,\lambda>0, \tag{11}$$

则它是正则的．

证明 我们来证明方程(9) 只有零解，事实上，若 $Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\end{bmatrix}$ 为(9) 的解，即有：

$$y_i = \sum_{j\in E}\hat{Q}_{ij}(\lambda)y_j, i\in E.$$

由引理 1 及(11) 式，用归纳法易得

$$y_i\leqslant(\beta(\lambda))^n, n=1,2,\cdots\lambda>0, i\in E.$$

令 $n\to\infty$，由(11) 及 y_i 的非负性，得

$$y_i = 0, i\in E.$$

这就证明了(9) 只有零解，再由定理 3 立得我们的定理．

系 1 状态空间有限的半马氏过程是正则的．

证明 由假设 (B)：$G_i(0)<1, i\in E$，知 $G_i(t)$ 的 Lebesgse-Stieltjes 变换 $\hat{G}_i(\lambda)<1, i\in E(\lambda>0)$，故由状态空间 E 有限得 $\beta(\lambda)=\sup_{i\in E}\hat{G}_i(\lambda)<1,(\lambda>0)$，由定理 4 立得本系．

§4 补充与注记

本章内容由侯振挺、刘国欣、袁成桂和周弋完成.

14 半马尔可夫过程的第一次到达时间的分布、矩及状态分类

§1 第一次到达时间的分布和矩

设 $X(t)$ 是半马氏过程，$\tau_n(\omega)$ 是 $X(\cdot,\omega)$ 的第 n 次跳跃时刻，令

$$\theta_n(\omega) = \tau_{n+1}(\omega) - \tau_n(\omega), (n \geqslant 0)$$

为第 n 次跳跃到某状态的逗留时间.

引理 1

$$P(\theta_0 \leqslant t_0, \theta_1 \leqslant t_1, \cdots \theta_{n-1} \leqslant t_{n-1} \mid X(0) = i_0, X(\tau_1) = i_1, \cdots, X(\tau_{n-1}) = i_{n-1}, X(\tau_n) = i_n) = \prod_{l=0}^{n-1} G_{i_l i_{l+1}}(t_l). \tag{1}$$

特别地，

$$P(\theta_{n-1} \leqslant t \mid X(\tau_{n-1}) = i, X(\tau_n) = j) = G_{ij}(t) \tag{2}$$

$$P(\theta_{n-1} \leqslant t \mid X(\tau_{n-1}) = i) = G_i(t). \tag{3}$$

$(i,j \in E)$ 其中 $G_{ij}(t) = \dfrac{Q_{ij}(t)}{Q_{ij}(\infty)}, (i,j \in E, Q_{ij}(\infty) \neq 0)$

引理 1 的证明参见文献 Королюк В С and Туроин А Х[1].

设 $F_i(t)(i = 1,2)$ 是定义在$(-\infty, +\infty)$上的非负不减右连

续函数,对 $t < 0$ 有 $F_i(t) = 0,(i = 1,2)$,且:

$$F(\infty) = \lim_{t\to\infty} F_i(t) \leqslant 1(i = 1,2) \tag{4}$$

令:

$$m_i^p = \int_{0-}^{\infty} t^p \mathrm{d}F_i(t),(i = 1,2;p = 0,1,\cdots) \tag{5}$$

设 A,H 为 E 的子集,且 $A \neq \Phi$,令:

$$\sigma_A(\omega) = \begin{cases}\inf(t : \tau_1(\omega) \leqslant t < \tau(\omega), X(t,\omega) \in A),\\ \infty,\text{若括号中集合为空集}\end{cases} \tag{6}$$

$$_H\sigma_A(\omega) = \begin{cases}\sigma_A(\omega),\text{如 } \sigma_A(\omega) \leqslant \sigma_H(\omega);\\ \infty,\text{否则},\end{cases} \tag{7}$$

$$_Hf_{iA}^{(n)}(t) = P(_H\sigma_A(\omega) \leqslant t, _H\sigma_A(\omega) = \tau_n(\omega) \mid X(0) = i)$$
$$(n = 1,2,\cdots) \tag{8}$$

$$_Hf_{iA}(t) = P(_H\sigma_A(\omega) \leqslant t \mid X(0) = i) \tag{9}$$

$$_H\varphi_{iA}^{(n)}(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}_Hf_{iA}^{(n)}(t),(\lambda \geqslant 0) \tag{10}$$

$$_H\varphi_{iA}(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathrm{d}_Hf_{iA}(t),(\lambda \geqslant 0) \tag{11}$$

$$_Hm_{iA}^{(n,p)} = \int_{0-}^{\infty} t^p \mathrm{d}_Hf_{iA}^{(n)}(t)(p = 0,1\cdots) \tag{12}$$

$$_Hm_{iA}^{(p)} = \int_{0-}^{\infty} t^p \mathrm{d}_Hf_{iA}(t)(p = 0,1\cdots) \tag{13}$$

$$_Hf_{iA}^{*} = {_H\varphi_{iA}}(0) = {_Hm_{iA}^{(0)}} = P(_H\sigma_A(\omega) < \infty \mid X(0) = i) \tag{14}$$

引理 2

$$P(X(\tau_1) = j, X(\tau_v) \notin A \cup H, 1 < v < n+1, X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} \leqslant t \mid X(0) = i) = \int_{0-}^{t} {_Hf_{iA}^{(n)}}(t-u)\mathrm{d}Q_{ij}(u), j \in E, \tag{15}$$

证明 当 $Q_{ij}(\infty)=0$时，(15) 显然成立，因为这时它的左右两边都等于零，当 $Q_{ij}\neq 0$时，由引理1及侯振挺、郭青峰[1]的引理9.3.2以及过程关于跳跃时刻的马氏性，得：

$$
\begin{aligned}
&P(X(\tau_1)=j, X(\tau_v)\notin A\cup H, 1<v<n+1,\\
&X(\tau_{n+1})\in A, \tau_{n+1}\leqslant t \mid X(0)=i)=\\
&P_{ij}P(X(\tau_v)\notin A\cup H, 1<v<n+1, X(\tau_{n+1})\in A,\\
&(\tau_{n+1}-\tau_1+\tau_1\leqslant t \mid X(0)=i, X(\tau_1)=j)=\\
&P_{ij}\int_{0-}^{t}P(X(\tau_v)\notin A\cup H,\\
&1<v<n+1, X(\tau_{n+1})\in A,\\
&\tau_{n+1}-\tau_1\leqslant t-u \mid X(0)=\\
&i, X(\tau_1)=j)\mathrm{d}P(\tau_1\leqslant u \mid X(0)=i, X(\tau_1)=j)=\\
&P_{ij}\int_{0-}^{t}P(X(\tau_v)\notin A\cup H, 0<v<n, X(\tau_n)\in A,\\
&\tau_n\leqslant t-u \mid X(0)=j)\mathrm{d}G_{ij}(u)=\\
&\int_{0-}^{t}P({}_H\sigma_A\leqslant t-u, {}_H\sigma_A=\tau_n) \mid X(0)=j)\mathrm{d}Q_{ij}(u)=\\
&\int_{0-}^{t}{}_Hf_{jA}^{(n)}(t-u)\mathrm{d}Q_{ij}(u).
\end{aligned}
$$

于是引理得证.

引理 3 ${}_Hf_{iA}^{(n)}(t)$ 由下列递推公式唯一决定：

$$
\left.
\begin{aligned}
&{}_Hf_{iA}^{(1)}(t)=\sum_{j\in A}Q_{ij}(t), i\in E,\\
&{}_Hf_{iA}^{(n+1)}(t)=\sum_{j\notin A\cup H}\int_{0-}^{t}{}_Hf_{jA}^{(n)}(t-u)\mathrm{d}Q_{ij}(u), n\geqslant 1, i\in E
\end{aligned}
\right\}
\tag{16}
$$

证明 由(8)得：

$$
\begin{aligned}
&f_{iA}^{(1)}(t)=P({}_H\sigma_A\leqslant t, {}_H\sigma_A=\tau_1 \mid X(0)=i)\\
&P(X(\tau_1)\in A, \tau_1\leqslant t \mid X(0)=i)=
\end{aligned}
$$

$$\sum_{j\in A} P(X(\tau_1) = j, \tau_1 \leqslant t \mid X(0) = i) =$$

$$\sum_{j\in A} Q_{ij}(t), i \in E.$$

由引理 2 得：

$$_Hf_{iA}^{(n+1)}(t) = P(_H\sigma_A \leqslant t,$$

$$_H\sigma_A = \tau_{n+1} \mid X(0) = i) =$$

$$P(X(\tau_v) \notin A \cup H, 0 < v < n+1, X(\tau_{n+1}) \in A,$$

$$\tau_{n+1} \leqslant t \mid X(0) = i) =$$

$$\sum_{j\notin A\cup H} P(X(\tau_1) = j,$$

$$X(\tau_v) \notin A \cup H, 1 < v < n+1,$$

$$X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} \leqslant t \mid X(0) = i) =$$

$$\sum_{j\notin A\cup H} \int_{0-}^{t} {_Hf_{jA}^{(n)}}(t-u)\mathrm{d}Q_{ij}(u), n \geqslant 1, i \in E$$

于是引理得证.

引理 4 $_H\varphi_{iA}^{(n)}(\lambda)$ 由下列递推公式唯一决定：

$$\left.\begin{aligned} {_H\varphi_{iA}^{(1)}}(\lambda) &= \sum_{j\in A} \hat{Q}_{ij}(\lambda), i \in E, \\ {_H\varphi_{iA}^{(n+1)}}(\lambda) &= \sum_{j\notin A\cup H} \hat{Q}_{ij}(\lambda) {_H\varphi_{jA}^{(n)}}(\lambda), n \geqslant 1, i \in E \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

证明 对(16)两端同时取 Laplace-Stieltjes 变换即得.

引理 5 $_Hm_{iA}^{(n,p)}$ 由下列递推公式唯一决定：

$$\left.\begin{aligned} {_Hm_{iA}^{(1,p)}} &= \sum_{j\in A} \mu_{ij}^{(p)}, i \in E \\ {_Hm_{iA}^{(n+1,p)}} &= \sum_{l=0}^{p} C_p^l \sum_{j\notin A\cup H} \mu_{ij}^{(l)} \cdot {_Hm_{jA}^{(n,p-l)}}, n \geqslant 1, i \in E \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

其中

$$\mu_{ij}^{(p)} = \int_{0-}^{\infty} t^p \mathrm{d}Q_{ij}(t)$$

证明

$$_Hm_{iA}^{(1,p)} = \int_{0-}^{\infty} t^p \mathrm{d}_Hf_{iA}^{(1)}(t) =$$

$$\sum_{j\in A}\int_{0-}^{\infty} t^p \mathrm{d}Q_{ij}(t) = \sum_{j\in A}\mu_{ij}^{(p)}, i \in E$$

再由引理3及侯振挺、郭青峰[1]的引理9.3.4,得:

$$_Hm_{iA}^{(n+1,p)} = \int_{0-}^{\infty} t^p \mathrm{d}_H f_{iA}^{(n+1,p)}(t) =$$

$$\int_{0-}^{\infty} t^p (\int_{0-}^{t} \sum_{j\notin A\cup H} {}_H f_{iA}^{(n)}(t-u)\mathrm{d}Q_{ij}(u)) =$$

$$\sum_{j\notin A\cup H}\sum_{l=0}^{p} C_p^l \mu_{ij}^{(l)}\, {}_H m_{jA}^{(n,p-l)}, n \geq 1, i \in E$$

于是引理得证.

引理3

$$_Hf_{iA}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_H f_{iA}^{(n)}(t). \tag{19}$$

$$_H\varphi_{iA}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_H \varphi_{iA}^{(n)}(\lambda). \tag{20}$$

$$_Hm_{iA}^{(p)} = \sum_{n=1}^{\infty} {}_H m_{iA}^{(n,p)}. \tag{21}$$

证明 由(8) ~ (13)立得我们的引理.

定理1 $\{{}_H\varphi_{iA}(\lambda), i \in E\}$ 是拟规格方程:

$$X_i = \sum_{j\notin A\cup H} \hat{Q}_{ij}(\lambda)X_j + \sum_{j\in A}\hat{Q}_{ij}(\lambda), i \in E \tag{22}$$

的最小非负解.

证明 由(20),引理4及侯振挺、郭青峰[1]的系3.2.3立得我们的定理.

定理2 $\{{}_H f_{iA}^{*}, i \in E\}$ 是拟规格方程:

$$X_i = \sum_{j\notin A\cup H} P_{ij}X_j + \sum_{j\in A}P_{ij}, i \in E \tag{23}$$

的最小非负解.

证明 本定理为定理1在 $\lambda = 0$ 下的特例.

定理3 对于 $p \geq 1$, $\{{}_H m_{iA}^{(p)}, i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$X_i = \sum_{j\notin A\cup H} P_{ij}X_j +$$

$$\sum_{l=1}^{p}\sum_{j\notin A\cup H} C_H^l \mu_{ij}^{(l)}\ {}_H m_{jA}^{(p-l)} + \sum_{j\in A}\mu_{ij}^{(p)}, i\in E \tag{24}$$

的最小非负解.

证明　由(21),引理5以及侯振挺、郭青峰[1]的系3.2.3立得我们的定理.

定理4　若:

$$ {}_H m_{iA}^{(p)} \leqslant c_H F_{iA}^*, i\in E \tag{25}$$

且

$$\mu_{ij}^{(l)} = l\mu_i \mu_{ij}^{(l-1)}, i,j\in E, l=1,2,3,\cdots p, \tag{26}$$

其中 ${}_H F_{iA}^* = (\sum_{j\notin A\cup H}\mu_{ijH} f_{iA}^* + \sum_{j\in A}\mu_{ij})/\mu_i, i\in E, \mu_i = \int_{0-}^{\infty} t\mathrm{d}G_i(t) > 0, i\in E$,则:

$$ {}_H m_{iA}^{(p)} \leqslant p!\, c^p\, {}_H F_{iA}^*, p\geqslant 1, i\in E. \tag{27}$$

证明　由(25)知(27)对 $p=1$ 真.

假设 $p-1$ 已真,即:

$$ {}_H m_{iA}^{(p-1)} \leqslant (p-1)!\, c^{p-1}\, {}_H F_{iA}^*, p\geqslant 1, i\in E. \tag{28}$$

由定理3知$\{{}_H m_{iA}, i\in E\}$是第一型囿壹方程.

$$X_i = \sum_{j\notin A\cup H} P_{ij}X_j + \mu_{iH} F_{iA}^*, i\in E$$

的最小非负解,于是由侯振挺、郭青峰[1]的系3.2.3知,若 $X_i^*(i\in E)$ 是第一型囿壹方程

$$X_i = \sum_{j\notin A\cup H} P_{ij}X_j + p!\, c^{p-1}\mu_{iH} F_{iA}^*, i\in E.$$

的最小非负解,则:

$$X_i^* = p!\, c_H^{p-1} m_{iA}, i\in E$$

再由 ${}_H m_{iA} \leqslant C_H F_{iA}^*$ 得:

$$X_i \leqslant p!\, c^p\, {}_H F_{iA}^*, i\in E \tag{29}$$

由定理3知,$\{{}_H m_{iA}^{(p)}, i\in E\}$是第一型囿壹方程:

$$X_i = \sum_{j\notin A\cup H} P_{ij}X_j + \sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{j\notin A\cup H}\mu_{ij}^{(l)}\ {}_H m_{jA}^{(p-l)} + \sum_{j\in A}\mu_{ij}^{(p)}, i\in E$$

最小非负解.然由(28)及(26)得:

$$\sum_{l=1}^{p} C_p^l \sum_{j\notin A\cup H} \mu_{ij}^{(l)}\,{}_H m_{jA}^{(p-l)} + \sum_{j\in A}\mu_{ij}^{(p)} =$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} C_p^{l+1} \sum_{j\notin A\cup H} \mu_{ij}^{(l+1)}\,{}_H m_{jA}^{(p-1-l)} + \sum_{j\in A}\mu_{ij}^{(p)} \leqslant$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} C_{p-1}^l \frac{p}{l+1} \sum_{j\notin A\cup H} (l+1)\mu_i \mu_{ij}^{(l)}\,{}_H m_{jA}^{(p-1-l)} + \sum_{j\in A} p\mu_i \mu_{ij}^{(p-1)} =$$

$$\mu_i p\Big(\sum_{l=0}^{p-1} C_{p-1}^l \sum_{j\notin A\cup H} \mu_{ij}^{(l)}\Big)\,{}_H m_{jA}^{(p-1-l)} + \sum_{j\in A}\mu_{ij}^{(p-1)}\Big) =$$

$$\mu_i p\,{}_H m_{iA}^{(p-1)} \leqslant \mu_i p!\,c^{p-1}\,{}_H F_{iA}^*,\ i\in E.$$

于是由侯振挺、郭青峰[1]的定理3.3.1知:

$${}_H m_{iA}^{(p)} \leqslant X_i^*,\ i\in E.$$

由(29)及上式知,(27)对 p 亦真,于是由归纳法(27)真,定理证毕.

系1 若:

$$Q_{ij}(t) = P_{ij}G_i(t),\ i,j\in E, \tag{30}$$

且

$${}_H m_{iA}^{(p)} \leqslant c_H f_{iA}^*,\ i\in E; \tag{31}$$

$$\mu_i^{(l)} \leqslant l\mu_i \mu_i^{(l-1)},\ i\in E,\ l=2,\cdots p \tag{32}$$

则

$${}_H m^{(}p)_{iA} \leqslant p!\,c^p\,{}_H f_{iA}^* \quad p\geqslant 1,\ i\in E; \tag{33}$$

证明 本系为定理4的特例,当(30)成立时,定理4中的 ${}_H F_{iA}^*$ 变为 ${}_H f_{iA}^*$ 即得(26),所以(33)真,这就证明了系1.

特别地,若 $Q_{ij}(t) = \dfrac{q_{ij}}{q_i}(1-e^{-q_i t})(t\geqslant 0),\ i\neq j;\ Q_{ii}(x)\equiv 0$,即半马氏过程化为 Q-矩阵为 $(q_{ij},\ i,j\in E)(q_{ii} = -q_i,\ i\in E)$ 的马氏过程,则(32)自动满足,因而只需(31)成立则有(33),这就是侯振挺、郭青峰[1]的定理9.3.4.

§2 状态分类与正常返判别准则

由于半马氏过程具有嵌入链,我们对保守半马氏过程的状态分类是利用嵌入链进行的,需要指出的是,在下面的定义中,关于吸收态的定义方式与文献 Королюк В С and Турбин А Ф[1] 在形式上有所不同.

定义 1 状态 i 称为:

1) 瞬时的,若

$$G_i(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\1, & t\geqslant 0.\end{cases}$$

2) 正规的(稳定的),若 $G_i(0)<1$.

3) 吸收的,若 $P_{ij}=Q_{ij}(\infty)=0 \quad (i\neq j)$.

若状态 i 是吸收的,则对于 $i\neq j, Q_{ij}(t)=0$,而 $Q_{ii}(t)$ 可以取支撑含于$[0,\infty)$的任意非退化分布函数.

定义 2 状态 i 与 j 称为互通的,若

$$f_{ji}^{*}f_{ij}^{*}>0,$$

称状态 i 为常返的,若 $f_{ii}^{*}=1$,否则称为非常返的,常返状态 i 称为正常返的,若 $m_{ii}<\infty$,称为零常返的,若 $m_{ii}=\infty$,易见,互通性在 E 中产生的等价关系与嵌入链是一致的,常返状态的定义也与嵌入链一致,因此,关于状态的分类及常返状态的判别可通过嵌入链来研究,正常返的判别本质上依赖于半马氏矩阵,在一些特殊的情况下,利用上节的结果可把 $f_{ii}^{*}(i\in E)$ 和 $m_{ii}(i\in E)$ 实际计算出来,以判定状态 $i(i\in E)$ 是否常返和正常返,关于此,不拟述及,下面定理 1 将给出一个"正常返判别准则".

设 $s\in E$,令

$$D(s)=(i: s\rightarrow i)\setminus\{s\}, \tag{1}$$

其中"$s\rightarrow i$"表示自状态 s 可达状态 i.

引理 1　若 s 是 $\{X(t,\omega), t < \tau(\omega)\}$ 的常返状态，则 $\{m_{is}, i \in D(s)\}$ 是第一型阃壹方程：

$$Y_i = \sum_{j \in D(s)} P_{ij} X_j + \sum_{j \in D(s) \cup \{s\}} \mu_{ij}, i \in D(s) \tag{2}$$

的最小非负解，且：

$$m_{ss} = \sum_{j \in D(s)} P_{sj} m_{js} + \sum_{j \in D(s) \cup \{s\}} \mu_{sj}. \tag{3}$$

证明　因 s 是 $\{X(t,\omega), t < \tau(\omega)\}$ 的常返态，故

$$f_{ss}^{*} = 1. \tag{4}$$

由(4)，定理 1.2 和由侯振挺、郭青峰[1] 的定理 5.6.2：

$$f_{is}^{*} = 1 \quad (i \in D(s)). \tag{5}$$

由(4)、(5)、定理 2.1.3 以及侯振挺、郭青峰[1] 的系 3.4.1 立得我们的引理.

定理 1　若 s 是半马氏过程 $\{X(t,\omega), t < \tau(\omega)\}$ 的常返状态，则 s 是其正常返状态的充要条件是方程

$$X_i \geq \sum_{j \in D(s)} P_{ij} X_j + \sum_{j \in D(s) \cup \{s\}} \mu_{ij}, i \in D(s) \tag{6}$$

有满足条件

$$\sum_{j \in D(s)} P_{sj} X_j < \infty$$

非负解 $X_i (i \in D(s))$.

证明　由引理 1 及侯振挺、郭青峰[1] 的系 3.3.2 立得我们的定理.

§3　补充与注记

本章内容由侯振挺、刘国欣、袁成桂和周弋完成.

15 半马尔可夫过程的积分型泛函的分布和矩

§1 引言

设 A 是 E 的子集(可以是空的,当它是空集时可以从记号中省去),令:

$$\tau^A(w) = \begin{cases} \inf(t, \tau_1(\omega) < t < \tau(\omega), X(t,\omega) \in A), & \text{若括号中集合不空;} \\ \tau(\omega), & \text{否则.} \end{cases} \tag{1}$$

$\tau_n^A = \min(\tau_n(\omega), \tau^A(\omega))$.

设 $V(i)(i \in E)$ 是 E 上非负有值函数,令

$$\xi_A(\omega) = \int_0^{\tau^A(\omega)} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t, \tag{2}$$

$$\xi_A^{(n)}(\omega) = \int_0^{\tau_n^A(\omega)} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t, n = 1,2,\cdots \tag{3}$$

易证 $\xi_A(\omega)$ 和 $\xi_A^{(n)}(\omega)(n = 1,2,\cdots)$ 是随机变量及以概率 1 有

$$\xi_A^{(n)}(\omega) \uparrow \xi_A(\omega) \quad (n \uparrow \infty). \tag{4}$$

关于积分型泛函 $\xi_A(\omega)$(引入 $\xi_A^{(n)}$ 的主要目的是为了研究 $\xi_A(\omega)$)的分布和矩的研究始于王梓坤[3],他对生灭过程完全解决了 $\xi_A(\omega)$ 的分布和矩的计算问题.继而吴立德[1] 和杨向群

[3]，分别对较一般和一般齐次可列马尔可夫过程研究了这个问题. 侯振挺、郭青峰[1]在他们工作的基础上对齐次可列马尔可夫过程完全解决了 $\xi_A(\omega)$ 的分布和矩的计算问题. 本文讨论半马氏过程的 ξ_A 的分布和矩的计算问题，所采用的主要方法是"最小非负解方法".

在 §2 中，我们研究 $\xi_A^{(n)}$ 和 $\xi_A(\omega)$ 的分布矩的计算问题，得到 $\xi_A^{(n)}$ 和 $\xi_A(\omega)$ 的分布的 Laplace-Stietjes 变换和矩的递推公式，证明了 $\xi_A(\omega)$ 的分布的 Laplace-Stietjes 变换和 p 阶矩是某一非负线性方程组的最小非负解.

在 §3 中，我们引入了与 $\xi_A(\omega)$ 相应的嵌入链的泛函：

$$\xi_A(\omega) = \sum_{k=1}^{\tau^A(\omega)} V(x_{k-1}(\omega))(\tau_k(\omega) - \tau_{k-1}(\omega)).$$

并讨论了 ξ_A 的分布和矩同 $\hat{\xi}_A$ 的分布和矩之间的关系，从而可借助马氏链来研究半马氏过程积分型泛函的性质.

§2　关于 $\xi_A^{(n)}$ 和 ξ_A 的分布与矩的计算

令

$$F_{iA}^{(n)}(t) = P(\xi_A^{(n)}(\omega) \leqslant t \mid X(0) = i), \tag{1}$$

$$F_{iA}(t) = P(\xi_A(\omega) \leqslant t \mid X(0) = i), \tag{2}$$

$$\varphi_{iA}^{(n)}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_{iA}^{(n)}(t) \quad (\lambda > 0), \tag{3}$$

$$\varphi_{iA}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dF_{iA}(t) \quad (\lambda > 0), \tag{4}$$

$$\psi_{iA}^{(n)}(\lambda) = 1 - \varphi_{iA}^{(n)}(\lambda), \tag{5}$$

$$\psi_{iA}(\lambda) = 1 - \varphi_{iA}(\lambda), \tag{6}$$

$$T_{iA}^{(n,p)} = \mathbf{E}\{[\xi_A^{(n)}(\omega)]^p \mid X(0) = i\}, \tag{7}$$

$$T_{iA}^{(p)} = \mathbf{E}\{[\xi_A(\omega)]^p \mid X(0) = i\}, \tag{8}$$

这里 $i \in E, p = 0,1,\cdots$ 显然

$$T_{iA}^{(n,0)} = T_{iA}^{(0)} = 1, \tag{9}$$

所以今后约定 $p = 1,2,\cdots$

有时把 $T_{iA}^{(1)}$ 记为 T_{iA}，上面已说过，如 $A = \varphi$，则诸记号中的 A 可以略去，如 $T_{i\varphi}^{(P)} = T_i^{(P)}$.

由(4)得

$$\psi_{iA}^{(n)}(\lambda) \uparrow \psi_{iA}(\lambda) \quad (n \uparrow \infty), \tag{10}$$

$$T_{iA}^{(n,p)} \uparrow T_{iA}^{(p)} \quad (n \uparrow \infty). \tag{11}$$

引理1 $\psi_{iA}^{(n)}(\lambda)$ 由次之递推公式唯一决定：

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{iA}^{(0)}(\lambda) \equiv 0 \quad (i \in E), \\ &\psi_{iA}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{j \notin A} \psi_{jA}^{(n)}(\lambda) \hat{Q}_{ij}(\lambda V(i)) + 1 - \hat{P}_i(\lambda V(i)) \\ &(n \geqslant 0, i \in E). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

证明 由于(5)，只需证明 $\varphi_{iA}^{(n)}(\lambda)$ 满足次之递推公式：

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{iA}^{(0)}(\lambda) \equiv 0 \quad (i \in E), \\ &\varphi_{iA}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{j \in A} \hat{Q}_{ij}(\lambda V(i)) + \sum_{j \notin A} \hat{\varphi}_{jA}^{(n)}(\lambda) \hat{Q}_{ij}(\lambda V(i)) \\ &(n \geqslant 0, i \in E). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

事实上，$\varphi_{iA}^{(o)}(\lambda) \equiv 1$，显然，而由(3)和(1)有：

$$F_{iA}^{(n+1)}(t) = P\left(\int_0^{\tau_{n+1}^A} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t \leqslant t \mid X(0) = i\right) =$$

$$P\left(\int_0^{\tau_{n+1}^A(\omega)} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t \leqslant t, \tau^A(\omega) \leqslant \tau_1(\omega) \mid X(0) = i\right) +$$

$$P\left(\int_0^{\tau_{n+1}^A(\omega)} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t \leqslant t, \tau^A(\omega) > \tau_1(\omega) \mid X(0) = i\right) =$$

$$\sum_{j \in A} P\left(\int_0^{\tau_1(\omega)} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t \leqslant t, X(\tau_1) = j \mid X(0) = i\right) +$$

$$\sum_{j \notin A} P\left(\int_0^{\tau_{n+1}^A(\omega)} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t \leqslant t, X(\tau_1) = j \mid X(0) = i\right) =$$

$$\sum_{j\in A}P(V(i)\tau_1(\omega)\leqslant t, X(\tau_1)=j \mid X(0)=i)+$$

$$\sum_{j\notin A}P(\int_0^{\tau_1(\omega)}V(X(t,\omega))\mathrm{d}t+\int_{\tau_1(\omega)}^{\tau_{n+1}^A(\omega)}V(X(t,\omega))\mathrm{d}t\leqslant t,$$

$$X(\tau_1)=j \mid X(0)=i)=$$

$$\sum_{j\in A}Q_{ij}(t/V(i))+\sum_{j\notin A}\int_{0-}^{t}P(\int_{\tau_1}^{\tau_{n+1}^A}V(X(t,\omega))\mathrm{d}t\leqslant t-u$$

$$\mid X(\tau_1)=j, X(0)=i)\mathrm{d}P(\int_0^{\tau_1}V(X(t,\omega))\mathrm{d}t\leqslant u$$

$$X(\tau_1)=j \mid X(0)=i)=$$

$$\sum_{j\in A}Q_{ij}(t/V(i))+\sum_{j\notin A}\int_{0-}^{t}P(\int_{0}^{\tau_n^A}V(X(t,\omega))\mathrm{d}t\leqslant t-u$$

$$\mid X(0)=j)\mathrm{d}Q_{ij}(u/V(i))=$$

$$\sum_{j\notin A}\int_{0-}^{t}F_{jA}^{(n)}(t-u)\mathrm{d}Q_{ij}(u/V(i))+\sum_{j\in A}Q_{ij}(t/V(i))$$

$$(n\geqslant 0, i\in E). \quad (14)$$

上式中倒数第三个等号是由于半马氏过程关于跳跃时刻 τ_1 的马氏性质;倒数第二个等号由于半马氏过程的齐次性质. 对(14) 两端同时取 Laplace-Stieltjes 变换即得(13) 的第二式, 于是(13) 得证, 这就证明了我们的引理.

引理 2 $T_{iA}^{(n,p)}$ 由次之递推公式唯一决定:

$$\left.\begin{aligned}&T_{iA}^{(1,p)}=(V(i))^p\mu_i^p \quad (i\in E),\\&T_{iA}^{(n+1,p)}=\sum_{l=0}^{p}C_p^l\sum_{j\in A}(V(i))^l\mu_{ij}^{(l)}T_{iA}^{(n,p-l)}+\sum_{j\in A}(V(i))^p\mu_{ij}^{(p)}\\&(i\in E, n\geqslant 0).\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

其中 $\mu_{ij}^{(p)}=\int_{0-}^{\infty}t^p\mathrm{d}Q_{ij}(t), i,j\in E, \mu_i^{(p)}=\int_{0-}^{\infty}t^p\mathrm{d}P_i(t), i\in E$

证明 $T_{iA}^{(1,p)}=(V(i))^p\mu_i^{(p)}, (i\in E)$ 显然, 由引理 1 证明中 (14) 与侯振挺、郭青峰[1] 的引理 9.3.4, 得:

$$T_{iA}^{(n+1,p)} = \int_0^{\infty} t^p \mathrm{d}F_{iA}^{(n+1)}(t) =$$

$$\sum_{j \notin A}\int_{0-}^{+\infty} t^p \mathrm{d}\left(\int_{0-}^{t} F_{jA}^{(n)}(t-u)\mathrm{d}Q_{ij}(u/V(i))\right) +$$

$$\sum_{j \in A}\int_{0-}^{\infty} t^p \mathrm{d}Q_{ij}(t/V(i)) =$$

$$\sum_{l=0}^{p} C_p^l \sum_{j \notin A}(V(i))^l u_{ij}^{(l)} T_{jA}^{(n,p-l)} + \sum_{j \in A}(V(i))^p \mu_{ij}^{(p)}.$$

对 $n \geqslant 0, i \in E$ 成立,于是(15)真,引理得证.

定理 1 $\{\psi_{iA}(\lambda), i \in E\}$ 是规格方程

$$X_i = \sum_{j \in A}\hat{Q}_{ij}(V(i)\lambda)X_j + 1 - \hat{G}_i(\lambda V(i)),(i \in E) \tag{16}$$

的最小非负解.

证明 由引理 1 和侯振挺、郭青峰[1]的定理 3.2.1 立得我们的定理.

定理 2 对 $p \geqslant 1, \{T_{iA}^{(p)}, i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$X_i = \sum_{j \notin A}P_{ij}X_j + \sum_{j \notin A}\sum_{l=1}^{p} C_p^l (V(i))^l \mu_{ij}^{(l)} T_{jA}^{(p-l)} +$$

$$\sum_{j \in A}(V(i))^p \mu_{ij}^{(p)},(i \in E) \tag{17}$$

的最小非负解.

证明 由(11),引理 2 以及侯振挺、郭青峰[1]的系 3.2.2 立得我们的定理.

定理 3 若

$$T_{iA} \leqslant C < +\infty \quad (i \in E), \tag{18}$$

且

$$\mu_{ij}^{(l)} \leqslant l\mu_i \mu_{ij}^{(l-1)}, i,j \in E, l = 2,3\cdots p \tag{19}$$

则

$$T_{iA}^{(p)} \leqslant p!C^p, p \geqslant 1, i \in E. \tag{20}$$

证明 由(18)知(20)对 $p = 1$ 真.

假设 $p-1$ 已真,即

$$T_{iA}^{(p-1)} \leqslant (p-1)!C^{p-1}, i \in E. \tag{21}$$

由定理 2 知 $\{T_{iA}, i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$X_i = \sum_{j \notin A} P_{ij}X_j + V(i)\mu_i, i \in E$$

的最小非负解，于是由侯振挺、郭青峰[1]的系 3.3.3 知，若 X_i^* ($i \in E$) 是第一型囿壹方程

$$X_i = \sum_{j \notin A} P_{ij}X_j + p!C^{p-1}\mu_i V(i), i \in E$$

的最小非负解，则

$$X_i^* = p!C^{p-1}T_{iA} \quad (i \in E).$$

再由 $T_{iA} \leqslant C < \infty$ 得：

$$X_i^* \leqslant p!C^p. \tag{22}$$

由定理 2 知，$\{T_{iA}^{(p)}, i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$X_i = \sum_{j \notin A} P_{ij}X_j + \sum_{j \notin A}\sum_{l=1}^{p} C_p^l (V(i))^l \mu_{ij}^{(l)} T_{jA}^{(p-l)} + \sum_{j \in A}(V(i))^p \mu_{ij}^{(p)}, \quad i \in E$$

的最小非负解，然后由(21)与(19)得：

$$\sum_{j \notin A}\sum_{l=1}^{p} C_p^l (V(i))^l \mu_{ij}^{(l)} T_{jA}^{(p-l)} + \sum_{j \in A}(V(i))^p \mu_{ij}^{(p)} =$$

$$\sum_{l=0}^{p-1}\sum_{j \notin A} C_p^{l+1} (V(i))^{l+1} \mu_{ij}^{(l+1)} T_{jA}^{(p-l-1)} +$$

$$\sum_{j \in A}(V(i))^p \mu_{ij}^{(p)} \leqslant$$

$$\sum_{l=0}^{p-1}\sum_{j \notin A} C_{p-1}^l \frac{p}{l+1} (V(i))^{l+1} (l+1)\mu_i \mu_{ij}^{(l)} T_{jA}^{(p-l-1)} +$$

$$p\sum_{j \in A}(V(i))^p \mu_i \mu_{ij}^{(p-1)} =$$

$$pV(i)\mu_i\Big(\sum_{l=0}^{p-1}\sum_{j \notin A} C_{p-1}^l (V(i))^l \mu_{ij}^{(l)} T_{jA}^{(p-l-1)}\Big) +$$

$$\sum_{j \in A}(V(i))^{p-1} \mu_{ij}^{(p-1)}\Big) =$$

$$pV(i)\mu_i T_{jA}^{(p-1)} \leqslant p!C^{p-1}V(i)\mu_i, i \in E.$$

于是由侯振挺、郭青峰[1] 的定理 3.3.1 知

$$T_{iA}^{(p)} \leqslant X_i^*, \quad i \in E.$$

由(22) 及上式知,(20) 对 p 亦真,于是由归纳法(20) 真,定理证毕.

注 对 Q 过程而言(19) 自动满足,从而只需(18) 成立则有(20).

§3 ξ_A 的分布和矩与 $\hat{\xi}_A$ 的分布和矩的关系

令

$$X_n(\omega) = X(\tau_n(\omega), \omega), \tag{1}$$

$$\hat{\tau}^A(\omega) = \begin{cases} \inf(n, X_n(\omega) \in A, n \geqslant 1), \text{若括号中集合不空;} \\ \infty, \quad \text{否则}. \end{cases} \tag{2}$$

$$\tau_n^A(\omega) = \min(n, \hat{\tau}^A(\omega)), \tag{3}$$

$$\hat{\xi}_A^{(n)}(\omega) = \sum_{k=1}^{\tau_n^A(\omega)} V(X_{k-1}(\omega))(\tau_k(\omega) - \tau_{k-1}(\omega))(\omega), \tag{4}$$

$$\hat{\xi}_A(\omega) = \sum_{k=1}^{\hat{\tau}_A(\omega)} V(X_{k-1}(\omega))(\tau_k(\omega) - \tau_{k-1}(\omega))(\omega), \tag{5}$$

$$\hat{F}_{iA}^{(n)}(t) = P(\hat{\xi}_A^{(n)}(\omega) \leqslant t \mid X(0) = i), \tag{6}$$

$$\hat{F}_{iA}(t) = P(\hat{\xi}_A(\omega) \leqslant t \mid X(0) = i), \tag{7}$$

$$\hat{\varphi}_{iA}^{(n)}(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda t} d\hat{F}_{iA}^{(n)}(t), \tag{8}$$

$$\hat{\varphi}_{iA}(\lambda) = \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda t} d\hat{F}_{iA}(t), \tag{9}$$

$$\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p)} = \mathbf{E}\{[\hat{\xi}_A(\omega)]^p \mid X(0) = i\}(p = 0, 1, \cdots). \tag{10}$$

定理 1 令

$$F_{iA}(\infty) = \lim_{t\to\infty} F_{iA}(t), \quad i \in E, \tag{11}$$

$$\hat{F}_{iA}(\infty) = \lim_{t\to\infty} \hat{F}_{iA}(t), \quad i \in E. \tag{12}$$

若对所有的 $i, j \in E, \lambda > 0$ 有:

$$\hat{Q}_{ij}(\lambda V(i)) \geqslant P_{ij} e^{-\lambda V(i)}, \tag{13}$$

则

$$F_{iA}(\infty) \geqslant \hat{F}_{iA}(\infty). \tag{14}$$

证明 由(3.2.13)知:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_{iA}^{(0)}(\lambda) = 1 \quad (i \in E), \\ &\varphi_{iA}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{j \notin A} \hat{Q}_{ij}(V(i)\lambda)\varphi_{jA}^{(n)}(\lambda) + \sum_{j \in A} \hat{Q}_{ij}(V(i)\lambda) \quad (n \geqslant 0, i \in E). \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

而由侯振挺、郭青峰[1] 的定理 6.7.1 知

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\varphi}_{iA}^{(0)}(\lambda) = 1 \quad (i \in E), \\ &\hat{\varphi}_{iA}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{j \notin A} P_{ij} e^{-\lambda v(i)} \hat{\varphi}_{jA}^{(n)}(\lambda) + \sum_{j \in A} P_{ij} e^{-\lambda v(i)} \\ &(n \geqslant 0, i \in E). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

由(15),(16) 以及(13) 知:

$$\varphi_{iA}(\lambda) \geqslant \hat{\varphi}_{iA}(\lambda) \quad (i \in E, \lambda > 0), \tag{17}$$

从而

$$F_{iA}(\infty) \geqslant \hat{F}_{iA}(\infty) \quad i \in E. \tag{18}$$

于是定理得证.

系 1 若 $Q_{ij}(x) = P_{ij}G_i(x), i, j \in E$,则对任 $\lambda > 0$.

$$\hat{Q}_{ij}(V(i)\lambda) \geqslant P_{ij} e^{-\lambda V(i)} \quad i, j \in E. \tag{19}$$

进而有

$$F_{iA}(\infty) \geqslant \hat{F}_{iA}(\infty), \quad i \in E. \tag{20}$$

证明 注意到 $Q_{ij}(x) = P_{ij}G_i(x), i, j \in E$,由 Jensen 不等式即得(19),再由定理 1 得(20).

定理 2 如果

$$P_{ij}\mu_i^l \leqslant \mu_{ij}^{(l)} \leqslant l\mu_i\mu_{ij}^{(l-1)}, i, j \in E, 1 \leqslant l \leqslant p. \tag{21}$$

则

$$\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p)} \leqslant T_{iA}^{(p)} \leqslant p!\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p)},\quad i \in E. \tag{22}$$

证明　由定理 2.2 及侯振挺、郭青峰[1] 的定理 6.7.4 知：

$$T_{iA}^{(p)} = \overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p)},\quad i \in E. \tag{23}$$

于是定理对 $p = 1$ 真.

假设定理对 $l = 1,2,\cdots p-1$ 已真，即有：

$$\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(l)} \leqslant T_{iA}^{(l)} \leqslant l!\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(l)},i \in E,l = 1,\cdots p-1. \tag{24}$$

下证定理对 p 亦真，易知，$\{\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p)},i \in E\}$ 是第一型囿壹方程

$$X_i = \sum_{j\in A}P_{ij}X_j + \sum_{l=1}^{p}C_p^l(V(i)\mu_i)^l\sum_{j\notin A}\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p-l)} + lV(i)\mu_i\sum_{j\in A}P_{ij} \tag{25}$$

的最小非负解，于是由(24) 的前半部分，(21) 的前半部分以及定理 2.2 得：

$$\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p)} \leqslant T_{iA}^{(p)},i \in E. \tag{26}$$

由 $C_{p-1}^{l-1} \leqslant C_p^l$，得：

$$V(i)\mu_i\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p-1)} \leqslant \sum_{l=1}^{p}C_p^l[V(i)\mu_i]^l\sum_{j\in A}P_{ij}\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p-l)} + lV(i)\mu_i\sum_{j\in A}P_{ij},i \in E, \tag{27}$$

于是，若 $\{\overset{(\vee)}{T}{}_{iA}^{(p)},i \in E\}$ 表示第一型囿壹方程

$$X_i = \sum_{j\in A}P_{ij}X_j + p!V(i)\mu_i\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p-l)},i \in E \tag{28}$$

的最小非负解，则由(3.3.27) 知：

$$p!\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p)} \geqslant \overset{(\vee)}{T}{}_{iA}^{(p)},i \in E. \tag{29}$$

由(24) 的后半部分，得

$$p!V(i)\mu_i\overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p-l)} \geqslant p!V(i)\mu_iT_{iA}^{(p-l)},i \in E, \tag{30}$$

而由(21) 的后半部分，得：

$$\sum_{j \notin A} \sum_{l=1}^{p} C_p^l (V(i))^l \mu_{ij}^{(l)} T_{iA}^{(p-l)} + \sum_{j \in A} (V(i))^p \mu_{ij}^{(p)} \leqslant$$

$$\sum_{j \notin A} \sum_{l=1}^{p} C_p^l (V(i))^l \mu_i \mu_{ij}^{(l-1)} + \sum_{j \in A} (V(i))^p \mu_i \mu_{ij}^{(p-1)} =$$

$$pV(i)\mu_i \Big(\sum_{j \notin A} \sum_{j \notin A}^{p-1} C_{p-1}^l (V(i))^l \mu_{ij}^{(l)} T_{jA}^{(p-1-l)} +$$

$$\sum_{j \in A} (V(i))^{p-1} \mu_{ij}^{(p-1)} \Big) = pV(i)\mu_i T_{iA}^{(p-l)}. \tag{31}$$

上式中最后一等式由定理 2.2 得到，于是，上(30) 和(31) 得

$$\sum_{j \notin A} \sum_{l=1}^{p} C_p^l (V(i))^l T_{jA}^{(p-l)} + \sum_{j \in A} (V(i))^p \mu_{ij}^{(p)} \leqslant$$

$$pV(i)\mu_i \overset{(\wedge)}{T}{}_{iA}^{(p-l)}, i \in E. \tag{32}$$

故由(32)，(28) 及定理 2.2 得

$$\overset{(\vee)}{T}{}_{iA}^{(p)} \geqslant T_{iA}^{(p)}, i \in E. \tag{33}$$

由(29) 和(33) 立得(22) 的后半部分对 p 亦真由此及(26) 便证明了定理对 p 亦真，由归纳法知定理确真，证毕.

系 2　如果

$$P_{ij}\mu_i^l \leqslant \mu_{ij}^{(l)} \leqslant l\mu_i \mu_{ij}^{(l-1)}, i, j \in E, 1 \leqslant l \leqslant p.$$

则对任一状态 $i \in E$，有

$$T_{iA}^{(p)} < \infty$$

的充要条件是

$$\hat{T}_{iA}^{(p)} < \infty$$

证明　由定理 2 立得本系.

系 3　如果 $Q_{ij}(x) = P_{ij}G_i(x), i, j \in E$，且

$$\mu_{ij}^{(l)} \leqslant l\mu_i \mu_{ij}^{(l-1)}, i, j \in E, 1 \leqslant l \leqslant p,$$

则　$\hat{T}_{iA}^{(p)} \leqslant T_{iA}^{(p)} \leqslant p! \hat{T}_{iA}^{(p)}, i \in E.$

证明　由 $Q_{ij}(x) = P_{ij}G_i(x), i, j \in E$ 及 Jensen 不等式立得(21) 的前半部分，于是由定理 2 立得本系.

§4 补充与注记

本章内容由侯振挺、刘国欣、袁成桂和周弋完成.

16 半马尔可夫生灭过程

§1 半马氏生灭过程的定义、数字特征及其概率意义

生灭过程是一种特殊的、重要的马氏过程，在自然科学和许多实际问题中有着广泛的具体应用.生灭过程有着自身的两大特点：首先，逗留时间服从负指数分布，其次是单生灭.如同把马氏过程推广到半马氏过程那样，放弃逗留时间服从负指数分布，现在我们将生灭过程推广到半马氏生灭过程.

定义 1 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是一概率空间，$X=\{X(t,\omega),0\leqslant t<\tau\}$是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的半马氏过程，其半马氏矩阵为$Q(t)=(Q_{ij}(t))$；$i,j\in E=\{0,1,2,\cdots\}$，设$\tau_n$是$X$的$n$次跳跃点，记$X$的跳跃链为$\tilde{X}=\{X(\tau_n(\omega),\omega),n\geqslant 0\}$，称$X$为半马氏生灭过程，若$X$满足

(i) $\tilde{X}$的转移概率矩阵$P=(P_{ij})$，$i,j\in E$满足

$$P_{ij}=\begin{cases}0, & \text{若 } |j-i|>1 \text{ 或 } j=i;\\ a_i, & j=i-1 \quad (i>0);\\ b_i, & j=i+1 \quad (i\geqslant 0).\end{cases}$$

其中$a_0=0,b_0=1$，当$i>0$时，$a_i>0,b_i>0$，且$a_i+b_i=1$.

(ii) X在状态i的逗留时间服从随机变量υ_i的分布，即$A_i(t)=P(\upsilon_i\leqslant t)$，并设存在$t>0$，使得$A_i(t)>0$，即状态$i$不为吸收态，$\upsilon_i$的数学期望记为$\mathbf{E}(\upsilon_i)$($\mathbf{E}(\upsilon_i)$可为$\infty$).

我们引进如下记号

$$m_i = \frac{\mathbf{E}(\upsilon_i)}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-k} \mathbf{E}(\upsilon_{i-k-1})}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-k-1}}, \tag{1}$$

$$R = \sum_{i=0}^{\infty} m_i, \tag{2}$$

$$\mathrm{e}_i = \frac{\mathbf{E}(\upsilon_i)}{a_i} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_i b_{i+1} \cdots b_{i+k} \mathbf{E}(\upsilon_{i+k+1})}{a_i a_{i+1} \cdots a_{i+k+1}}, \tag{3}$$

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{e}_i, \tag{4}$$

$$Z_0 = 0;\ Z_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k};\ Z = \lim_{n \to \infty} Z_n. \tag{5}$$

$$\eta_n(\omega) = \begin{cases} \inf(t : t > 0;\ X(t, \omega) = n), & \text{如右方集合非空;} \\ \infty, & \text{否则.} \end{cases} \tag{6}$$

$$\eta(\omega) = \lim_{n \to \infty} \eta_n(\omega). \tag{7}$$

即 $\eta_n(\omega)$ 表示半马氏生灭过程 X 首达状态 n 的时刻，$\eta(\omega)$ 即为第一个飞跃点. 以下我们约定：θ_t 表示推移算子，P_i 表示在 $X(0) = i$ 时的条件概率. $\mathbf{E}_i$ 为对应的数学期望，当 $k > n$ 时，$\sum_{i=k}^{n} = 0$.

设 $\mathrm{d}_i = \mathbf{E}_i \eta_{i+1}$，因而 d_i 是 X 自 i 出发首达 $i+1$ 所需的平均时间.

定理 1

$$m_i = \mathbf{E}_i \eta_{i+1},\ R = \mathbf{E}_0 \eta. \tag{8}$$

证明 设 τ_1 表示第一个跳跃点，由于

$$P_0(\tau_1 \leqslant t) = P(\upsilon_0 \leqslant t),$$

从而

$$\mathbf{E}_0 \eta_1 = \mathbf{E}_0 \tau_1 = \mathbf{E}(\upsilon_0).$$

因此

$$\mathrm{d}_0 = \mathbf{E}_0 \eta_1 = \mathbf{E}(\upsilon_0) = \mathbf{E}(\upsilon_0)/b_0. \tag{9}$$

用 $N_{\eta_{j+1}}$ 表示 η_{j+1} 前 σ-代数，由跳跃链的强马氏性有

$$\mathrm{d}_i = \mathbf{E}_i\eta_{i+1} = \mathbf{E}_i[\mathbf{E}_i(\eta_{i+1} \mid F_{\tau_1})] =$$

$$\mathbf{E}_i[\mathbf{E}_i(\eta_{i+1} - \tau_1 + \tau_1) \mid F_{\tau_1}] = \mathbf{E}_i[\mathbf{E}_{X(\tau_1)}\eta_{i+1}] + \mathbf{E}\upsilon_i. \quad (10)$$

由于 $P_i(X(\tau_1) = i - 1) = a_i$ 及 $\mathbf{E}_{i+1}\eta_{i+1} = 0$,得

$$\mathrm{d}_i = \mathbf{E}\upsilon_i + a_i\mathbf{E}_{i-1}\eta_{i+1}. \quad (11)$$

$$\mathbf{E}_j\eta_{j+n} = \mathbf{E}_j[\sum_{i=0}^{n-1}(\eta_{j+i+1} - \eta_{j+i})] =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{E}_j[\mathbf{E}_j(\eta_{j+i+1} - \eta_{j+i}) \mid N_{\eta_{j+i}}] =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{E}_j[\mathbf{E}_j(\theta_{\eta_{j+i}}\eta_{j+i+1}) \mid N_{\eta_{j+i}}] =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{E}_j[\mathbf{E}_{j+i}\eta_{j+i+1}] = \sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{d}_{j+i}. \quad (12)$$

由(11)、(12)得

$$\mathrm{d}_i = \mathbf{E}\upsilon_i + a_i(\mathrm{d}_{i-1} + \mathrm{d}_i). \quad (13)$$

解(9)、(13)得

$$\mathrm{d}_i = \frac{\mathbf{E}(\upsilon_i)}{b_i} + \frac{a_i}{b_i}\mathrm{d}_{i-1} = \frac{\mathbf{E}(\upsilon_i)}{b_i} + \frac{a_i\mathbf{E}\upsilon_{i-1}}{b_ib_{i-1}} + \cdots +$$

$$\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_2\mathbf{E}(\upsilon_1)}{b_ib_{i-1}\cdots b_1} + \frac{a_ia_{i-1}\cdots a_1\mathbf{E}(\upsilon_0)}{b_ib_{i-1}\cdots b_0} =$$

$$\frac{\mathbf{E}(\upsilon_i)}{b_i} + \sum_{k=0}^{i-1}\frac{a_ia_{i-1}\cdots a_{i-k}\mathbf{E}(\upsilon_{i-k-1})}{b_ib_{i-1}\cdots b_{i-k-1}} = m_i.$$

因此 m_i 为 X 自 i 出发,首达 $i+1$ 的平均时间.由(12)有

$$\mathbf{E}_0\eta_n = \sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{d}_i = \sum_{i=0}^{n-1}m_i.$$

从而

$$\mathbf{E}_0\eta = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}_0\eta_n = \sum_{i=0}^{\infty}m_i = R.$$

为了讨论 e_i,S 的概率意义,我们考虑半马氏过程 $X^{(N)}$,$X^{(N)} = \{x^{(N)}(t,\omega), t \geq 0\}$,其状态空间 $E^{(N)} = \{0,1,2,\cdots,N\}$,转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & 0 & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

其中

$$a_i + b_i = 1,\ a_i > 0,\ b_i > 0 \quad (i = 1,2,\cdots,N-1).$$

定义 $\eta_i^{(N)}(\omega)$ 为

$$\eta_i^{(N)}(\omega) = \inf(t : t > 0,\ x^{(N)}(t,\omega) = i) \quad (0 \leqslant i \leqslant N), \tag{15}$$

即 $\eta_i^{(N)}(\omega)$ 是 $x^{(N)}$ 首达 i 的时刻.

记 $P_i^{(N)}$ 为 $x^{(N)}(0) = i$ 的条件概率,$\mathbf{E}_i^{(N)}$ 为对应的数学期望.

定理 2 $\lim\limits_{N\to\infty}\mathbf{E}_n^{(N)}\eta_0^{(N)} = S.$

证明 设 $\mathrm{e}_i^{(N)} = \mathbf{E}_i^{(N)}\eta_{i-1}^{(N)}$,

即 $\mathrm{e}_i^{(N)}$ 是 $X^{(N)}$ 自 i 出发,沿 $X^{(N)}$ 的轨道,首达 $i-1$ 的平均时间

$$\mathrm{e}_N^{(N)} = \mathbf{E}_N^{(N)}\eta_{N-1}^{(N)} = \mathbf{E}(\upsilon_N). \tag{16}$$

$i < N$ 时,

$$\mathrm{e}_i^{(N)} = \mathbf{E}_i^{(N)}[\mathbf{E}_i^{(N)}(\eta_{i-1}^{(N)} \mid F_{\eta_{i-1}}^{(N)})] =$$

$$\mathbf{E}^{(N)}(\upsilon_i) + \mathbf{E}_i^{(N)}(\mathbf{E}_{X(\tau_1)}^{(N)}\eta_{i-1}^{(N)}) = \mathbf{E}(\upsilon_i) + b_i\mathbf{E}_{i+1}^{(N)}\eta_{i-1}^{(N)}. \tag{17}$$

又

$$\mathbf{E}_i^{(N)}\eta_{i-n}^{(N)} = \mathbf{E}_i^{(N)}[\sum_{k=0}^{n-1}(\eta_{i-n+k}^{(N)} - \eta_{i-n+k+1}^{(N)})] =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}_i^{(N)}[\mathbf{E}_{i-n+k+1}^{(N)}\eta_{i-n+k}^{(N)}] = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}_{i-n+k}^{(N)}.$$

从而

$$\mathbf{E}_{i+1}^{(N)}\eta_{i-1}^{(N)} = \mathrm{e}_i^{(N)} + \mathrm{e}_{i+1}^{(N)}. \tag{18}$$

由(17)、(18)得

$$\mathrm{e}_i^{(N)} = \frac{\mathbf{E}(\upsilon_i)}{a_i} + \sum_{k=0}^{N-1-i}\frac{b_ib_{i+1}\cdots b_{i+k}\mathbf{E}(\upsilon_{i+k+1})}{a_ia_{i+1}\cdots a_{i+k}a_{i+k+1}}.$$

所以

$$\lim_{N\to\infty} e_i^{(N)} = e_i, \tag{19}$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}_N^{(N)} \eta_0^{(N)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} e_i^{(n)} = S. \tag{20}$$

直观上讲,$e_i^{(N)}$ 是当 N 为反射壁时,自 i 出发首达 $i-1$ 的平均时间,$\sum_{i=1}^{N} e_i^{(N)}$ 是自 N 出发首达 0 的平均时间,e_i 是当"∞"为反射壁时,自 i 出发首达 $i-1$ 的时间,S 是当"∞"为反射壁时,自"∞"出发首达 0 的平均时间.

现在讨论 Z_n,Z 的概率意义,定义

$$P_k(m,n) = P_k(\eta_m < \eta_n)\ (m \leqslant k \leqslant n \text{ 或 } m \geqslant k \geqslant n) \tag{21}$$

$$q_k(m) = P_k(\eta_m < \eta).$$

因而 $P_k(m,n)$ 是自 k 出发,沿 X 的轨道,在首达 n 以前先到达 m 的概率,$q_k(m)$ 是自 k 出发沿 X 的轨道,经有穷多次跳跃而到达 m 的概率,$q_k(k)$ 是自 k 出发,离开 k 后,经有穷多次跳跃而回到 k 的概率.显然 $P_k(m,n)$ 及 $q_k(m)$ 也是跳跃链 X_n 同样事件的概率,因此王梓坤[3] §5.1 定理 3 对半马氏生灭过程也成立,从而我们有以下定理.

定理 3 (i) 设 $m < k < n$,则

$$P_k(m,n) = \frac{Z_n - Z_k}{Z_n - Z_m},\ P_k(m,n) = \frac{Z_k - Z_m}{Z_n - Z_m}. \tag{22}$$

(ii)

$$q_k(m) = \begin{cases} \dfrac{Z - Z_k}{Z - Z_m}, & \text{如 } k > m; \\ 1, & \text{如 } k < m; \\ a_k + b_k \dfrac{Z - Z_{k+1}}{Z - Z_k}, & \text{如 } k = m. \end{cases} \tag{23}$$

("$\frac{\infty}{\infty}$"记为 1)

(iii) 当且仅当 $Z = \infty$ 时,嵌入马氏链的一切状态都是常返的.

§2 向上的积分型随机泛函

(一) 设 $X = \{X(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 是半马氏生灭过程，$V(i) \geqslant 0$，$V(i) \not\equiv 0, i \in E$ 是 E 上的函数，令

$$\xi^{(n)}(\omega) = \int_0^{\eta_n(\omega)} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t. \tag{1}$$

$$\xi(\omega) = \int_0^{\eta(\omega)} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t. \tag{2}$$

$$F_{kn}(x) = P_k(\xi^{(n)} \leqslant x) \quad (k \leqslant n). \tag{3}$$

$$\varphi_{kn}(\lambda) = \mathbf{E}_k \exp(-\lambda\xi^{(n)}) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}F_{kn}(x) \quad (k \leqslant n). \tag{4}$$

基本引理 设 A 为 E 的任一非空子集，$\tau(\omega)$ 为首达 A 的时刻，即

$$\tau(\omega) = \begin{cases} \inf(t : X(t,\omega) \in A), & \text{如右方 } t \text{ 集非空}; \\ \infty, & \text{其他}. \end{cases}$$

令

$$f_{k,A}(\lambda) = \mathbf{E}_k \exp\left(-\lambda\int_0^{\tau(\omega)} V[X(t,\omega)]\mathrm{d}t\right),$$

则 $f_k(\lambda) \equiv f_{kA}(\lambda)$ 满足差分方程组

$$\begin{cases} a_k\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda V(k)v_k})f_{k-1}(\lambda) - f_k(\lambda) + \\ b_k\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda V(k)v_k})f_{k+1}(\lambda) = 0, & k \overline{\in} A; \\ f_k(\lambda) = 1, & k \in A. \end{cases} \tag{5}$$

证明 以 β 表示过程的第一个跳跃点，它是停时，β - 前 σ - 代数记为 $\mathscr{F}_\beta$ 令

$$F(x) = P_k(\beta \leqslant x) = F_{v_k}(x),$$

$$\mathbf{E}_k[\mathrm{e}^{-\lambda V(k)\beta}] = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda V(k)x}\mathrm{d}F(x) = \mathbf{E}[\mathrm{e}^{-\lambda V(k)v_k}].$$

当 $k \in A$ 时有

$$f_k(\lambda) = \mathbf{E}_k \exp(-\lambda\int_0^{\tau} V(x_t)\mathrm{d}t) =$$

$$\mathbf{E}_k[\mathbf{E}_k(\exp(-\lambda\int_0^{\tau} V(x_t)\mathrm{d}t) \mid \mathscr{F}_\beta)] =$$

$$\mathbf{E}_k(\exp(-\lambda\int_0^{\beta} V(x_t)\mathrm{d}t)\mathbf{E}_k(\exp(-\lambda\int_{\beta}^{\tau} V(x_t)\mathrm{d}t) \mid \mathscr{F}_\beta)] =$$

$$\mathbf{E}_k[\exp(-\lambda\beta V(k))\mathbf{E}_{X(\beta)}\exp(-\lambda\int_0^{\tau} V(x_t)\mathrm{d}t)].$$

由于 $P_k(X(\beta) = k+1) = b_k$, $P_k(X(\beta) = k-1) = a_k$,从而

$$f_k(\lambda) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda V(k)v_k})[b_k f_{k+1}(\lambda) + a_k f_{k-1}(\lambda)],$$

即

$$a_k\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda V(k)v_k})f_{k-1}(\lambda) - f_k(\lambda) + b_k\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda V(k)v_k})f_{k+1}(\lambda) = 0.$$

$k \in A$ 时,由于 $P_k(\tau = 0) = 1$,得 $f_k(\lambda) = 1$.

定理 1 当 $\lambda \geqslant 0$ 时,一切 $\varphi_{kn}(\lambda)(k \leqslant n)$ 都有穷,而且是下列差分方程组的唯一解

$$\begin{cases} a_k\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda V(k)v_k})\varphi_{k-1\,n}(\lambda) - \varphi_{kn}(\lambda) + \\ b_k\mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda V(k)v_k})\varphi_{k+1\,n}(\lambda) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant n; & (6) \\ \varphi_{nn}(\lambda) = 1. & (7) \end{cases}$$

因而

$$\varphi_{kn}(\lambda) = \frac{\delta_n^{(k+1)}}{\delta_n(\lambda)}(0 \leqslant k < n, \delta_n^{(n+1)}(\lambda) = \delta_n(\lambda)), \tag{8}$$

其中

$$\delta_n(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & b_0\mathbf{E}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1\mathbf{E}_1 & -1 & b_1\mathbf{E}_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & a_2\mathbf{E}_2 & -1 & b_2\mathbf{E}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n-2}\mathbf{E}_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}\mathbf{E}_{n-1} & -1 \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}(e^{-\lambda V(i)v_i}),\ i = 0,1,2,\cdots n-1.$$

$\delta_{kn}(\lambda)$ 是以列向量 $(0,0,\cdots,0,b_{n-1})^T$ 代替 $\delta_n(\lambda)$ 中第 k（$k = 1,2,\cdots,n$）列所得行列式. 为证明定理，我们先给出下列引理.

引理 1 若行列式

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} -a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & -a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \cdots & -a_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

满足以下条件

(i) $a_{ii}(\lambda) > 0, a_{ij}(\lambda) \geqslant 0 \quad (\lambda \geqslant k)$.

(ii) 存在常数 k，当 $\lambda \geqslant k$ 时有

$$a_{ii}(\lambda) \geqslant \sum_{j \neq i} a_{ij}(\lambda)(1 \leqslant i < n), a_{nn}(\lambda) > \sum_{j \neq n} a_{nj}(\lambda),$$

且 $a_{ij}(\lambda)$ 对 λ 不增，则存在 $C > 0$，当 $\lambda > k - C$ 时，有 $D_n(\lambda)$ 不等于 0 且与 $(-1)^n$ 同号.

证明 不难用归纳法得此结论.

定理 1 的证明 我们先验证 $\delta_n(\lambda)$ 满足引理 1 的条件 $0 \leqslant k < n-1$ 时，

$$a_k \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k)v_k}) + b_k \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k)v_k}) = \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k)v_k}) \leqslant 1 \quad (\lambda \geqslant 0).$$

$k = n-1$ 时，

$$a_k \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k)v_k}) < \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k)v_k}) \leqslant 1.$$

因此当 $\lambda \geqslant 0$ 时，$\delta_n(\lambda)$ 不等于 0 而与 $(-1)^n$ 同号.

在基本引理中取 $A = \{n\}$ 即得(6)、(7)，因此 φ_{kn} 满足(6)、(7)，再由 $\delta_n(\lambda)$ 不等于 0 知(6)、(7) 有唯一解 $\varphi_{kn}(\lambda)$，显然 $\varphi_{kn}(\lambda)(\lambda \geqslant 0)$ 是有穷的.

（二）现在来求 $\xi^{(n)} = \int_0^{\eta_n} V(x_t)\mathrm{d}t$ 的各级矩. 令

$$m_{kn}^{(l)} = \mathbf{E}_k\{[\xi^{(n)}]^l\} \quad l = 1,2,\cdots$$

定理 2

$$\begin{cases} m_{kn}^{(l)} = \sum\limits_{i=k}^{n-1} G_{in}^{(l)} \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1); & (11) \\ m_{nn}^{(l)} = 0. & (12) \end{cases}$$

其中

$$G_{in}^{(l)} = \frac{1}{b_i} \sum_{j=1}^{l} C_l^j \mathbf{E}_{(i)}^{(j)} [a_i m_{i-1n}^{(l-j)} + b_i m_{i+1n}^{(l-j)}] +$$

$$\sum_{m=0}^{i-1} \frac{a_i a_{i-1} \cdots a_{i-m}}{b_i b_{i-1} \cdots b_{i-m} b_{i-m-1}} \cdot$$

$$\sum_{j=1}^{l} C_l^j \mathbf{E}_{(i-m-1)}^{(j)} [a_{i-m-1} m_{i-m-2n}^{(l-j)} + b_{i-m-1} m_{i-mn}^{(l-j)}]$$

$$\mathbf{E}_{(i)}^{(j)} = (-1)^j [\mathbf{E}(e^{-\lambda V(i) v_i})]^{(j)} |_{\lambda=0} .$$

证明 对(6)、(7) 中两边对 λ 求导 l 次得

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{l} C_l^i \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k) v_k})^{(i)} (a_k \varphi_{k-1n}^{(l-i)}(\lambda) + \\ b_k \varphi_{k+1n}^{(l-i)}(\lambda)) - \varphi_{kn}^{(l)}(\lambda) = 0; & (13) \\ \varphi_{nn}^{(l)}(\lambda) = 0. & (14) \end{cases}$$

在上述方程组中令 $\lambda = 0$,并注意到 $m_{kn}^{(l)} = (-1)^l \varphi_{kn}^{(l)}(0)$,有

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(k)}^{(i)} [a_k m_{k-1n}^{(l-i)} + b_k m_{k+1n}^{(l-i)}] - m_{kn}^{(l)} = 0; & (15) \\ m_{nn}^{(l)} = 0. & (16) \end{cases}$$

由于 $\mathbf{E}_{(k)}^{(0)} = \mathbf{E}(e^{-\lambda V(\beta) v_k}) |_{\lambda=0} = 1$,从而

$$\begin{cases} a_k m_{k-1n}^{(l)} - m_{kn}^{(l)} + b_k m_{k+1n}^{(l)} + \\ \sum\limits_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(k)}^{(i)} [a_k m_{k-1n}^{(l-i)} + b_k m_{k+1n}^{(l-i)}] = 0; & (17) \\ m_{nn}^{(l)} = 0. & (18) \end{cases}$$

令

$$m_{in}^{(l)} - m_{i+1n}^{(l)} = G_{in}^{(l)} \quad (0 \leqslant i < n),$$

从而

$$m_{kn}^{(l)} = \sum_{i=k}^{n-1}[m_{in}^{(l)} - m_{i+1n}^{(l)}] = \sum_{i=k}^{n-1} G_{in}^{(l)}. \tag{19}$$

由(17)当 $0 \leqslant k < n$ 时,有

$$G_{kn}^{(l)} = \frac{a_k}{b_k} G_{k-1n}^{(l)} + \frac{1}{b_k}\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(k)}^{(i)}[a_k m_{k-1n}^{(l-i)} + b_k m_{k+1n}^{(l-i)}] =$$

$$\frac{a_k a_{k-1}\cdots a_1}{b_k b_{k-1}\cdots b_1} G_{0n}^{(l)} + \sum_{m=0}^{k-2} \frac{a_k a_{k-1}\cdots a_{k-m}}{b_k b_{k-1}\cdots b_{k-m-1}} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(k-m-1)}^{(i)}[a_{k-m-1} m_{k-m-2\ \ n}^{(l-i)} + b_{k-m-1} m_{k-m\ \ n}^{(l-i)}] +$$

$$\frac{1}{b_k}\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(k)}^{(i)}[a_k m_{k-1n}^{(l-i)} + b_k m_{k+1n}^{(l-i)}]. \tag{20}$$

$k = 0$ 时(记 $m_{-1n}^{(l)} = 0$), $a_0 = 0, b_0 = 1$.由(17),

$$-m_{0n}^{(l)} + m_{1n}^{(l)} + \sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(0)}^{(i)} m_{1n}^{(l-i)} = 0. \tag{21}$$

由(20)、(21)有

$$G_{kn}^{(l)} =$$

$$\frac{1}{b_k}\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(k)}^{(i)}[a_k m_{k-1n}^{(l-i)} + b_k m_{k+1n}^{(l-i)}] + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a_k a_{k-1}\cdots a_{k-m}}{b_k b_{k-1}\cdots b_{k-m-1}} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(k-m-1)}^{(i)}[a_{k-m-1} m_{k-m-2\ \ n}^{(l-i)} + b_{k-m-1} m_{k-m\ \ n}^{(l-i)}].$$

上述定理表明:高阶矩 $m_{kn}^{(l)}$ 可以通过低阶矩 $m_{in}^{(l-j)}$ $(j = 1,2,\cdots,l)$ 表示,特别当 $l = 1$,则

$$G_{kn}^{(1)} = \frac{1}{b_k}\mathbf{E}_{(k)}^{(1)} + \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a_k a_{k-1}\cdots a_{k-m}}{b_k b_{k-1}\cdots b_{k-m-1}} \mathbf{E}_{(k-m-1)}^{(1)}. \tag{22}$$

从而 $G_{kn}^{(1)}$ 与 n 无关,简记为 G_k

$$\mathbf{E}_{(k)}^{(1)} = \mathbf{E}(V(k)\upsilon_k e^{-\lambda V(k)\upsilon_k})\mid_{\lambda=0}.$$

如果 $\mathbf{E}(\upsilon_k)$ 存在,则

$$\mathbf{E}_{(k)}^{(1)} = V(k)\mathbf{E}(\upsilon_k). \tag{23}$$

如 $V \equiv 1$,则 $\xi^{(n)}(\omega) = \eta_n(\omega)$,由(11)、(22)、(1)有

$$m_{kn}^{(1)} = \mathbf{E}_k \eta_n =$$

$$\sum_{i=k}^{n-1}\left(\frac{\mathbf{E}(\eta_i)}{b_i} + \sum_{m=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-m}\mathbf{E}(\eta_{i-m-1})}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-m-1}}\right) = \sum_{i=k}^{n-1} m_i .$$

(三) 现在来研究 $\xi(\omega)$. 由积分单调收敛定理

$$m_k^{(l)} = \mathbf{E}_k[(\xi(\omega))^l] = \lim_{n\to\infty} m_{kn}^{(l)}. \tag{24}$$

令

$$G_k^{(l)} \triangleq \lim_{n\to\infty} G_{kn}^{(l)} = \frac{1}{b_k}\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(k)}^{(i)}[a_k m_{k-1}^{(l-i)} + b_k m_{k+1}^{(l-i)}] +$$

$$\sum_{m=0}^{k-1}\frac{a_k a_{k-1}\cdots a_{k-m}}{b_k b_{k-1}\cdots b_{k-m-1}}\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(k-m-1)}^{(i)} \cdot$$

$$[a_{k-m-1} m_{k-m-2}^{(l-i)} + b_{k-m-1} m_{k-m}^{(l-i)}]. \tag{25}$$

以下我们假设 $\mathbf{E}_{(k)}^{(i)}(K = 0,1,2,\cdots, i = 1,2,\cdots)$ 恒有界且大于零.

定理 3 (i) $m_k^{(l)} = \sum_{i=k}^{\infty} G_i^{(l)}$. (26)

(ii) 若 $\mathbf{E}_{(k)}^{(i)} > 0(k = 0,1,2,\cdots, i = 1,2,\cdots)$ 恒有界, 则各级矩 $m_k^{(l)}(k, l = 0,1,2,\cdots)$ 同为无穷大或同为有限.

证明 (i) 可由(11) 及(25) 得到.

(ii) 的证明, 由条件我们有 $\exists M > 0$, 使得 $\mathbf{E}_{(k)}^{(i)} \leqslant M\mathbf{E}_{(k)}^{(i-1)}$, 由(i), 我们有 $m_0^{(1)} \geqslant m_1^{(1)} \geqslant m_2^{(1)} \geqslant \cdots$,

$$m_k^{(2)} = \sum_{i=k}^{\infty} G_i^{(2)} =$$

$$\sum_{i=k}^{\infty}\left\{\frac{1}{b_i}\sum_{j=1}^{2} C_2^j \mathbf{E}_{(i)}^{(j)}[a_i m_{i-1}^{(2-j)} + b_i m_{i+1}^{(2-j)}] +\right.$$

$$\sum_{m=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-m}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-m-1}} \cdot$$

$$\left.\sum_{j=1}^{2} C_2^j \mathbf{E}_{(i-m-1)}^{(j)}[a_{i-m-1} m_{i-m-2}^{(2-j)} + b_{i-m-1} m_{i-m}^{(2-j)}]\right\} =$$

$$2\sum_{i=k}^{\infty}\left\{\frac{1}{b_i}\mathbf{E}_{(i)}^{(1)}[a_i m_{i-1}^{(1)} + b_i m_{i+1}^{(1)}] +\right.$$

$$\left.\sum_{m=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-m}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-m-1}}\mathbf{E}_{(i-m-1)}^{(1)}[a_{i-m-1} m_{i-m-2}^{(1)} + b_{i-m-1} m_{i-m}^{(1)}]\right\} +$$

$$\sum_{i=k}^{\infty}\left\{\frac{1}{b_i}\mathbf{E}_{(i)}^{(2)}+\sum_{m=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-m}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-m-1}}\mathbf{E}_{(i-m-1)}^{(2)}\right\}\leqslant$$

$$(2m_0^{(1)}+M)\sum_{i=k}^{\infty}G_i^{(1)}=(2m_0^{(1)}+M)m_k^{(1)}.$$

因此,如果 $m_0^{(1)}<\infty$,则 $m_k^{(2)}<\infty\ (0\leqslant k<\infty)$.

假设 $m_k^{(n)}(k=0,1,2,\cdots)$ 有界,即 $\exists M_1$ 使得 $m_k^{(n)}\leqslant M_1$,当 $l>n$ 时

$$m_k^{(l)}=\sum_{i=k}^{\infty}G_i^{(l)}=$$

$$\sum_{i=k}^{\infty}\left\{\frac{1}{b_i}\sum_{j=1}^{l}C_l^j\mathbf{E}_{(i)}^{(j)}[a_i m_{i-1}^{(l-j)}+b_i m_{i+1}^{(l-j)}]+\sum_{m=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-m}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-m-1}}\cdot\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{l}C_l^j\mathbf{E}_{(i-m-1)}^{(j)}[a_{i-m-1}m_{i-m-2}^{(l-j)}+b_{i-m-1}m_{i-m}^{(l-j)}]\right\}\leqslant$$

$$M\sum_{i=k}^{\infty}\left\{\frac{1}{b_i}\sum_{j=1}^{l}C_l^j\mathbf{E}_{(i)}^{(j-1)}[a_i m_{i-1}^{(l-j)}+b_i m_{i+1}^{(l-j)}]+\sum_{m=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-m}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-m-1}}\cdot\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{l}C_l^j\mathbf{E}_{(i-m-1)}^{(j-1)}[a_{i-m-1}m_{i-m-2}^{(l-j)}+b_{i-m-1}m_{i-m}^{(l-j)}]\right\}=$$

$$M\sum_{i=k}^{\infty}\left\{\frac{1}{b_i}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{l}{j+1}C_{l-1}^j\mathbf{E}_{(i)}^{(j)}[a_i m_{i-1}^{(l-1-j)}+b_i m_{i+1}^{(l-1-j)}]+\right.$$

$$\sum_{m=0}^{i-1}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-m}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-m-1}}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{l}{j+1}C_{l-1}^j\mathbf{E}_{(i-m-1)}^{(j)}\cdot$$

$$\left.[a_{i-m-1}m_{i-m-2}^{(l-1-j)}+b_{i-m-1}m_{i-m}^{(l-1-j)}]\right\}\leqslant$$

$$lM\sum_{i=k}^{\infty}G_i^{(l-1)}+lM\sum_{i=k}^{\infty}\left\{\frac{1}{b_i}\mathbf{E}_{(i)}^{(0)}[a_i m_{i-1}^{(l-1)}+b_i m_{i+1}^{(l-1)}]+\right.$$

$$\left.\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_i a_{i-1}\cdots a_{i-m}}{b_i b_{i-1}\cdots b_{i-m-1}}\mathbf{E}_{(i-m-1)}^{(0)}[a_{i-m-1}m_{i-m-2}^{(l-1)}+b_{i-m-1}m_{i-m}^{(l-1)}]\right\}\leqslant$$

$$lMm_k^{(l-1)}+lMm_0^{(l-1)}m_k^{(1)}<\infty.$$

如 $m_0^{(1)}=\infty$,由(i)及(25)得 $m_k^{(n)}=\infty$.

定理 4 若 $\mathbf{E}(\upsilon_k)(k=0,1,2,\cdots)$ 存在且有界则对一切整数

$k \geqslant 0$,有

(i) 或者 $P_k(\xi(\omega) = \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{E}_0(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i^{(1)} = \infty$;

(ii) 或者 $P_k(\xi(\omega) < \infty) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{E}_0(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i^{(1)} < \infty$.

当(ii) 成立时,$\forall \lambda > 0$ 有

$$\varphi_k(\lambda) = \mathbf{E}_k \mathrm{e}^{-\lambda\xi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\delta^{(k+1)}(\lambda)}{\delta_n(\lambda)}. \tag{27}$$

除若一个常数因子外,它是下列方程组的唯一非平凡有界解

$$a_k \mathbf{E}_k \varphi_{k-1}(\lambda) - \varphi_k(\lambda) + b_k \mathbf{E}_k \varphi_{k+1}(\lambda) = 0, \tag{28}$$

其中

$$\mathbf{E}_k = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda V(k) v_k}).$$

证明 参考张健康[1] §5.2 的系 1 可得.

推论 1 若 $\mathbf{E}(v_k)$ 存在且有限($n = 0,1,2,\cdots$),则 $\forall k \geqslant 0$,飞跃点 $\eta(\omega)$ 或者以 P_k - 概率 1 有限,或者以 P_k - 概率 1 无限,这两种可能分别取决于 $R < \infty$ 或 $R = \infty$.

§3 向下的积分型随机泛函

本节讨论半马氏生灭过程的积分型随机泛函,给出它的分布的拉氏变换所满足的差分方程,同时求出它们的解.

设 $\eta_n(\omega)$ 表示首达状态 n 的时刻,$V(i) \geqslant 0$($V(i) \not\equiv 0$).为定义在 E 上的函数,令

$$\xi_n = \int_0^{\eta_n(\omega)} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t. \tag{1}$$

$$F_{kn}(x) = P_k(\xi_n(\omega) \leqslant x) \quad (k \geqslant n). \tag{2}$$

$$\varphi_{kn}(\lambda) = \mathbf{E}_k \mathrm{e}^{-\lambda\xi_n} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}F_{kn}(x) \quad (k \geqslant n). \tag{3}$$

$n = 0$ 时,称 $\eta_0(\omega)$ 为灭绝时刻.

定理 1 $\varphi_{kn}(\lambda)$ 满足差分方程组

$$\begin{cases} a_k \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k)v_k})\varphi_{k-1n}(\lambda) - \varphi_{kn}(\lambda) + \\ b_k \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k)v_k})\varphi_{k+1n}(\lambda) = 0 \quad (k > n), & (4) \\ \varphi_{nn}(\lambda) = 1. & (5) \end{cases}$$

证明 由基本引理取 $A = \{n\}$ 即得.

现在我们来求(4)、(5) 的解.

(i) 当 $V(k)v_k \equiv 0 (k = 0,1,2,\cdots)$ a.e.P.

显然有 $\xi_n(\omega) = 0$,从而 $\varphi_{kn} = 1 \quad (k = n+1, n+2,\cdots)$,

此时$\{\varphi_{kn}(\lambda)\}$ 是(4)、(5) 的解.

(ii) 当 $V(k)v_k \neq 0 (k = 0,1,2,\cdots)$ a.e.P.

为了求(4)、(5) 的解,我们引进一个新的半马氏生灭过程 $\bar{X} = \{\bar{x}(t,\omega), t \geq 0\}$,满足

$\bar{X}$ 的跳跃链的转移概率与 X 相同,仍记为$\{P_{ij}\}$, $i,j \in E$. $\bar{X}$ 在状态 i 的逗留时间分布服从随机变量 $\bar{v}_i = V(i)v_i$ 的分布.

从定义可知, X 的 i – 区间乘以 $V(i)$ 后,此乘积的分布恰好为 $\bar{X}$ 的 i – 区间长的分布,因此,对 X 的飞跃点以前的轨道,如将每一 i – 区间伸长(或压缩) $V(i)$ 倍后,可以看成 $\bar{X}$ 在飞跃点以前的轨道,令

$$S_k^{(n)}(\omega) = \{t : X(t,\omega) = k, t < \eta_n(\omega)\},$$

$$\bar{\eta}_n(\omega) = \inf\{t > 0, \bar{X}(t,\omega) = n\}.$$

我们有

$$\bar{\eta}_n(\omega) = \int_0^{\eta_n} V(X(t,\omega))\mathrm{d}t = \sum_{k=n+1}^{\infty} V(k)L(S_k^{(n)}(\omega)) = \xi_n(\omega), \qquad (6)$$

其中 $L(\cdot)$ 表示 Lebesgue 测度.

由(6) 知, $\bar{\eta}_n(\omega) = \xi_n(\omega)$ 与 $V(n)$ 无关,为方便,我们不妨设 $V(n) = 1$,令

$$\bar{F}_{kn}(t) = P_k(\bar{\eta}_n \leq t). \qquad (7)$$

$$\bar{\varphi}_{kn}(t) = \mathbf{E}_k e^{-\lambda\bar{\eta}_n} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\bar{F}_{kn}(t). \tag{8}$$

从而

$$F_{kn}(t) = \bar{F}_{kn}(t), \bar{\varphi}_{kn}(t) = \varphi_{kn}(t). \tag{9}$$

由此我们知道,对 X 的 ξ_n 的研究转化为 $\bar{X}$, $\bar{\eta}_n$ 的研究.

引理 1 设 $\bar{\tau}_k$ 为 $\bar{X}$ 的第 k 个 n - 区间的长, $\bar{r}_k$ 表示 $\bar{X}$ 第 k 次离开 n 后首次访问 n 所需时间,则有

(i) $\bar{\tau}_k$、$\bar{r}_k$、$\bar{\tau}_k + \bar{r}_k (k = 1,2,\cdots)$ 分别是独立同分布的随机变量序列.

(ii) $\bar{\tau}_k$ 与 $\bar{r}_l (k, l = 1,2,\cdots)$ 相互独立.

证明 (i) 由 $\bar{\tau}_k = \tau_k$ 及 $\tau_k (k = 1,2,\cdots)$ 独立同分布知, $\bar{\tau}_k$ 独立同分布,设 $\lambda_k(\omega)$ 表示 X 从 n - 区间跳出时的 k 次跳跃点,令

$$S_{k,i}^{(n)} = \{t : X(t,\omega) = i, \lambda_k(\omega) < t < \eta_n(\omega)\}.$$

从而

$$\bar{r}_k = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{\infty} V(i) L(S_{(k,i)}^{(n)}).$$

由 $L(S_{(k,i)}^{(n)})$ 是相互独立同分布的随机变量知, $\bar{r}_k (k = 1,2,\cdots)$ 是独立同分布的随机变量.

同理可证 $\bar{\tau}_k + \bar{r}_k$ 独立同分布.

(ii) $\forall k > 0, l > 0$,由 $\bar{\tau}_k = \tau_k, \bar{r}_l = \sum\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{\infty} V(i) L(S_{(l,i)}^{(n)}$ 以及 τ_k 与 $S_{(l,i)}^{(n)} (i = 0,1,2,\cdots)$ 相互独立知, $\bar{\tau}_k$ 与 $\bar{r}_l (k, l = 1,2,\cdots)$ 相互独立.令

$$E_0 = (\bar{\tau}_1 \geqslant t) \quad E_m = (\sum_{k=1}^{m} (\bar{r}_k + \bar{\tau}_k) \leqslant t <$$

$$\sum_{k=1}^{m} (\bar{\tau}_k + \bar{r}_k) + \bar{\tau}_{m+1}) \quad (m = 1,2,\cdots).$$

从而

$$\bar{p}_{nn}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_n(E_m), \tag{10}$$

其中 $p_{ij}(t)$ 表示 $\bar{X}$ 的转移函数

又设

$$F_{\bar{r}_k}(t) = P(\bar{r}_k \leqslant t),$$

因此

$$F_{\bar{r}_k}(t) = a_n P_{n-1}(\bar{\eta}_n \leqslant t) + b_n P_{n+1}(\bar{\eta}_n \leqslant t) =$$

$$a_n F_{n-1n}(t) + b_n F_{n+1n}(t). \tag{11}$$

又

$$F_{\bar{\tau}_k}(t) = P(\bar{\tau}_k(t) \leqslant t) = P(v_n \leqslant t) = F_{v_n}(t). \tag{4.4.12}$$

由引理 1 有 $\bar{\tau}_k + r_k$ 的分布函数为 $F_{\tau_k}(t)$ 与 $F_{r_k}(t)$ 的卷积,记作 $F_{\tau_k+r_k}(t)$, $F^{(m)}(x)$ 记 $F_{\tau_k+r_k}(x)$ 的 m 次卷积,即 $\sum_{k=1}^{m}(\bar{\tau}_k + \bar{r}_k)$ 的分布函数.因此

$$P_n(E_m) = \iint\limits_{\substack{x_1+x_2>t \\ x_1 \leqslant t}} \mathrm{d}F^{(m)}(x_1)\mathrm{d}F_{\bar{\tau}_{m+1}}(x_2), \tag{13}$$

由(10)、(13) 及 $P_n(E_0) = 1 - F_{v_n}(t)$ 得

$$\bar{p}_{nn}(t) =$$

$$1 - F_{v_n}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \iint\limits_{\substack{x_1+x_2>t \\ x_1 \leqslant t}} \mathrm{d}F^{(m)}(x_1)\mathrm{d}F_{\bar{\tau}_{m+1}}(x_2) =$$

$$1 - F_{v_n}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t (1 - F_{v_n}(t-x))\mathrm{d}F^{(m)}(x). \tag{14}$$

令

$$\bar{p}_n(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\bar{p}_{nn}(t)\mathrm{d}t, \quad F(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - F_{v_n}(t))\mathrm{d}t,$$

$$\varphi_{v_n}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}F_{v_n}(t), \quad \varphi_{\bar{r}_n}(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}F_{\bar{r}_n}(t).$$

因此有

$$\bar{p}_n(\lambda) = F(\lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} F(\lambda)\varphi_{v_n}^m(\lambda)\varphi_{\bar{r}_k}^m(\lambda). \tag{15}$$

下面我们分情况讨论(15)

(i) $v_n \neq 0$ a.e.P.由(15)得

$$\varphi_{\bar{r}_k}(\lambda) = \frac{\bar{p}_n(\lambda) - F(\lambda)}{\varphi_{v_n}(\lambda)\bar{p}_n(\lambda)}. \tag{16}$$

又由(11)得

$$\varphi_{\bar{r}_k}(\lambda) =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF_{\bar{r}_k}(t) = a_n\varphi_{n-1n}(\lambda) + b_n\varphi_{n+1n}(\lambda). \tag{17}$$

由(16)、(17)得

$$a_n\varphi_{n-1n}(\lambda) + b_n\varphi_{n+1n}(\lambda) = \frac{\bar{p}_n(\lambda) - F(\lambda)}{\varphi_{v_n}(x)\bar{p}_n(x)}. \tag{18}$$

由于 $\varphi_{n-1n}(\lambda)$ 可由 §2 中得到,因此(4)、(5)、(18)可唯一求出 ξ_n 的分布的 Laplace 变换 $\varphi_{kn}(\lambda)$.

特别若 $\mathbf{E}(v_n)$ 存在,这时 $F(\lambda)$ 可化为:

(i) 当 $\lambda = 0$ 时

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} (1 - F_{v_n}(t))dt = \mathbf{E}(v_n).$$

(ii) 当 $\lambda > 0$ 时

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}(1 - F_{v_n}(t))dt =$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^s e^{-\lambda t} dt dF_{v_n}(s) = \frac{1}{\lambda}(1 - \varphi_{v_n}(\lambda)).$$

由于

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda}(1 - \varphi_{v_n}(\lambda)) = \mathbf{E}(v_n),$$

所以

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(1 - \varphi_{v_n}(\lambda)) \quad (\lambda \geqslant 0).$$

$$（约定 \lambda = 0 时，\frac{1}{\lambda}(1-\varphi_{\upsilon_n}(\lambda)) = \mathbf{E}(\upsilon_n)）$$

这时(18)化为

$$a_n\varphi_{n-1n}(\lambda)+b_n\varphi_{n+1n}(\lambda)=\frac{\bar{p}_n(\lambda)-\frac{1}{\lambda}(1-\varphi_{\upsilon_n}(\lambda))}{\varphi_{\upsilon_n}(\lambda)\bar{p}_n(\lambda)}.$$

(ii) 当 $\upsilon_n = 0$,a.e.P.令 $\upsilon_n^l = \frac{1}{l}$,a.e.P.

我们利用 υ_n^l 代替 υ_n 而考虑 $\bar{X}$,以 $\tau_k^{(l)}$ 表示第 k 个 n 区间长,记 $\bar{\tau}_k^{(l)}+\bar{r}_k$ 的分布函数的 m 次卷积为 $F_l^{(l)}(x)$,从而有

$$a_n\varphi_{n-1n}(\lambda)+b_n\varphi_{n+1n}(\lambda)=\frac{\bar{p}_n^{(l)}(\lambda)-F_l(\lambda)}{\varphi_{\upsilon_n^l}(\lambda)\bar{p}_n^{(l)}(\lambda)}, \qquad (19)$$

其中

$$F_l(\lambda)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}(1-F_{\upsilon_n^l}(t))\mathrm{d}t,$$

$$\upsilon_n^l=\frac{1}{l}\quad \text{a.s.p r}, \quad P^{(l)}(\lambda)=\int_0^{\infty}\bar{p}_{nn}^{(l)}(t)\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t.$$

$p_{nn}^{(l)}(t)$ 是以 $\upsilon_n^{(l)}$ 代替 υ_n 所得的过程 $\bar{X}$ 的转移函数,在(19)中令 $l\to\infty$,得

$$a_n\varphi_{n-1n}(\lambda)+b_n\varphi_{n+1n}(\lambda)=\lim_{l\to\infty}\frac{\bar{p}_n^{(l)}(\lambda)-F_l(\lambda)}{\varphi_{\upsilon_n^l}(\lambda)\bar{p}_n^{(l)}(\lambda)}. \qquad (20)$$

综上所述,我们得到如下定理:

定理 2

(i) 若 $\upsilon_n\neq 0$,a.e.P.则由(4)、(5)、(18)可唯一求得 ξ_n 的分布函数的拉氏变换 $\varphi_{kn}(\lambda)(k\geqslant n)$.

(ii) $\upsilon_n = 0$,a.e.P.则由(4)、(5)、(20)可唯一求得 ξ_n 的分布函数的拉氏变换 $\varphi_{kn}(\lambda)(k\geqslant n)$.

§4　遍历性及平稳分布

$\delta_k(\omega)$ 表示自来到 k 时刻算起，离开 k 后，首次回到 k 的时间，并称 δ_k 为 k 的回转时间，令

$$\psi_k(\lambda) = \mathbf{E}_k \exp(-\lambda\int_0^{\delta_k} V(x_t)\mathrm{d}t).$$

称$\int_0^{\delta_k} V(x_t)\mathrm{d}t$ 为 V - 回转时间，用 §3 基本引理证明方法同样可得

$$\psi_k(\lambda) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{-\lambda V(k)\upsilon_k})[a_k\varphi_{k-1k}(\lambda) + b_k\varphi_{k+1k}(\lambda)], \qquad (1)$$

其中 $\varphi_{k-1\,k}(\lambda), \varphi_{k+1\,k}(\lambda)$ 见(2.4)和(3.3)令

$$\tilde{\eta}_k^{(l)} = \mathbf{E}_k(\int_0^{\delta_k} V(x_t)\mathrm{d}t)^l. \qquad (2)$$

当 $Z = \infty$ 时，对(1)微分 l 次，同乘 $(-1)^l$，并令 $\lambda = 0$ 得

$$\tilde{\eta}_k^{(l)} = \sum_{i=0}^{l} C_l^i \mathbf{E}_{(k)}^{(i)}[a_k m_{k-1k}^{(l-i)} + b_k m_{k+1k}^{(l-i)}]. \qquad (3)$$

特别 $l = 1$ 时，记 $\tilde{\eta}_k = \tilde{\eta}_k^{(1)}$ 此时，

$$\tilde{\eta}_k = a_k m_{k-1k} + b_k m_{k+1k} + \mathbf{E}_{(k)}^{(1)}. \qquad (4)$$

下面我们介绍在 $Z = \infty$ 的情况下求平均 V - 回转时间的方法，因此也能求出状态 i 的平均返回时间，以及在遍历的情况下的平稳分布.

将过程 X 稍加改造，使状态 N 成为反射状态($N > k$)，即设系统到达 N 后，以概率 1 回到 $N-1$，而且逗留于 N 的平均时间不变，仍为 $\mathbf{E}(\upsilon_N)$，此过程记为 $X' = \{X'(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 代替原来的过程 X，X' 的转移概率矩阵由(1.14)所定义，当质点在到达 N 以前，两过程的运动规律完全一样，因此(3.4)、(3.5)在 $n \leqslant k < N$ 对 X' 也成立.令

$${}_N\xi_n(\omega) = \int_0^{\eta_n(\omega)} V(X'(t,\omega))\mathrm{d}t.$$

$${}_N F_{kn}(x) = P_k({}_N\xi_n(\omega) \leqslant x).$$

$${}_N\varphi_{kn}(x) = \mathbf{E}_k e^{-\lambda_N \xi_n}.$$

其中 $\eta'_n(\omega)$ 是 X' 首达状态 n 的时间.易求得

$${}_N\varphi_{Nn}(\lambda) = \mathbf{E}_N e^{-\lambda_N \xi_n(\omega)} = \mathbf{E}(e^{-\lambda V(N)v_N})\,{}_N\varphi_{N-1n}(\lambda). \tag{5}$$

同理可求

$$\begin{cases} a_k \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k)v_k})\,{}_N\varphi_{k-1n}(\lambda) - {}_N\varphi_{kn}(\lambda) + \\ b_k \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k)v_k})\,{}_N\varphi_{k+1n}(\lambda) = 0;\ (n < k < N), & (6) \\ {}_N\varphi_{nn}(\lambda) = 1. & (7) \end{cases}$$

解(5)、(6)、(7) 得

$${}_N\varphi_{kn}(\lambda) = \frac{\Delta_N^{(k)}(\lambda)}{\Delta_N(\lambda)} \quad (k = n+1, n+2, \cdots, N),$$

其中

$$\Delta_N(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 & b_{n+1}\mathbf{E}_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n+2}\mathbf{E}_{n+2} & -1 & b_{n+2}\mathbf{E}_{n+2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{N-1}\mathbf{E}_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_N\mathbf{E}_N & -1 \end{vmatrix}.$$

$\Delta_N^{(k)}(\lambda)$ 是以列向量 $\begin{pmatrix} -a_{n+1}\mathbf{E}_{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 代替 $\Delta_N(\lambda)$ 中第$(k-n)$列所得行列式,$\mathbf{E}_k \equiv \mathbf{E}(e^{-\lambda V(k)v_k})$ 令

$${}_N m_{kn}^{(l)} = \mathbf{E}_k\left[\int_0^{\eta'_n} V(X'_t)\mathrm{d}t\right]^l \quad (l = 1, 2, \cdots).$$

将(5)、(6)、(7) 对 λ 微分 l 次,令 $\lambda = 0$,注意到 ${}_N m_{kn}^{(l)} = (-1)^l \varphi_{kn}^{(l)}(0)$,我们有

$$
\begin{cases}
a_{kN}\,{}_Nm^{(l)}_{k-1n} - {}_Nm^{(l)}_{kn} + b_{kN}\,{}_Nm^{(l)}_{k+1n} + \\
\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}^{(i)}_{(k)} [\, a_{kN}\,{}_Nm^{(l-i)}_{k-1n} + b_{kN}\,{}_Nm^{(l-i)}_{k+1}\,] = 0; & (8) \\
{}_Nm^{(l)}_{nn} = 0; & (9) \\
{}_Nm^{(l)}_{Nn} - {}_Nm^{(l)}_{N-1n} = \sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}^{(i)}_{(N)}\,{}_Nm^{(l-i)}_{N-1n}. & (10)
\end{cases}
$$

$$
n < k < N.
$$

解此方程组得

$$
{}_Nm^{(l)}_{kn} = \frac{\widetilde{\Delta}^{(k)}_N(0)}{\Delta_N(0)} \quad (n < k \leqslant N), \tag{11}
$$

其中 $\widetilde{\Delta}^{(k)}_N(0)$ 是以列向量

$$
\begin{bmatrix}
-\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}^{(i)}_{(n+1)} [\, a_{n+1}\, m^{(l-i)}_{nn} + b_{n+1}\, m^{(l-i)}_{n+2n}\,] \\
-\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}^{(i)}_{(n+2)} [\, a_{n+2}\, m^{(l-i)}_{n+1n} + b_{n+2}\, m^{(l-i)}_{n+3\ n}\,] \\
\cdots \quad \cdots \\
-\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}^{(i)}_{(N-1)} [\, a_{N-1}\, m^{(l-i)}_{N-2\ n} + b_{N-1}\, m^{(l-i)}_{Nn}\,] \\
-\sum_{i=1}^{l} C_l^i \mathbf{E}^{(i)}_{(N)}\, m^{(l-i)}_{N-1n}
\end{bmatrix}
$$

代替 $\Delta_N(0)$ 中的第$(k-n)$列向量所得行列式. 参考张健康[1]§5.4定理3的证明有

定理 1 若 $Z=\infty$,则

$$
\varphi_{kn}(\lambda) = \lim_{N\to\infty} {}_N\varphi_{kn}(\lambda); \quad m^{(l)}_{kn} = \lim_{N\to\infty} {}_Nm^{(l)}_{kn}.
$$

在(11)中令 $l=1, k=n+1$ 得

$$
{}_Nm_{n+1n} = \frac{\widetilde{\Delta}^{(n+1)}_N(0)}{\Delta_N(0)}.
$$

其中 $\widetilde{\Delta}_N^{(n+1)}(0)$ 是以列向量 $\begin{bmatrix} -\mathbf{E}_{(n+1)}^{(1)} \\ -\mathbf{E}_{(n+2)}^{(1)} \\ \vdots \\ -\mathbf{E}_{(N)}^{(1)} \end{bmatrix}$ 代替 $\Delta_N(0)$ 中第 1 列所得行列式，展开 $\widetilde{\Delta}_N^{(n+1)}(0)$ 以及 $\Delta_N(0)$ 得

$$
{}_N m_{n+1n} = \frac{\mathbf{E}_{(n+1)}^{(1)}}{a_{n+1}} + \sum_{k=0}^{N-n-3} \frac{b_{n+1} b_{n+2} \cdots b_{n+k+1} \mathbf{E}_{(n+k+2)}^{(1)}}{a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+k+2}} + \frac{b_{n+1} b_{n+2} \cdots b_{N-1} \mathbf{E}_{(N)}^{(1)}}{a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{N-1}}.
$$

因此

$$
m_{n+1n} = \lim_{n \to \infty} {}_N m_{(n+1)n} = \frac{\mathbf{E}_{(n+1)}^{(1)}}{a_{n+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{n+1} b_{n+2} \cdots b_{n+k+1} \mathbf{E}_{(n+k+2)}^{(1)}}{a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+k+2}}.
$$

注意到 $\mathbf{E}_{(k)}^{(1)} = V(k)\mathbf{E}(v_k)$，所以

$$
m_{n+1n} = \frac{V(n+1)\mathbf{E}(v_{n+1})}{a_{n+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{n+1} b_{n+2} \cdots b_{n+k+1} V(n+k+2)\mathbf{E}(v_{(n+k+2)})}{a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{n+k+2}}.
$$

由定理 2.2 有

$$
\begin{aligned}
m_{k-1k} = G_{k-1k} &= \frac{1}{b_{k-1}}\mathbf{E}_{k-1}^{(1)} + \sum_{m=0}^{k-2} \frac{a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_{k-m-1}}{b_{k-1} b_{k-2} \cdots b_{k-m-2}} \mathbf{E}_{(k-m-2)}^{(1)} = \\
&\frac{V(k-1)\mathbf{E}(v_{k-1})}{b_{k-1}} + \sum_{m=0}^{k-2} \frac{a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_{k-m-1} V(k-m-2)\mathbf{E}(v_{(k-m-2)})}{b_{k-1} b_{k-2} \cdots b_{k-m-2}}.
\end{aligned}
$$

令 $V = 1$，则得 δ_k 的平均返回时间为

$$
u_k = a_k m_{k-1} + b_k \mathbf{e}_{k+1} + \mathbf{E}(v_k). \tag{12}
$$

引理 1

$$u_k = \begin{cases} \mathbf{E}(v_0) + e_1 & (k = 0), \\ \dfrac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_0 b_1 \cdots b_{k-1}}(\mathbf{E}(v_k) + e_1) & (k > 0). \end{cases}$$

证明 将(1.1)及(1.3)分别代入(12)得

$$u_k = \mathbf{E}(v_k) + \frac{\mathbf{E}(v_{k-1})}{b_{k-1}} + \sum_{i=0}^{k-2} \frac{a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_{k-1-i} \mathbf{E}(v_{(k-i-2)})}{b_{k-1} b_{k-2} \cdots b_{k-2-i}} + b_k e_{k+1},$$

而

$$e_i = \frac{\mathbf{E}(v_i)}{a_i} + \frac{b_i}{a_i} e_{i+1} \qquad (i > 0).$$

因此

$$e_1 = \frac{\mathbf{E}(v_1)}{a_1} + \frac{b_1 \mathbf{E}(v_2)}{a_1 a_2} + \frac{b_1 b_2 \mathbf{E}(v_3)}{a_1 a_2 a_3} + \cdots + \frac{b_1 b_2 \cdots b_{k-1} \mathbf{E}(v_k)}{a_1 a_2 \cdots a_k} + \frac{b_1 b_2 \cdots b_k}{a_1 a_2 \cdots a_k} e_{k+1}.$$

注意到 $b_0 = 1$,从而 $k > 0$ 时,引理得证.

当 $k = 0$ 时,因 $b_0 = 1$,从而

$$u_0 = b_0 e_1 + \mathbf{E}(v_0).$$

由文献 Solomon Fred[1] 我们得到状态 k 的平稳分布为:

$$p_k = \frac{\mathbf{E}(v_k)}{u_k} \quad (k \geq 0), \quad p_0 = \frac{\mathbf{E}(v_0)}{u_0} = \frac{\mathbf{E}(v_0)}{\mathbf{E}(v_0) + e_1}.$$

从而

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i} \quad \left(其中\ \pi_i = \frac{b_0 b_1 \cdots b_{i-1} \mathbf{E}(v_i)}{a_1 a_2 \cdots a_i \mathbf{E}(v_0)} \right),$$

$$p_k = \frac{\pi_k}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i}.$$

因此,我们得到如下定理:

定理 2

(i) 半马氏生灭过程常返但非正常返的充要条件是

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{b_1 b_2 \cdots b_k} = \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = \infty.$$

(ii) 半马氏生灭过程正常返的充要条件是

$$Z = \infty, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i < \infty,$$

且其平稳分布为

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i}, & k = 0; \\ \dfrac{\pi_k}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i}, & k > 0. \end{cases}$$

§5 补充与注记

本章主要内容取自唐有荣的硕士论文.

17 半马氏决策规划的折扣目标

§1 引言及模型

周知,折扣目标的连续时间马氏决策规划和半马氏决策规划已由许多作者研究,由于对目标函数定义的实质性差异,两种模型的主要结果无法统一起来,这与半马氏决策过程和马氏决策过程之间的包含关系极不相称.为此我们提出一个新的半马氏决策规划的折扣目标,不仅建立了此模型的最优方程,还据此证明了最优平稳策略的存在性,作为本章的特例,得到了连续时间马氏决策规划折扣模型的主要结果,从而将两种模型的结果统一了起来.

本章所考虑的模型是具有如下意义的五重组$\{S,(A(i),i\in S),(G(i,a,t,j),i,j\in S,a\in A(i),t\in R),r,V\}$,其中$S$为状态空间,非空可数;$A(i)(i\in S)$为系统于状态$i$所采取的允许行动空间,且均为非空的Borel紧子集,r为定义于$k=\{(i,a),i\in S,a\in A(i)\}$上的有界函数,且对固定的$i\in S$,$r(i,\cdot)$关于$a$于$A(i)$上连续,$V$为折扣目标,$\alpha$为折扣率因子,$G(i,a,t,j)$为半马氏决策矩阵,即它满足:

(1) $G(i,a,x,j)=0,\quad x<0,\quad i,j\in S\quad a\in A(i)$;

(2) 对固定的$i,j\in S,a\in A(i)$,$G(i,a,x,j)$关于λ于R上非减右连续函数;

(3) $p(i,a,x)\triangleq\sum_{j\in S}G(i,a,x,j)\leqslant 1,i\in S,a\in A(i)$.

若系统于状态 i 时采取行动 $a \in A(i)$,则有三件事发生:

(i) 系统将跳到一个新的状态 j 的概率为 $G(i,a,\infty,j)$,且 $\sum_{j\in S} G(i,a,\infty,j) = 1$;

(ii) 系统在进入新的状态 j 之前,于状态 i 所逗留的时间的分布函数为:

$$\bar{G}(i,a,x,j) = \begin{cases} G(i,a,x,j,)/G(i,a,\infty,j), & G(i,a,\infty,j) \neq 0; \\ \text{任意固定的分布}, & \text{其他}. \end{cases}$$

(iii) 系统立即获得的报酬率函数为 $r(i,a)$.

我们考虑平稳策略 π_S^d,即形如 $\pi = (f_t, f_t = f_0, t \geqslant 0, f_0(i) \in A(i), i \in S)$ 的全体所成之集.对于这样的有平稳策略 π,我们简记为 $\pi = f_0^\infty$,因此平稳策略 $\pi = f_0^\infty$ 由决策函数 $f_0 \in F \triangleq \{f, f(i) \in A(i), i \in S\}$ 唯一确定.

对任何 $\pi = f^\infty \in \pi_s^d$,令

$$G(i,\pi,x,j) = G(i,f(i),x,j) \quad i,j \in S, x \in R,$$

于是任给初始状态 i,策略 π 和 i 可确定一个保守的(即不中断的)半马氏过程$\{\xi_i(\pi,t)\}$.

与以往(如董泽清、刘克[1])折扣目标 V_α 的定义不同的是,我们需引进转移概率 $F_{ij}(\pi,t)$:

$$F_{ij}(\pi,t) \triangleq P_\pi\{\xi(\pi,t) = j \mid \xi(\pi,0) = i\}.$$

这里 P_π 为由策略 π 所导致的概率测度,以下我们将用 $F_{ij}(\pi,t)(i, j \in S, t \geqslant 0, \pi \in \Pi_s^d(1)$ 来定义新的折扣目标 $\bar{V}_\alpha$:

$$\bar{V}_\alpha(\pi,i) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\Big(\sum_{j\in S} F_{ij}(\pi,t) r(\pi,j)\Big)dt. \tag{1}$$

这里 $r(\pi,i) = r(i,f(i))$,若 $\pi = f^\infty, i,j \in S$.

注 1 这里的折扣目标 $\bar{V}_\alpha$ 与以往的折扣目标 V_α(见董泽清、刘克[1])显然不同,但是我们的定义比董泽清、刘克[1]中的定义的概率更加明确,从而更易于让人接受和理解.

定义 1 策略 $\pi^* \in \Pi_s^d(S)$ 称为最优的,如果对一切 $\pi \in$

$\Pi_s^d(S), i \in S$,有 $\bar{V}(\pi^*, i) \geq \bar{V}_\alpha(\pi, i)$.

由目标函数 $\bar{V}_\alpha$ 的定义知,对报酬函数 r 任加一个常数 C 都不会改变对最优策略的讨论,因此以下总认为 $0 \leq r(i, a) \leq M, i \in S, a \in A(i)$.

为了讨论的需要,我们假定:

假设 A $\quad \beta = \sup\limits_{\substack{i \in S \\ a \in A(i)}} \left(\sum\limits_{j \in S} \int_0^\infty e^{-\alpha x} G(i, a, dx, j) \right)$.

注 2 如果董泽清、刘克[1]中的假设 1 成立,则这里的假设 A 也成立. 事实上,设 $q(j \mid i, a)(a \in A(i), i, j \in S)$ 为董泽清、刘克[1]中的状态跳跃律族,$t(\cdot \mid i, a)(a \in A(i))$ 为董泽清、刘克[1]中的状态转移空间分布,不妨设 $\sum\limits_{j \in S} q(j \mid i, a) = 1$,则有

$$G(i, a, x, j) = q(j \mid i, a) t(x \mid i, a).$$

$$\sum_{j \in S} \int_0^\infty e^{-\alpha x} G(i, a, dx, j) =$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} t(dx \mid i, a) \triangleq \beta_\alpha(i, a).$$

于是得董泽清、刘克[1]中假设 1($\sup\limits_{\substack{i \in S \\ a \in A(i)}} \beta_\alpha(i, a) < 1$)意味着这里的假设 A.

§2 最优策略的存在性

对任何 $\pi = f^\infty \in \Pi_s^d(S)$,令

$$F_\alpha(i, \pi, j) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} F_{ij}(\pi, x) dx,$$

$$P_\alpha(i, \pi) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} (1 - P(i, f(i), x) dx,$$

$$G_\alpha(i, \pi, j) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dG(i, f(i), x, j),$$

$$P_\alpha(i,a) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}(1 - P(i,a,x))\mathrm{d}x,$$

$$G_\alpha(i,a,j) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\mathrm{d}G(i,a,x,j).$$

由(1)可得

$$\bar{V}_\alpha(\pi,i) = \sum_{j\in S}F_\alpha(i,\pi,j)r(\pi,j) \leqslant \frac{M}{\alpha}, \quad i \in S.$$

定理 1 假设 A 成立,则$\{\bar{V}_\alpha(\pi,i), i \in S\}$是下列方程组

$$X_i = P_\alpha(i,\pi)r(\pi,i) + \sum_{j\in S}G_\alpha(i,\pi,j)X_j, \quad i \in S \qquad (2)$$

的唯一非负有界解.

证明 由 Короюк В С and Туроин А Х[1]中(3.12)式有对任何 $\pi = f^\infty$,

$$F_{ij}(\pi,t) = \delta_{ij}(1 - P(i,f(i),t)) +$$
$$\sum_{k\in S}\int_0^t (G(i,f(i),\mathrm{d}x,k)F_{ij}(\pi,t,x). \qquad (3)$$

将(3)式两边取 L - 变换得

$$F_\alpha(i,\pi,j) = \delta_{ij}P_\alpha(i,\pi) + \sum_{k\in S}G_\alpha(i,\pi,k)F_\alpha(k,\pi,j) \qquad (4)$$

将(4)式两边同乘以 $r(\pi,j)$,然后对 j 求和得

$$\sum_{j\in S}F_\alpha(i,\pi,j)r(\pi,j) = P_\alpha(i,\pi)r(\pi,i) +$$
$$\sum_{j\in S}\sum_{k\in S}G_\alpha(i,\pi,k)F_\alpha(k,\pi,j)r(\pi,j).$$

注意到 $G_\alpha(i,\pi,k)$、$F_\alpha(k,\pi,j)$ 及 $r(\pi,j)$ 的非负性得

$$\sum_{j\in S}F_\alpha(i,\pi,j)r(\pi,j) = P_\alpha(i,\pi)r(\pi,i) +$$
$$\sum_{k\in S}G_\alpha(i,\pi,k)[\sum_{j\in S}F_\alpha(k,\pi,j)r(\pi,j)\backslash]],$$

于是有

$$\bar{V}_\alpha(\pi,i) = P_\alpha(i,\pi)r(\pi,i) + \sum_{k\in S}G_\alpha(i,\pi,i)\bar{V}_\alpha(\pi,k).$$

这表明$\{\bar{V}_\alpha(\pi,i), i \in S\}$为方程(2)的非负有界解.

下证方程(2)的有界非负解的唯一性.

设$\{u_i, i \in S\}$为方程(2)的任意非负有界解，则：

$$V_\alpha(\pi,i) - u_i = \sum_{k\in S} G_\alpha(i,\pi,k)V_\alpha(\pi,k) - u_k. \tag{5}$$

由假设 A 得

$$\bar{\beta} \triangleq \sup_{i\in S}\sum_{k\in S} G_\alpha(i,\pi,k) < 1.$$

设 $\|u\| = \sup_{i\in S} |u_i|$，由(5)式和归纳法得：

对任何 $n \geqslant 1$，有

$$|\bar{V}_\alpha(\pi,i) - u_i| \leqslant \bar{\beta}^n(\|u\| + \frac{M}{\alpha}), \quad i \in S.$$

在上式中令 $n \to \infty$ 得

$$\bar{V}_\alpha(\pi,i) = u_i \quad i \in S,$$

于是方程(2)的非负有界解的唯一性得证.

设 $\quad \bar{V}_\alpha^*(i) = \sup_{\pi\in \Pi_s^d(S)} \bar{V}_\alpha(\pi,i), \quad i \in S.$

显然有 $\qquad 0 \leqslant \bar{V}_\alpha^*(i) \leqslant \dfrac{M}{\alpha}, \quad i \in S.$

定理 2 假设 A 成立，则$\{\bar{V}_\alpha^*(i), i \in S\}$是下列最优方程

$$u(i) = \sup_{a\in A(i)}\{P_\alpha(i,a)r(i,a) + \sum_{j\in S} G_\alpha(i,a,j)u(j)\}, \quad i \in S \tag{6}$$

的唯一非负有界解.

证明 对任何 $\pi = f^\infty \in \Pi_s^d(S)$，由定理 1 得

$$\begin{aligned}\bar{V}_\alpha(\pi,i) &= P_\alpha(i,f(i))r(i,f(i)) + \\ &\sum_{j\in S} G_\alpha(i,f(i),j)\bar{V}_\alpha(\pi,j) \leqslant \\ &P_\alpha(i,f(i))r(i,f(i)) + \sum_{j\in S} G_\alpha(i,f(i),j)\bar{V}_\alpha^*(j) \leqslant \\ &\sup_{a\in A(i)}\{P_\alpha(i,a)r(i,a) + \sum_{j\in S} G_\alpha(i,a,j)\bar{V}_\alpha^*(j)\}.\end{aligned}$$

由 $\pi \in \Pi_s^d(S)$ 的任意性得

$$\bar{V}_\alpha^*(i) \leqslant \sup_{a\in A(i)}\{P_\alpha(i,a)r(i,a) + \sum_{j\in S} G_\alpha(i,a,j)\bar{V}_\alpha^*(j)\}. \tag{7}$$

另一方面,对任给 $\varepsilon>0, i\in S$,则存在 $f(i)\in A(i)$,使得

$$P_a(i,f(i))r(i,f(i))+\sum_{j\in S}G_a(i,f(i),j)\bar{V}_a^*(j)\geqslant$$

$$\sup_{a\in A(i)}\{P_a(i,a)r(i,a)+\sum_{j\in S}G_a(a,j)\bar{V}_a^*(j)\}-\varepsilon.$$

由(7)式得

$$\bar{V}_a^*(i)\leqslant P_a(i,f(i))r(i,f(i))+$$
$$\sum_{j\in S}G_a(i,f(i),j)\bar{V}_a^*(j)+\varepsilon. \tag{8}$$

令 $\pi=f^\infty$,由定理1得

$$\bar{V}_a[I-G_a(f)]^{-1}P_ar(f).$$

这里 $G_a(f)=(G_a(i,f(i),j), i,j\in S)$ 为矩阵,向量 $P_ar(f)$ 的第 i 个分量为 $P_a(i,f(i))r(i,f(i))$,再注意到假设 A,由马氏链基本知识

$$I+G_a(f)+G_a^2(f)+\cdots+G_a^n(f)+\cdots=$$
$$[I-G_a(f)]^{-1},$$

于是(8)式得

$$\bar{V}_a^*\leqslant\bar{V}_a(f)[I-G_a(f)]^{-1}e\leqslant\bar{V}_a(f)+\frac{\varepsilon}{1-\beta}e.$$

这里 e 为分量全为 1 的向量.故有

$$\bar{V}_a^*(i)\geqslant\bar{V}_a(\pi,i)=P_a(i,f(i))r(i,f(i))+$$
$$\sum_{j\in S}G_a(i,f(i),j)\bar{V}_a(\pi,j)\geqslant P_a(i,f(i))r(i,f(i))+$$
$$\sum_{j\in S}G_a(i,f(i),j)[\bar{V}_a^*(j)-\frac{\varepsilon}{1-\beta}]\geqslant$$
$$P_a(i,f(i))r(i,f(i))+$$
$$\sum_{j\in S}G_a(i,f(i),j)\bar{V}_a^*(j)-\frac{\varepsilon}{1-\beta}\geqslant$$
$$\sup_{a\in A(i)}\{P_a(i,a)r(i,a)+$$
$$\sum_{j\in S}G_a(i,a,j)\bar{V}_a^*(j)\}-\frac{\beta}{1-\beta}\varepsilon. \tag{9}$$

在(9)式中令 $\epsilon \to 0$ 得

$$V_\alpha^*(i) \geq \sup_{a\in A(i)}\{P_\alpha(i,a)r(i,a) + \sum_{j\in S}G_\alpha(i,a,j)\bar{V}_\alpha^*(j)\}, \quad i \in S. \tag{10}$$

由(7)和(10)知,$\{V_\alpha^*(i), i \in S\}$ 是最优方程(6)的非负有界解.

下证最优方程(6)有界非负解的唯一性.

设$\{u(i), i \in S\}$为方程(6)的任意非负有界解,则有

$$u(i) = \sup_{a\in A(i)}\{P_\alpha(i,a)r(i,a) + \sum_{j\in S}G_\alpha(i,a,j)u(j)\}, \quad i \in S.$$

由假设 A 的控制收敛定理易得

函数 $h(i,a)$:

$$h(i,a) \triangleq P_\alpha(i,a)r(i,a) + \sum_{j\in S}G_\alpha(i,a,j)u(j)$$

对固定的 $i \in S$,关于 a 于紧集 $A(i)$ 上连续,从而存在 $f^*(i) \in A(i)(i \in S)$ 使得

$$u(i) = P_\alpha(i,f^*(i))r(i,f^*(i)) + \sum_{j\in S}G_\alpha(i,f^*(i),j)u(j)$$

令 $\pi^* = f^{*\infty}$,于是由定理1得

$$u(i) = \bar{V}_\alpha(\pi^*, i) \leq \bar{V}_\alpha^*, \quad i \in S. \tag{11}$$

另外,对任何 $f^\infty \triangleq \pi \in \Pi_s^d(S)$,显然可得

$$u(i) \geq P_\alpha(i,f(i))r(i,f(i)) + \sum_{j\in S}G_\alpha(i,f(i),j)u(j),$$

于是有 $u(i) \geq \bar{V}_\alpha(\pi, i) \quad, i \in S$,

则 $u(i) \geq \bar{V}_\alpha^*(i), \quad i \in S. \qquad (12)$

由(11)和(12)两式得 $u(i) \geq \bar{V}_\alpha^*(i) \quad i \in S$

这表明最优方程(6)的解是唯一的.

定理3 对于折扣目标 $\bar{V}_\alpha$,假设 A 成立,则最优平稳策略一定存在.

证明 由定理2得

$$\bar{V}_\alpha^*(i) = \sup_{a\in A(i)}\{P_\alpha(i,a)r(i,a) +$$

$$\sum_{j\in S}G_\alpha(i,a,j)\bar{V}_\alpha^*(j)\},\quad i\in S.$$

由假设 A 和控制收敛定理得

对固定的 i 关于 a 于 $A(i)$ 上连续,再注意到 $A(i)$ 的紧性,故存在 $f^*(i)(i\in S)$ 使得

$$\bar{V}_\alpha^*(i)=P_\alpha(i,f^*(i))r(i,f^*(i))+$$
$$\sum_{j\in S}G_\alpha(i,f^*(i),j)\bar{V}_\alpha^*(j)\}.$$

再由定理 1 得令 $\pi^*=f^{*\infty}$,

$$\bar{V}_\alpha(\pi^*,i)=\bar{V}_\alpha^*(i),\quad i\in S.$$

即策略 π^* 为最优的.

§3 连续时间折扣模型

设 $\pi=f^\infty\in\Pi_s^d(S)$, $Q(\pi)=(q(j\mid i,f(i)),i,j\in S)$ 为全稳定保守 Q – 矩阵,即满足

(i) $0\leqslant q(j\mid i,f(i))<\infty,\quad i\neq j$;

(ii) $\sum_{j\neq i}q(j\mid i,f(i))=-q(i\mid i,f(i))\triangleq q_i(\pi)<\infty$.

于是由马氏过程的基本理论得

$$G(i,\pi,x,j)=\begin{cases}\dfrac{q(j\mid i,f(i))}{q_i(\pi)}(1-e^{-q_i(\pi)x}, & i\neq j;\\ 0, & i=j.\end{cases}$$

$$P(i,\pi,x)=\sum_{j\in S}G(i,\pi,x,j)=1-e^{-q_i(\pi)x},$$

从而得

$$G_\alpha(i,\pi,j)=\begin{cases}\dfrac{q(j\mid i,f(i))}{q_i(\pi)+\alpha}, & i\neq j;\\ 0, & i=j.\end{cases}$$

$$P_\alpha(i,\pi)=\frac{1}{-q_i(\pi)+\alpha}.$$

由(2)式得

$$\bar{V}_\alpha(\pi,i)=\frac{r(i,f(i))}{q_i(\pi)+\alpha}+\sum_{j\neq i}\frac{q(j\mid i,f(i))}{q_i(x)+\alpha}\bar{V}_\alpha(\pi,j),$$

即

$$\alpha\bar{V}_\alpha(\pi,i)=r(i,f(i))+\sum_{j\in S}q(j\mid i,f(i))\bar{V}_\alpha(\pi,j).$$

于是由定理1得,这里的半马氏决策规划折扣目标 $\bar{V}_\alpha$ 的定义是通常的连续时间马氏决策规划折扣目标的定义的直接推广.

注3 这里折扣目标 $\bar{V}_\alpha$ 的定义与[1]中折扣目标 $\bar{V}_\alpha$ 定义不同.

事实上,设 $\pi=f^\infty$,由董泽清、刘克[1]中折扣目标 $\bar{V}_\alpha$ 的定义和董泽清、刘克[1]中(6)式以及说明得

$$\begin{aligned}
&V_\alpha(\pi,i)=\\
&r(i,f(i))+\beta_\alpha(i,f(i))\sum_{j\in S}q(j\mid i,f(i))\bar{V}_\alpha(\pi,j)=\\
&r(i,f(i))+\sum_{j\in S}[\beta_\alpha(i,f(i))q(j\mid i,f(i))]\bar{V}_\alpha(\pi,j)=\\
&r(i,f(i))+\sum_{j\in S}G_\alpha(i,f(i),j)\bar{V}_\alpha(\pi,j)=\\
&r(i,\pi)+\sum_{j\in S}G_\alpha(i,\pi,j)\bar{V}_\alpha(\pi,j).
\end{aligned}$$

但是

$$P_\alpha(\pi,i),j)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}(1-t(x\mid i,\quad f(i))dx\neq 1,$$

因此,由定理1得,

$$V_\alpha(\pi,i)\neq\bar{V}_\alpha(\pi,i),\quad i\in S.$$

§4 补充与注记

本章结果属于郭先平和侯振挺.

第5篇

应用之一:数学生态学

18 数学生态学随机模型

§1 引言

生物数学是一门年轻的边缘学科，近几十年来发展尤为迅速．而数学生态学作为生物数学中最为基础的分支，相对来说，它发展得比较早，也比较成熟．它用数学模型来描述生物的生存与环境的关系，并利用数学的方法来进行研究，以使一些生态现象得到解释和控制．在已有数学生态的文献中，大多将描述生物种群数量变化的生态模型分为两类：

1. 生命长．世代重叠并且数量很大的种群，常常近似地用连续过程来描述，通常表为微分方程．主要是用微分方程的理论和方法来研究．

2. 生命短．世代不重叠的种群，或者虽然生命长、世代重叠但数量比较少的种群，常用不连续过程来描述，通常表为差分方程．主要是用差分方程的方法来研究．

在上述两类模型中，通常把种群之间的影响以及环境对种群的影响归结到模型的参数中和差分方程来进行研究．因此，生物种群数量的变化过程可由微分方程或差分方程的解给出，即由一条连续的光滑曲线，或一条右边左极的阶梯曲线(离散时间的连续延拓) 来描述．从局部来看，或者说在一段相对较短的时期内，用上述模型来描述生物种群数量的发展和变化是可行的．但从整体看来，或者说在一段相对较长的时期内，用上述模型来描述生物种群

的变化就存在明显的缺陷.例如,考察一个地震多发地区人口数量的发展.在地震没发生时期它有其确定的发展规律,但当地震突然来临,人口数量可能会出现突然下降.又例如,某种昆虫当环境突然发生变化(例如,温度突然下降或突然上升),其数量也可能会出现突然的变化.我们把上述这类变化称为突变,它具有以下特性:其一,这种突变发生的时刻是不确定的,或者说是随机的.其二,突变的强度一般来说也是不确定的,或者说是随机的.

由于上述原因,我们提出数学生态学随机模型.粗略地说,数学生态学随机模型是这样来描述这种群的发展:其一,允许在随机时刻发生的突变;其二,在相继两次突变之间生物种群的变化满足某种微分方程或差分方程.以下我们先介绍一般数学生态学随机模型,然后举出若干例子.

§2　数学生态学随机模型

考虑 k 种生物种群数量的变化规律($k \geq 1$),其中每种种群不仅有自己的发展规律,而且种群与种群之间存在相互作用(例如,相互竞争、淘汰、共存等关系),同时种群数量还存在随机的突变.

用 $R_+ = [0, \infty)$ 表示每种种群数量构成的状态空间,那么 $E \triangleq R_+^k$ 表示 K 种种群构成的状态空间,用 $\mathscr{E}$ 表示 R_+^k 的 Borelσ- 代数,显然$(E, \mathscr{E})$ 是一个 Polish 空间.

令 $f: E \times [0, \infty) \to E$ 表示相继两次突变之间种群的变化规律.即$f(x, t)$为某微分方程或差分方程在初始时刻($t = 0$)从 x 出发的解.因此当 x 固定时,$f(x, t)$ 是 t 的右连左极函数.

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$为一个完备概率空间,$X(t)$表示 t 时刻种群的数量,那么 $X(t)$ 是 k 维随机向量.而$\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ 是一列递增的非负随机序列,表示种群发生突变的时刻.我们只考虑种群突变强度之间具有马尔可夫性依赖关系的情况,即$\{X(\tau_n)\}_{n \geq 1}$ 构成$\{X(t)\}$ 的马尔可夫骨架.因此,有以下定义.

定义 1 称定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上取值于 E 中的右连左极随机过程 $X=\{x(t),0\leqslant t\leqslant\tau(\omega)\}$ 为数学生态学随机模型,如果 X 满足下列条件:

(i) X 关于$\{\tau_n\}_{n\geqslant0}(\tau_0\triangleq0)$是$(H,Q)$- 过程见本书第 1 章 §3;

(ii) $\forall n\geqslant0.X(t)=f(x(\tau_n),t-\tau_n),\tau_n\leqslant t<\tau_{n+1}$.

由以上定义可知,数学生态学随机模型是逐段确定的(H,Q)- 过程,常见的情况是更特别的逐段确定的$(H,G.q)$- 过程(见本书第 1 章 §5).

对于通常的数学生态学模型,其解是一条确定曲线.例如,具有密度制约的单种群 Logistic 模型为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\gamma_m N(K-N)/K,$$

其解曲线为

$$N(t)=K/[1+(\frac{K}{N_0}-1)\exp(-\gamma_m t)],$$

其中 K 为容纳量,γ_m 为种群的内禀自然增长率,N_0 为 $t=0$时种群的数量.当然,对于大多数情况其解曲线的初等表达式是很难给出的.数学生态学模型主要研究解曲线的平衡点、稳定性、周期现象以及持久性和灭绝性等问题.

对于数学生态学随机模型,此时描述生物种群变化的不再是一条确定曲线,而是一族样本曲线 $X(t,\omega),(\omega\in\Omega)$.因此,在研究此模型时,我们可以从两方面来考虑:其一,直接研究生物种群平均数量的变化规律,即研究$\mathbf{E}[X(t)]$(随 t 变化)的平衡点、稳定性、全局稳定性、渐近稳定性、极限环、周期现象与浑沌现象,持久性和灭绝性等问题;其二,从概率的角度出发,研究生物种群数量的转移概率的计算、遍历性与平稳分布、灭绝概率、灭绝时间分布以及过程的第一次到达时间的分布和矩、正则性等问题.

§3　数学生态学随机模型的向前、向后方程

设 $X = \{X(t,\omega), 0 \leqslant t < \tau(\omega)\}$ 是 K 种群数学生态学随机模型．$\forall t \geqslant 0, x \in E, A \in \mathscr{E}$ 令

$$P(t,x,A) \triangleq P(x(t) \in A \mid x(0) = x), \tag{1}$$

$$G(t,x) \triangleq P(\tau_1 \leqslant t \mid x(0) = x). \tag{2}$$

$$h(t,x,A) \triangleq P(x(t) \in A, \tau_1 > t \mid x(0) = x) = \delta_A(f(x,t)) \cdot P(\tau_1 > t \mid x(0) = x) \triangleq \delta_A(f(x,t))(1 - G(t,x)). \tag{3}$$

$$q(t,x,A) \triangleq P(x(\tau_1) \in A, \tau_1 \leqslant t \mid x(0) = x). \tag{4}$$

其拉氏变换分别记为($\lambda > 0$)：$P_\lambda(x,A) \triangleq \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t,x,A) dt$，

$G_\lambda(x) \triangleq \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(t,x)$；$h_\lambda(x,A) \triangleq \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(t,x,A) dt$；

$q_\lambda(x,A) \triangleq \int_0^\infty e^{-\lambda t} dq(t,x,A)$.

由于 X 是一类特殊的(H,Q)-过程，由本书第1章 §3可得．

定理1　$\{p_\lambda(x,A), x \in E, A \in \mathscr{E}\}$ 是下列向后方程

$$X(x,A) = \int_E q_\lambda(x,dy) X(y,A) + h_\lambda(x,A), \quad x \in E, A \in \mathscr{E}, \lambda > 0 \tag{5}$$

的最小非负解，即

$$p_\lambda(x,A) = (\sum_{n=0}^\infty Q^n \cdot H)(x,A), \tag{6}$$

其中 $H \triangleq (h_\lambda(x,A); x \in E, A \in \mathscr{E})$；$Q \triangleq (q_\lambda(x,A); x \in E, A \in \mathscr{E})$；$Q^0 \triangleq (\delta_A(x); x \in E, A \in \mathscr{E})$；$Q^k = (Q^k(x,A); x \in E, A \in \mathscr{E})$, $k \geqslant 0$；$Q^{K+1}(x,A) \triangleq \int_E q_\lambda(x,dy) Q^K(y,A)$, $k \geqslant 0$；$(Q^n \cdot$

$H)(x,A) \triangleq \int_E Q^n(x,\mathrm{d}y)h_\lambda(y,A)$.证明见本书第1章 §3.

由于 $X(t)$ 是 K 维随机向量，不妨记 $X(t) = (X_1(t),\cdots, X_K(t))^T$，$\forall t \geqslant 0, x \in E, \lambda > 0$，引入下列记号

$$\mathbf{E}_x[X(t)] \triangleq (\mathbf{E}_x[x_1(t)],\cdots,\mathbf{E}_x[x_K(t)])^T =$$
$$(\int_E y_1 p(t,x,\mathrm{d}y),\cdots,\int_E y_K p(t,x,\mathrm{d}y))^T,$$
$$\mathbf{E}_{x,\lambda}X \triangleq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbf{E}_x[x(t)]\mathrm{d}t =$$
$$(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbf{E}_x[x_1(t)]\mathrm{d}t,\cdots,\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbf{E}_x[x_K(t)]\mathrm{d}t)^T =$$
$$(\int_E y_1 p_\lambda(x,\mathrm{d}y),\cdots,\int_E y_K p_\lambda(x,\mathrm{d}y))^T,$$

其中，$y = (y_1,\cdots,y_K)^T \in E$.

定理2 $\forall \lambda > 0$，$\{\mathbf{E}_{x,\lambda}X; x \in E\}$ 是向量方程

$$X(x) = \int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y)X(y) + \int_E y h_\lambda(x,\mathrm{d}y), \quad x \in E \qquad (7)$$

的最小非负数，写成分量的形式为：$\forall 1 \leqslant i \leqslant K$，$\{\mathbf{E}_{x,\lambda}X_i = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbf{E}_x[x_i(t))]\mathrm{d}t; x \in E\}$ 是方程

$$X_i(x) = \int_E q_\lambda(x,\mathrm{d}y)X_i(y) + \int_E y_i h_\lambda(x,\mathrm{d}y), \quad x \in E \qquad (8)$$

的最小非负解，从而

$$\mathbf{E}_{x,\lambda}X = \sum_{n=0}^\infty \int_E (Q^n \cdot H)(x,\mathrm{d}y)y =$$
$$(\sum_{n=0}^\infty \int_E (Q^n \cdot H)(x,\mathrm{d}y)y_1,\cdots,\sum_{n=0}^\infty \int_E (Q^n \cdot H)(x,\mathrm{d}y)y_k)^T. \qquad (9)$$

证明 由 $\mathbf{E}_{x,\lambda}X$ 的定义及(5)和(6)可得本定理.

定理3 $\forall \lambda > 0$，若存在 $E \times \mathscr{E}$ 上非负函数 $\hat{q}_\lambda(x,A)$，当 $A \in \mathscr{E}$ 固定时它关于 x 是 $\mathscr{E}$ 可测函数，当 $x \in E$ 固定时它是 $\mathscr{E}$ 上非负测度，使得

$$\int_F q_\lambda(x,\mathrm{d}y)h_\lambda(y,A) =$$

$$\int_E h_\lambda(x,\mathrm{d}y)\hat{q}_\lambda(y,A),\quad \forall x\in E, A\in\mathscr{E}, \tag{10}$$

则 $\{p_\lambda(x,A); x\in E, A\in\mathscr{E}\}$ 是下列向前方程

$$X(x,A) =$$

$$\int_E X(x,\mathrm{d}y)\hat{q}_\lambda(y,A) + h_\lambda(x,A),\quad \forall x\in E, A\in\mathscr{E} \tag{11}$$

的最小非负解,即

$$p_\lambda(x,A) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} H\cdot\hat{Q}^n\right)(x,A),$$

其中,$\hat{Q}^n$ 的定义与定理 1 中 Q^n 的定义方法相同(用 $\hat{q}(x,A)$ 代替 $q(x,A)$),而

$$H\cdot\hat{Q}^n(x,A) \triangleq \int_B h_\lambda(x,\mathrm{d}y)\hat{Q}^n(y,A),\quad \forall x\in E, A\in\mathscr{E}.$$

证明　定理 1.2.2 可得上述结论.

§4　数学生态学随机模型举例

单种群 Logistic 随机模型.

此时,$K = 1, E = [0,\infty), \mathscr{E} = \mathscr{B}[0,\infty)$.我们允许 Logistic 模型发生随机突变的情况,假设突变之后种群数目服从分布 Π,即

$$P(x(\tau_1)\in A \mid x(0),\tau_1) = \Pi(A),\quad \forall A\in\mathscr{E}.$$

1) 非密度制约的情形:非密度制约 Logistic 模型由微分方程 $\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \gamma_m N(t)$ 给出,其解曲线为 $N(t) = N_0\exp(\gamma_m t)$.其中,$N_0$ 为 $t = 0$ 时种群的数目,γ_m 为种群的内禀自然增长率,小谷虫的 Crombic 实验表明在不太长的时期之内,小谷虫的数量变化可以用上述解曲线来描述.

对于随机模型,此时

$$h(t,x,[0,y]) = \delta_{[0,y]}(x\exp(\gamma_m t))(1 - G(t,x)) =$$
$$\delta_{[x\exp(\gamma_m t),\infty)}(y)(1 - G(t,x)),$$
$$q(t,x,A) = P(x(\tau_1) \in A, \tau_1 \leqslant t \mid x(0) = x) =$$
$$P(x(\tau_1) \in A \mid \tau_1 \leqslant t, x(0) = x)P(\tau_1 \leqslant t \mid x(0) = x) =$$
$$G(t,x) \cdot \Pi(A),$$

由定理 1 及 $q_\lambda(x,A) = G_\lambda(x)\Pi(A)$ 可得(见本书第 1 章 §5),

$$P_\lambda(x,A) = h_\lambda(x,A) + \frac{G_\lambda(x)\int_0^\infty h_\lambda(y,A)\Pi(\mathrm{d}y)}{1 - \int_0^\infty G_\lambda(y)\Pi(\mathrm{d}y)},$$

从而

$$\mathbf{E}_{x,\lambda}X = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbf{E}_x[X(t)]\mathrm{d}t = \int_0^\infty y p_\lambda(x,\mathrm{d}y) =$$
$$\int_0^\infty y h_\lambda(x,\mathrm{d}y) + \frac{G_\lambda(x)\int_0^\infty\int_0^\infty y h_\lambda(z,\mathrm{d}y)\Pi(\mathrm{d}z)}{1 - \int_0^\infty G_\lambda(y)\Pi(\mathrm{d}y)} =$$
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}x\mathrm{e}^{\gamma_m t}[1 - G(t,x)]\mathrm{d}t +$$
$$\frac{G_\lambda(x)\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}y\mathrm{e}^{\gamma_m t}[1 - G(t,y)]\Pi(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t}{1 - \int_0^\infty G_\lambda(y)\Pi(\mathrm{d}y)}.$$

特别,若 $G(t,x) = 1 - \mathrm{e}^{-\mu t}$,$(\mu > 0)$.则

$$\mathbf{E}_{x,\lambda}X = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}x\mathrm{e}^{\gamma_m t} \cdot \mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}t +$$
$$\frac{\frac{\mu}{\lambda+\mu}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{\gamma_m t}\mathrm{e}^{-\mu t}\mathrm{d}t \cdot \int_0^\infty y\Pi(\mathrm{d}y)}{1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu}} =$$
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}x\mathrm{e}^{-(\mu-\gamma_m)t}\mathrm{d}t + \frac{\mu\int_0^\infty y\Pi(\mathrm{d}y)}{\lambda}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{e}^{-(\mu-\gamma_m)t}\mathrm{d}t.$$

从而

$$\mathbf{E}_x[X(t)]=$$

$$\begin{cases} x+\gamma_m\int_0^{\infty} y\Pi(\mathrm{d}y)\cdot t, & \mu=\gamma_m, \\ x\mathrm{e}^{-(\mu-\gamma_m)t}+\dfrac{\mu}{\mu-\gamma_m}\int_0^{\infty} y\Pi(\mathrm{d}y)[1-\mathrm{e}^{-(\mu-\gamma_m)t}], & \mu\neq\gamma_m. \end{cases}$$

因此,当 $t\to\infty$ 时,$\mathbf{E}_x[X(t)]$ 变化可分为下列三种情形:

(i) 若 $\mu>\gamma_m$,则 $\mathbf{E}_x[X(t)]$ 全局渐近趋于 $\dfrac{\mu}{\mu-\gamma_m}\cdot\int_0^{\infty} y\Pi(\mathrm{d}y)$;

(ii) 若 $\mu=\gamma_m$,则 $\mathbf{E}_x[X(t)]$ 线性增加,其速度为 $\gamma_m\cdot\int_0^{\infty} y\Pi(\mathrm{d}y)$;

(iii) 若 $\mu<\gamma_m$,则 $\mathbf{E}_x[X(t)]$ 以指数速度增加.

2) 密度制约的情形:密度制约的 Logistic 模型由微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}=\gamma_m N(\bar{K}-N)/\bar{K}$ 给出,其解曲线为

$$N(t)=\frac{\bar{K}}{1+(\dfrac{\bar{K}}{N_0}-1)\exp(-\gamma_m t)}.$$

其中,γ_m,N_0 与 1) 中意义相同,$\bar{K}$ 为容纳量,细菌,酵母或浮游藻类等种群的变化规律与上述解曲线相吻合.

对于随机模型,此时

$$h(t,x,[0,y])=\delta_{[\bar{K}/[1+(\frac{\bar{K}}{x}-1)\exp(-\gamma_m t),\infty)}(y)[1-G(t,x)],$$

$$q(t,x,A)=G(t,x)\cdot\Pi(A),$$

$$p_\lambda(x,A)=h_\lambda(x,A)+\frac{G_\lambda(x)\int_0^{\infty} h_\lambda(y,A)\Pi(\mathrm{d}y)}{1-\int_0^{\infty} G_\lambda(y)\Pi(\mathrm{d}y)}.$$

从而

$$\mathbf{E}_{x,\lambda}X = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_x[X(t)]\mathrm{d}t = \int_0^\infty y p_\lambda(x,\mathrm{d}y) =$$

$$\frac{\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\bar{K}}{1+(\frac{\bar{K}}{x}-1)e^{-\gamma_m t}}[1-G(t,y)]\mathrm{d}y + G_\lambda(x)\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\bar{K}}{1+(\frac{\bar{K}}{y}-1)e^{-\gamma_m t}}[1-G(t,y)]\Pi(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t}{1-\displaystyle\int_0^\infty G_\lambda(y)\Pi(\mathrm{d}y)},$$

特别,若 $G(t,x) = 1 - e^{-\mu t}(\mu > 0)$.则

$$\mathbf{E}_{x,\lambda}X = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\bar{K}e^{-\mu t}}{1+(\frac{\bar{K}}{x}-1)e^{-\gamma_m t}}\mathrm{d}t +$$

$$\frac{\mu}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty \frac{\bar{K}e^{-\mu t}}{1+(\frac{\bar{K}}{y}-1)e^{-\gamma_m t}}\Pi(\mathrm{d}y)\mathrm{d}t,$$

从而

$$\mathbf{E}_x[X(t)] = \frac{\bar{K}e^{-\mu t}}{1+(\frac{\bar{K}}{x}-1)e^{-\gamma_m t}} +$$

$$\mu\int_0^\infty\int_0^t \frac{\bar{K}e^{-\mu s}}{1+(\frac{\bar{K}}{y}-1)e^{-\gamma_m s}}\mathrm{d}s\Pi(\mathrm{d}y),$$

因此,当 $t\to\infty$ 时,$\mathbf{E}_x[X(t)]$ 全局渐近趋于

$$\mu\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\bar{K}e^{-\mu t}}{1+(\frac{\bar{K}}{y}-1)e^{-\gamma_m t}}\mathrm{d}t\Pi(\mathrm{d}y),$$

进一步

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}_x[X(t)]\begin{cases} = \bar{K}, & \Pi(\bar{K}) = 1, \\ < \bar{K}, & \Pi([0,\bar{K}]) = 1, \text{且 } \Pi(\bar{K}) < 1, \\ > \bar{K}, & \Pi([\bar{K},\infty)) = 1, \text{且 } \Pi(\bar{K}) < 1. \end{cases}$$

§5　补充与注记

本章结果属于侯振挺、刘再明[1].

第6篇

应用之二:微分方程

19 随机脉冲泛函微分方程理论

§1 引言

作为瞬动型系统的一种数学模型——脉冲微分方程的研究始于60年代Milinam、Myshkis[1].近30年来,脉冲微分方程作为一个非常活跃的数学研究方向之一,吸引了一大批微分方程专家,并且取得了极为丰富的研究成果,随着脉冲常微分方程理论的日趋成熟,人类对自然界的认识日益深刻,脉冲常微分方程理论暴露出其自身的局限性,例如具有时滞的生态模型就不能用脉冲常微分方程来描述,80年代,数学家为了建立一种能客观地描述事物发展过程的数学模型,提出了脉冲泛函微分方程,它是一个脉冲微分方程与泛函微分方程的交叉学科,最早的工作属于Anokhin[1](1986).脉冲泛函微分方程较好地描述了具有脉冲及滞后现象的生态模型的演变过程,这类方程具有两大特点:(1) 方程的解具有不连续性,即存在一列跳跃时刻$\{t_n\}_{n\geq 0}$,其中$\{t_n\}_{n\geq 0}$为常数列,通常称$\{t_n\}_{n\geq 0}$为脉冲时刻;(2) 在每个t_n时刻的脉冲量为常量.显然,上述限制条件仍然过于严格,实际上,自然界任何事物的发展变化过程都是一个随机过程,它离不开其周围环境的影响,任何时刻都可能由于外界随机因素的干扰而使事物发生突变或灾变,因此考虑到事物在其发展过程中受周围环境的影响,脉冲泛函微分方程同样存在其局限性;例如描述生物种群变化的生态模型,如果规定生物种群每次发生突变的时间和突变的变化量,

我们可以用某个脉冲泛函微分方程的解曲线来刻画生物种群数量随时间的变化过程，这是一条具有跳跃点的固定曲线．然而，如果生物种群受到随机因素的影响，则其变化过程不再是固定曲线，而是一个随机过程．也就是说，受随机因素的干扰，生物种群发生突变的时间和突变的变化量都是随机变量．

基于上述理由，本章提出随机脉冲泛函微分方程，作为描述瞬动型系统的数学模型．即允许系统突变时刻和突变量都是随机的，而在相邻两次突变之间系统满足某种泛函方程或差分方程．

§2 基本概念

本节我们给出随机脉冲泛函微分方程的一般概念．

设 R^d 表示 d 维欧氏空间，$|\cdot|$ 为 R^d 中给定的范数，设非降连续函数 $g:R^+\to R$ 满足 $g(t)<t$，$g(t)\to+\infty(t\to+\infty)$，对 $\forall t\in R^+$，定义 $PC(t)=\{\varphi:[g(t),t]\to R^d$，$\varphi$ 为至多有有限个间断点的右连左极函数$\}$，在上确界范教 $\|\varphi\|_t=\sup\{|\varphi(s)|;g(t)\leqslant s\leqslant t\}$ 之下，$PC(t)$ 是一线性赋范空间．

定义 1 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一个完备概率空间，$\{\tau_n\}_{n\geqslant0}$ 为其上非负递增的随机变量序列，$\{\zeta_n\}_{n\geqslant0}$ 为取值于 R^d 的随机序列，如果

(i) $\forall n\geqslant0$

$$X'(t)=f(t,X(\cdot)),t\in[\tau_n,\tau_{n+1}),$$

其中 f 是 $R^+\times PC(t)$ 上的泛函，它由 t 和 $X(\cdot)$ 在 $[g(t),t]$ 上的值所确定，且 $X(\tau_n)-X(\tau_n^-)=\zeta_n$；

(ii) X 关于 $\{\tau_n\}_{n\geqslant0}$ 是 (H,Q)-过程．

则称方程

$$X'(t)=f(t,X(\cdot))$$

为一个随机脉冲泛函微分方程．

由定义可知，X 是逐段确定的 (H,Q) 过程，只是其跳跃时刻

及跳跃幅度是随机的.

通常的脉冲泛函微分方程,其解是确定曲线,研究的问题主要有稳定性、周期性、持久性、灭绝性以及极限环和混沌现象等等.

随机脉冲泛函微分方程由于考虑了随机因素的干扰,其解不再是确定曲线,而是一族样本曲线,这给问题的研究带来更大的困难,然而在应用上,尤其应用到数学生态学,它能够客观地描述生物种群的生存与周围环境的依赖关系,对这类模型,过程的样本轨道或均值函数的性质,转移概率、遍历性、平稳分布、灭绝时间等都是人们关心的重要研究问题.

§3 随机脉冲 Logistic 模型

本节我们具体讨论单种群 Logistic 模型:

$$N'(t) = rN(t)(1 - N(t)/K), \tag{1}$$

其中 $N(t)$ 表示生物种群在时刻 t 的容量,r 表示种群的内禀自然增长率,K 为负载容量.容易求得方程(1)的解为

$$N(t) = K/[1 + (\frac{K}{N_0} - 1)\exp(-rt)], \tag{2}$$

而且当 $t \to +\infty$ 时,$N(t)$ 趋于其平衡点 K.

我们假定在随机时刻 τ_n 有一个随机脉冲 $\zeta_n = N(\tau_n) - N(\tau_n^-)(n = 1,2,\cdots)$,其中$\{\tau_n\}$具有独立增量;且 $\tau_n \uparrow +\infty$,$\{\zeta_n\}$为独立随机序列,并与$\{\tau_n\}$相互独立.

引理 1 随机脉冲微分方程

$$\begin{cases} X'(t) = -rX(t), t \geqslant 0, \\ X(\tau_n) - X(\tau_n^-) = \eta_n, n \geqslant 1 \end{cases} \tag{3}$$

的解为

$$X(t) = X_0 e^{-rt} + \sum_{k=1}^{n} \eta_k \cdot e^{-r(t-\tau_k)}, t \in [\tau_n, \tau_{n+1}).$$

证明 $\forall k \geqslant 0$,(3) 在$[\tau_k, \tau_{k+1}]$上其解为

$$X(t) = X(\tau_k)\mathrm{e}^{-r(t-\tau_k)}(\tau_0 = 0),$$

从而

$$Y(\tau_{k+1}) = X(\tau_k)\mathrm{e}^{-r(\tau_{k+1}-\tau_k)} + \eta_{k+1}.$$

由此递推公式立得

$$X(\tau_n) = X_0\mathrm{e}^{-r\tau_n} + \sum_{k=1}^{n}\eta_k \cdot \mathrm{e}^{-r(\tau_n-\tau_k)}.$$

引理2 设 $\sigma_k = \tau_k - \tau_{k-1}(k \geqslant 1)$ 为独立同分布的非负随机变量序列，$\tau_n = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n \uparrow +\infty$，$\{\eta_k\}$ 为有界独立随机变量序列，且与 $\{\sigma_k\}$ 独立，则随机脉冲微分方程(3)的解 $X(t) \to 0$ 服从 0 - 1 律，且如果 $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{E}\mid\eta_n\mid = 0$，则 $P(\lim\limits_{t\to+\infty}X(t) = 0) = 1$，进而还有 $\mathbf{E}X(t) \to 0$

证明 因为 $X(t) = X(\tau_n)\mathrm{e}^{-r(t-\tau_n)}, t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$，所以 $\lim\limits_{t\to\infty}X(t) = 0$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}X(\tau_n) = 0$，而

$$\lim_{n\to\infty}X(\tau_n) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-r\tau_n}\sum_{k=4}^{n}\eta_k\mathrm{e}^{r\tau_k} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-r(\sigma_1+\cdots+\sigma_n)} \cdot \sum_{k=4}^{n}\eta_k\mathrm{e}^{r(\sigma_1+\cdots+\sigma_k)} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-r(\sigma_{n_0}+\cdots+\sigma_n)} \cdot \sum_{k=4}^{n}\eta_k\mathrm{e}^{r(\sigma_{n_0}+\cdots+\sigma_k)},$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}X(\tau_n)$ 是独立随机变量序列的尾函数，所以

$P((\lim\limits_{n\to\infty}X(\tau_n) = 0) = 0$ 或 1，

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}\mid\eta_n\mid = 0$，则 $\forall\varepsilon > 0$

$$P(\mid X(\tau_n)\mid > \varepsilon) \leqslant$$

$$P(\mathrm{e}^{-r(\sigma_1+\cdots+\sigma_n)}\sum_{k=1}^{n}\mid\eta_k\mid\mathrm{e}^{r(\sigma_1+\cdots+\sigma_k)} > \frac{\varepsilon}{2}) +$$

$$P(\mid X_0\mid\mathrm{e}^{-r(\sigma_1+\cdots+\sigma_n)} > \frac{\varepsilon}{2}) \leqslant$$

$$\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\mid\eta_k\mid\cdot(\mathbf{E}\mathrm{e}^{-r\sigma_1})^{n-k} + \frac{2}{\varepsilon}\mid X_0\mid\cdot(\mathbf{E}\mathrm{e}^{-r\sigma_1})^{n}.$$

注意到 $\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n \uparrow +\infty$，有 $\mathbf{E}e^{-r\sigma_1} < 1$，从而上式趋于 0，即 $X(\tau_n)$ 依概率收敛到 0. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} X(\tau_n)$ 是尾函数，因此必有 $P(\lim\limits_{n\to\infty} X(\tau_n) = 0) = 1$.

定理 1 设 $\{\sigma_k\}$ 同引理 2，$\{\zeta_k\}$ 为有界独立随机变量序列，且与 $\{\sigma_k\}$ 独立，$\zeta_k = N(\tau_k) - N(\tau_k^-)$，则随机脉冲 Logistic 模型

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)(1 - N(t)/K), N_0 > 0, \\ N(\tau_k) - N(\tau_k) = \zeta_k, k \geqslant 1 \end{cases} \tag{4}$$

的解为

$$N(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N(\tau_n)} - 1\right)\exp\{-r(t - \tau_n)\}}, t \in [\tau_n, \tau_{n+1}).$$

其中 $\tau_n = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$，$\tau_0 = 0$，且如果 $N_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \zeta_k \geqslant \varepsilon > 0 (n \geqslant 1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{E} | \zeta_n | = 0$，则

$$P(\lim_{n\to\infty} N(t) = K) = 1.$$

证明 不妨设 $K = 1$，令 $N(t) = (1 - X(t))^{-1}$，则(4) 等价于

$$\begin{cases} X'(t) = -rX(t), X(t) < 1, \\ X(\tau_n) - X(\tau_n^-) = \eta_n, n \geqslant 1, \end{cases}$$

其中 $\eta_n = [N(\tau_n)N(\tau_n^-)]^{-1}\zeta_n (n \geqslant 1)$.

定理前半部分结论是显然的，若 $N_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \zeta_k \geqslant \varepsilon$，则 $N(\tau_n^-)$，$N(\tau_n) \geqslant \varepsilon$，只需考虑 $N(\tau_n)$ 的极限，而 $N(\tau_n) \to 1 \Leftrightarrow X(\tau_n) \to 0$，由引理 1 知

$$X(\tau_n) = X_0 e^{-r\tau_n} + \sum_{k=1}^{n} \eta_k e^{-r(\tau_n - \tau_k)} =$$

$$\frac{N_0 - 1}{N_0} e^{r\tau_n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\zeta_k}{N(\tau_k)N(\tau_k^-)} \cdot e^{-r(\tau_n - \tau_k)},$$

所以

$$| X(\tau_n) | \leqslant | N_0^{-1}(N_0 - 1) | \cdot e^{-r\tau_n} + \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{n} | \zeta_k | \cdot e^{-r(\tau_n - \tau_k)}.$$

上式右边是独立随机离列的尾函数,由引理2的证明知,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{E}|\zeta_n|=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}|X(\tau_n)|=0,\text{a.s}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}N(\tau_n)=1,\text{a.s}$$

推论1 设$\{\sigma_k\}$如引理2,$P(\zeta_k=\Delta_k)=p_k$,$(o<p_k<1)$,$P(\zeta_k=0)=1-p_k$,且$N_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta_k\geqslant\varepsilon>0(n\geqslant1)$,则如果$\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_k\cdot p_k=0$,我们有

$$P(\lim_{t\to\infty}N(t)=K=1).$$

推论2 若在定理3中去掉$\{\sigma_k\}$同分布的条件,其余条件不变,如果

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}|\zeta_k|\cdot\prod_{j=k+1}^{n}\mathbf{E}e^{-r\sigma_j}=0,$$

则

$$P(\lim_{t\to\infty}N(t)=K)=1.$$

§4 补充与注记

随机脉冲泛函微分方程理论是一个新的研究方向,有待进一步深入研究.本章只是初步讨论了随机 Logistic 模型,主要结果属于侯振挺、李俊平.

20 随机干扰对孤波的影响

§1 引言

非线性波方程

$$u_{tt} - \delta u_{xxt} - k u_{xx} + a u_t + b u u_t = 0 \quad (\delta > 0), \tag{1}$$

是研究量子力学、杆的振荡及神经传播等的一个重要的数学模型.

近来,张卫国[2] 成功地给出了方程(1.1) 的扭状孤波解. 众所周知,由于周围一些随机因素的干扰,事物的发展将是一个随机过程. 为此,本文将研究方程(1.1) 的扭状孤波解在随机干扰下的影响.

设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一完备概率空间,$(E, \mathscr{E})$ 是一个 Polish 空间, $X \triangleq \{X(t,\omega); t < \tau(\omega)\}$ 为定义在$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上取值于 E 中的马尔可夫骨架过程.

定义 1 称马氏骨架过程 X 为非齐次(H,Q) 过程,如果对定义 1.1.1 中的停时序列 $\{\tau_n\}_{n \geqslant 0}$ 存在 $\{h^{(n)}(t,x,A); n \geqslant 1\}$ 和 $\{q^{(n)}(t,x,A); n \geqslant 1\}$,满足:

(i) $\mathbf{E}[X(\tau_n + t) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n > t \mid X(\tau_n)] = h^{(n+1)}(t, X(\tau_n), A), \qquad n \geqslant 0, t \geqslant 0, A \in \mathscr{E}.$

(ii) $\mathbf{E}[X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n)] = q^{(n+1)}(t, X(\tau_n), A), \qquad n \geqslant 0, t \geqslant 0, A \in \mathscr{E}.$

其中,$h^{(n)}(t,X,A)$ 和 $q^{(n)}(t,X,A)$ 当 A 固定时是二元非负可测

函数，当 t,x 固定时为 $(E,\mathscr{E})$ 上的准分布.

令 $q^{(n)}(X,A)=\lim\limits_{t\to\infty}q^{(n)}(t,x,A)$，由定义1(i)知，$\{X(\tau_n);n\geq 0\}$ 是以 $\{q^{(n)}(x,A),x\in E,A\in\mathscr{E},n\geq 1\}$ 为转移概率的非齐次马氏链.

令 $\mathscr{U}_E\triangleq\{R\mid R(x,A)$ 是 $E\times\mathscr{E}$ 上非负函数，A 固定时是 $\mathscr{E}$ 可测的，x 固定时是 $(E,\mathscr{E})$ 上的非负测度$\}$. 在 $\mathscr{U}_E$ 中定义乘积如下：$\forall R,S\in\mathscr{U}_E$.

$$R\cdot S(x,A)\triangleq\int_E R(x,\mathrm{d}y)S(y,A),\quad x\in E,A\in\mathscr{E}.$$

$\forall x\in E,A\in\mathscr{E}$，定义

$$p(t,x,A)=P(X(t)\in A\mid X(0)=x),$$

$$p^{(n)}(t,x,A)=P(X(\tau_n+t)\in A\mid X(\tau_n)=x),\quad n\geq 0,$$

$$p_\lambda(x,A)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}p(t,x,A)\mathrm{d}t,$$

$$p_\lambda^{(n)}(t,x,A)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}p^{(n)}(t,x,A)\mathrm{d}t,\quad n\geq 0,$$

$$h_\lambda^{(n)}(x,A)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}h^{(n)}(t,x,A)\mathrm{d}t,\quad n\geq 1,$$

$$q_\lambda^{(n)}(x,A)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}q^{(n)}(t,x,A)\mathrm{d}t,\quad n\geq 1.$$

定理1(侯振挺、刘再明、郭先平[1]) $\{P_\lambda^{(n)}(x,A);x\in E,A\in\mathscr{E},n\geq 0\}$ 是非负方程

$$X^{(n)}(x,A)=\int_E q_\lambda^{(n+1)}(x,\mathrm{d}y)X^{(n+1)}(y,A)+h_\lambda^{(n+1)}(x,A),$$

$$n\geq 0,x\in E,A\in\mathscr{E}\quad(2)$$

的最小非负解，故有

$$P_\lambda^{(n)}(x,A)=\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\Big(\prod_{k=1}^{m}Q_{n+k}\Big)\cdot H_{n+m+1}+H_{n+1}\Big)(x,A).\quad(3)$$

特别地，

$$P_\lambda(x,A)=P_\lambda^{(0)}(x,A)=\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\prod_{k=0}^{m}Q_k\Big)\cdot H_{m+1}(x,A),\quad(4)$$

其中，$Q_0 = (\delta_A(x)) \in \mathscr{H}_E, Q_m = (q_\lambda^{(m)}(x, A)) \in \mathscr{H}_E, H_m = (h_\lambda^{(m)}(x, A)) \in \mathscr{H}_E, m \geq 1$.

由定理 1 可知，X 的分布由$(H_m, Q_m)_{m=1}^\infty$ 唯一决定，故我们称 X 为$(H_m, Q_m)_{m=1}^\infty$ - 过程.

若 $Q_m = Q_1, H_m = H_1 (m \geq 1)$，则相应的过程为齐次$(H, Q)$过程.

定义 2 称马氏骨架过程 $X = \{X(t); t < \tau\}$ 为逐段决定的$(H_m, Q_m)_{m=1}^\infty$ - 过程，若有

(i) X 关于停时$\{\tau_n\}_{n \geq 0}$ 为$(H_m, Q_m)_{m=1}^\infty$ - 过程；

(ii) 存在定义于 $E \times [0, \infty)$ 上的可测函数序列$\{f_n(x, t); n \geq 0\}$ 满足

$$X(t) = f_n(X(\tau_n), t - \tau_n), t \in [\tau_n, \tau_{n+1}], \quad n \geq 0. \quad (5)$$

§2 随机干扰对孤波的影响

现在，我们讨论随机干扰对方程(1.1) 扭状孤波解的随机干扰的影响.

易见，(1.1) 的孤波解 $u(x, t) = u(x - vt) = u(\xi)$一定满足普通微分方程

$$u''(\xi) + \frac{v^2 - k}{v\delta}u'(\xi) - \frac{a}{\delta}u(\xi) - \frac{b}{2\delta}u^2(\xi) = C, \quad (1)$$

其中 C 为常数，依张卫国[2] 定理 5.3.1 及定理 5.4.2 知，当 $v^2 \neq k$ 及

$$(\frac{v^2 - k}{v})^2 \geq 4\delta\sqrt{a^2 - 2\delta bc} \quad (2)$$

时，方程(1.1) 存在唯一的且严格单调的有界孤波解.

为方便起见，我们仅考虑在正半轴(即 $\xi \geq 0$) 上的随机干扰.

假定 $v^2 \neq k$ 及(2)成立，不失一般性，我们也同样假定 $\frac{v^2-k}{v}<0$ 及 $b<0$，由张景国[2]定理5.3.1知 $u(\xi)$ 是严格单调下降的，且有

$$\begin{cases} u(-\infty)=\lim\limits_{\xi\to-\infty}u(\xi)=-\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{b}\sqrt{a^2-2\delta bc}, \\ u(+\infty)=\lim\limits_{\xi\to+\infty}u(\xi)=-\dfrac{a}{b}+\dfrac{1}{b}\sqrt{a^2-2\delta bc}. \end{cases} \tag{3}$$

记 $f(y,\xi)$ 为孤波解满足 $u(0)=y$.

假定 $\{\tau_n:n\geqslant 0\}$ 为定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机时间序列：$0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n<\cdots,\tau_n\to\infty$，在每个 τ_n 处，(1)的孤波发生一次跳跃，假设第 n 次跳跃后的分布为 $\pi^{(n)}$，则(1)的孤波解一定为一个随机过程，设为 $X(\xi)$，即有

$$\begin{aligned} &P(X(\tau_n)\in A\mid X(\tau_{n-1}),\tau_{n-1},\tau_n)= \\ &\pi^{(n)}(A),A\in\mathscr{B}(u(+\infty),u(-\infty)), \end{aligned} \tag{4}$$

而当 $\xi\in[\tau_n,\tau_{n+1})$ 时，

$$X(\xi)=f(X(\tau_n),\xi-\tau_n),\quad n\geqslant 0. \tag{5}$$

依定义1.2知，$X(\xi)$ 关于 $\{\tau_n\}_{n\geqslant 0}$ 是逐段决定的 $(H_m,Q_m)_{m=1}^{\infty}$ - 过程. 故我们研究 $f(y,\xi)(\xi\geqslant 0)$ 在随机干扰下的影响，就等价于研究 $X(\xi)$

记

$$G^{(n+1)}(\xi,y)\triangleq P(\tau_{n+1}-\tau_n\leqslant\xi\mid X(\tau_n)=y),$$

$$G_\lambda^{(n+1)}(y)\triangleq\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\mathrm{d}G^{(n+1)}(\xi,y).$$

此时

$$\begin{aligned} &h^{(n+1)}(\xi,y,A)= \\ &P(X(\tau_n+\xi)\in A,\tau_{n+1}-\tau_n>\xi\mid X(\tau_n)=y)= \\ &\delta_A(f(y,\xi)\cdot(1-G^{(n+1)}(\xi,y)), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &q^{(n+1)}(\xi,y,A)= \\ &P(X(\tau_{n+1})\in A,\tau_{n+1}-\tau_n\leqslant\xi\mid X(\tau_n)=y)= \\ &G^{(n+1)}(\xi,y)\cdot\pi^{(n+1)}(A). \end{aligned} \tag{7}$$

由于

$$Q_0 \cdot H_1(y,A) = h_\lambda^{(1)}(y,A),$$

$$\left(\prod_{k=0}^{m} Q_k\right) \cdot H_{m+1}(y,A) =$$

$$\begin{cases} G_\lambda^{(1)}(y) \cdot \int \pi^{(1)}(\mathrm{d}z) h_\lambda^{(2)}(z,A), & m = 1; \\ G_\lambda^{(1)}(y) \cdot \left[\prod_{k=1}^{m-1} \int \pi^{(k)}(\mathrm{d}z) G_\lambda^{(k+1)}(z)\right] \int \pi^{(m)}(\mathrm{d}z) h_\lambda^{(m+1)}(z,A), & m > 1. \end{cases}$$

因此,根据定理 1.1 便知下列定理成立.

定理 1 $\forall y \in (u(+\infty), u(-\infty))$,从 y 出发的随机过程 $X(\xi)$ 的条件概率的拉普拉斯变换为

$$P_\lambda(y,A) = h_\lambda^{(1)}(y,A) +$$

$$G_\lambda^{(1)}(y) \sum_{m=1}^{\infty} \left[\prod_{k=1}^{m-1} \int \pi^{(k)}(\mathrm{d}z) G_\lambda^{(k+1)}(z)\right] \int \pi^{(m)}(\mathrm{d}z) h_\lambda^{(m+1)}(z,A), \tag{8}$$

这里规定 $\prod_{k=1}^{0} = 1$.

定理 2 设 $\frac{v^2 - k}{v} < 0, b < 0$ 且(2) 成立,又假定 $\{\pi^{(n)}; n \geqslant 1\}$ 是 $(u(+\infty), u(-\infty))$ 上的概率测度序列,则对任意 $y \in (u(+\infty), u(-\infty))$,有

$$\mathbf{E}_{y,\lambda} X \triangleq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\xi} \mathbf{E}_y [X(\xi)] \mathrm{d}\xi =$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\xi} f(y,\xi)(1 - G^{(1)}(\xi, y)) \mathrm{d}\xi +$$

$$G_\lambda^{(1)}(y) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left[\prod_{k=1}^{m-1} \int \pi^{(k)}(\mathrm{d}z) G_\lambda^{(k+1)}(z)\right] \cdot$$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\xi} \int f(z,\xi)(1 - G^{(m+1)}(\xi, z)) \pi^{(m)}(\mathrm{d}z) \mathrm{d}\xi. \tag{9}$$

特别地, 若发生跳跃的时间间隔具有相同的负指数分布, 即 $G^{(n)}(\xi, y) = 1 - \mathrm{e}^{t\xi}, n \geqslant 1$,则

$$\mathbf{E}_{y,\lambda}X = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)\xi} f(y,\xi)\mathrm{d}\xi +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^m \int_0^{\infty}\int e^{-(\lambda+\mu)\xi} f(z,\xi)\pi^{(m)}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}\xi. \qquad (10)$$

从而

$$\mathbf{E}_y X(\xi) = e^{-\mu\xi} f(y,\xi) +$$

$$e^{-\mu\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu^m}{(m-1)!}\int_0^{\xi} r^{m-1}\int f(z,\xi-r)\pi^{(m)}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}r. \qquad (11)$$

证明 由(6)与(8)得

$$\mathbf{E}_{y,\lambda}X = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\xi}\mathbf{E}_y[X(\xi)]\mathrm{d}\xi = \int z p_\lambda(y,\mathrm{d}z) =$$

$$\int z h_\lambda^{(1)}(y,\mathrm{d}z) + G_\lambda^{(1)}(y)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{m-1}\int \pi^{(k)}(\mathrm{d}z)G_\lambda^{(k+1)}(z)\right]\cdot$$

$$\iint z h_\lambda^{(m+1)}(u,\mathrm{d}z)\pi^{(m)}(\mathrm{d}u) =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\int z h^{(1)}(\xi,y,\mathrm{d}z) +$$

$$G_\lambda^{(1)}(y)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{m-1}\int \pi^{(k)}(\mathrm{d}z)G_\lambda^{(k+1)}(z)\right]\cdot$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\xi}\iint z h^{(k+1)}(\xi,u,\mathrm{d}z)\pi^{(m)}(\mathrm{d}u) =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\xi} f(y,\xi)(1-G^{(1)}(\xi,y))\mathrm{d}\xi +$$

$$G_\lambda^{(1)}(y)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{m-1}\int \pi^{(k)}(\mathrm{d}z)G_\lambda^{(k+1)}(z)\right]\int_0^{\infty} e^{-\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\cdot$$

$$\int f(u,\xi)(1-G^{(m+1)}(\xi,u))\pi^{(m)}(\mathrm{d}u).$$

特别地,若 $G^{(n)}(\xi,y) = 1-e^{-\mu\xi}, n\geqslant 1$,则 $G_\lambda^{(n)}(y) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ 据此即得(10)式.进一步,由

$$\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^m = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)\xi}\cdot\frac{\mu^m}{(m-1)!}\xi^{m-1}\mathrm{d}\xi$$

和 laplace 变换的卷积公式,即可得到(11)式.

定理3 设定理2条件成立,且 $G^{(n)}(\xi,y)=1-e^{-\mu\xi}, n\geq 1$.

(1) 若 $\mathbf{E}X(\tau_n)=\int y\pi^{(n)}(dy)\to u(+\infty),(n\to\infty)$,则

$$\lim_{\xi\to+\infty}\mathbf{E}_y X(\xi)=u(+\infty),\forall y\in(u(+\infty),u(-\infty)); \quad (12)$$

(2) 若 $\pi^{(n)}(\cdot)=\pi(\cdot)(n\geq 1)$,则对任意的 $y\in(u(+\infty),u(-\infty))$ 有

$$\lim_{\xi\to+\infty}\mathbf{E}_y X(\xi)=\mu\int_0^{+\infty}e^{-\mu\xi}\int\cdot f(z,r)\pi(dz)dr. \quad (13)$$

证明 (1) 由于 $f(y,\xi)$ 关于 ξ 严格单调下降及

$\pi^{(n)}(u(+\infty),u(-\infty))=1$,易知

$$f(y,\xi)\leq y,\forall\xi\geq 0,$$

且

$$u(+\infty)<X(\xi)<u(-\infty),$$

从而由(11)得

$$0\leq\mathbf{E}_y X(\xi)-u(+\infty)\leq$$

$$e^{-\mu\xi}f(y,\xi)+e^{-\mu\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\mu\xi)^m}{m!}\left(\int z\pi^{(m)}(dz)-u(+\infty)\right).$$

由此,证得(1).另外,由(11)式即得(2).

注 定理3(1)表明,若随机干扰的间隔具有相同的负指数分布,且按平均来说系统的跳跃越来越接近于 $u(+\infty)$,那么受这种脉冲干扰的孤波解当 $\xi\to+\infty$ 时仍趋于 $u(+\infty)$.

§3 固定点处随机干扰的影响

现在我们转向 x 处随机干扰的影响.

对固定的 x,方程(1.1)的孤波解为 $u(x,t)=u(x-vt)$.记 $u(x,t,y)$ 为孤波解,满足 $u(x,0)=y$.

假定 $\{\tau_n:n\geq 0\}$ 为定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的随机

时间序列:$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots, \tau_n \uparrow +\infty$, $X = \{X(t); t \geq 0\}$ 关于$\{\tau_n; n \geq 0\}$ 为$(H_m, Q_m)_{m=1}^{\infty}$ - 过程,满足

$$X(t) = u(x, t - \tau_n, X(\tau_n)), \quad n \geq 0, t \in [\tau_n, \tau_{n+1}). \tag{1}$$

且在$(u(+\infty), u(-\infty))$上存在概率测度序列$\{\pi^{(n)}; n \geq 1\}$,满足

$$P(X(\tau_n) \in A \mid X(\tau_{n-1}), \tau_{n-1}, \tau_n) = \pi^{(n)}(A). \tag{2}$$

记 $G^{(n+1)}(t, y) \triangleq P(\tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid X(\tau_n) = y), G_\lambda^{(n+1)}(y) \triangleq \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG^{n+1}(t, y)$.则

$$\begin{aligned} & h^{(n+1)}(t, y, A) = \\ & P(X(\tau_n + t) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n > t \mid X(\tau_n) = y) = \\ & \delta_A(u(x, t, y)) \cdot (1 - G^{(n+1)}(t, y)), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} & q^{(n+1)}(t, y, A) = \\ & P(X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t \mid X(\tau_n) = y) = \\ & G^{(n+1)}(t, y) \cdot \pi^{(n+1)}(A). \end{aligned} \tag{4}$$

定理1 假设定理2.2的条件成立,又假定$\{\pi^{(n)}; n \geq 1\}$ 是$(u(+\infty), u(-\infty))$上的概率测度序列,则对任意的$y \in (u(+\infty), u(-\infty))$,有

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{y,\lambda} X = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{E}_y [X(t)] dt = \\ & \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x, t, y)(1 - G^{(1)}(t, y)) dt + \\ & G_\lambda^{(1)}(y) \sum_{m=1}^{\infty} [\prod_{k=1}^{m-1} \int \pi^{(k)}(dz) G_\lambda^{(k+1)}(z)] \cdot \\ & \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int u(x, t, z)(1 - G^{(m+1)}(t, z)) \pi^{(m)}(dz) dt. \end{aligned} \tag{5}$$

特别地,若 $G^{(n)}(t, y) = 1 - e^{-\mu t}, n \geq 1$,则

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{y,\lambda} X = \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t} u(x, t, y) dt + \\ & \sum_{m=1}^{\infty} (\frac{\mu}{\lambda + \mu})^m \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} \int u(x, t, z) \pi^{(m)}(dz) dt. \end{aligned} \tag{6}$$

从而

$$\mathbf{E}_y[X(t)] = e^{-\mu t} \cdot u(x,t,y) +$$

$$e^{-\mu t}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu^m}{(m-1)!}\int_0^t s^{m-1}\int u(x,t-s,z)\pi^{(m)}(dz)ds. \qquad (7)$$

证明 与定理 2.2 的证明完全类似(略).

定理 2 设定理 2.2 条件成立且 $v > 0, G^{(n)}(t,y) = 1 - e^{-\mu t}$, $n \geqslant 1$.

(1) 若 $\lim\limits_{m\to\infty}\mathbf{E}[X(\tau_m)] = \lim\limits_{m\to\infty}\int z\pi^{(m)}(dz) = u(-\infty)$,则

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbf{E}_y[X(t)] = u(-\infty).$$

(2) 若 $\pi^{(n)}(\cdot) = \pi(\cdot), n \geqslant 1$,则

$$\lim_{t\to+\infty}\mathbf{E}_y[X(t)] = \mu\int_0^{+\infty}e^{-\mu s}\int u(x,s,z)\pi(dz)ds.$$

证明 只需注意到,当 $v > 0$ 时,$u(x,s,z)$ 关于 s 是严格单调上升的,有

$$u(x,s,z) \geqslant y, \forall s \geqslant 0,$$

且

$$u(+\infty) < X(t) < u(-\infty).$$

根据(7) 式,类似于定理 2.3 便得结论.

§4 补充与注记

本章利用马尔可夫骨架过程理论讨论了随机干扰对非线性波方程的影响,主要结果属于侯振挺、李俊平、张卫国、刘再明.

21 随机脉冲干扰对 B – CKdV 方程扭状孤波解的影响

§1 引言

组合 KdV 方程

$$u_t + auu_x + bu^2 u_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

是一类非常重要的波动模型,可用于刻画一维非线性晶格中波的传播等,戴世强[1] 应用约化摄动法于两层流体界面近临界情形也得到了方程(1),可见组合 KdV 方程也是流体力学中的重要模型方程.由于在实际问题中耗散现象是不可避免的,因此,张卫国[1] 研究了更一般的 Burgers 与组合 KdV 混合型方程(简称 B – CKdV 方程)

$$u_t + auu_x + bu^2 u_x + ru_{xx} + u_{xxx} = 0 \tag{2}$$

的精确解.

周知,任何事物的发展变化过程中都受到周围环境的干扰和影响,而这种干扰一般都是随机的.本章主要研究随机脉冲干扰对 B – CKdV 方程扭状孤波解的影响.

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一完备概率空间,$(E,\mathscr{E})$是一 Polish 空间,$X \triangleq \{X(t,\omega);t<\tau(\omega)\}$ 是$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上取值于 E 中的逐段决定的 $(H_m,Q_m)_{m=1}^{\infty}$ – 过程(定义 20.1.2),并沿用上一章的记号.

§2　随机脉冲干扰对 B－CKdV 方程的影响

现在,我们来讨论 B－CKdV 方程(1.2) 在随机脉冲干扰下的影响.

易知,(1.2) 的行波解 $u(x,t) = u(\xi) = u(x - vt)$ 满足常微分方程

$$u''(\xi) + ru'(\xi) + \frac{a}{2}u^2(\xi) + \frac{b}{3}u^3(\xi) - vu(\xi) = c, \quad (1)$$

其中 c 为任意积分常数,由张卫国[1] 定理 2 可知,若 $b < 0$,行波速度 v 满足 $r^2 + 6v + \frac{3a^2}{2b} < 0$,则 B－CKdV 方程(1.2) 具有单调的扭状孤波解:

$$u_1(\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{b}(r^2 + 6v + \frac{3a^2}{2b})} \cdot$$
$$[-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{3}(r^2 + 6v + \frac{3a^2}{2b})}(\xi + \xi_0)] -$$
$$\frac{r}{\sqrt{-6b}} - \frac{a}{2b}, \quad (2)$$

或者

$$u_2(\xi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{b}(r^2 + 6v + \frac{3a^2}{2b})} \cdot$$
$$[-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{3}(r^2 + 6v + \frac{3a^2}{2b})}(\xi + \xi_0)] +$$
$$\frac{r}{\sqrt{-6b}} - \frac{a}{2b}, \quad (3)$$

此时,进一步根据管克英、高歌[1] 命题 2.1 类似的讨论知,B－CKdV 方程(1.2) 不存在钟状孤波解.

由于(2) 和(3) 的讨论是类似的,我们只就(2) 式进行研究,容易看出

$$
\begin{cases}
u_1(-\infty) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{b}\left(r^2+6v+\dfrac{3a^2}{2b}\right)} - \dfrac{r}{\sqrt{-6b}} - \dfrac{a}{2b}, \\
u_1(+\infty) = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{b}\left(r^2+6v+\dfrac{3a^2}{2b}\right)} - \dfrac{r}{\sqrt{-6b}} - \dfrac{a}{2b}.
\end{cases} \tag{4}
$$

显然,(2)式中的 ξ_0 由 $u_1(0)=y$ 唯一决定,为方便起见,我们记满足 $u_1(0)=y$ 的孤波解为 $f(y,\xi)$,并只讨论在正半轴($\xi \geqslant 0$)上受随机脉冲干扰的情况,对负半轴上的情况可以类似讨论.

设 $\{\tau_n;n\geqslant 0\}$ 为定义在完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的一列随机时刻:$0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_n<\cdots,\tau_n\uparrow+\infty$. 孤波解 $u_1(\xi)$ 在 $\xi=\tau_n$ 处受到随机干扰而发生跳跃,在第 n 次跳跃后的分布为 $\pi^{(n)}$,$u_1(\xi)$ 受到随机干扰后实际上是一随机过程,我们记为 $X(\xi)$,则

$$
P(X(\tau_n)\in A \mid X(\tau_{n-1}),\tau_{n-1},\tau_n) = \pi^{(n)}(A),
$$
$$
A\in \mathscr{B}(u_1(+\infty),(u_1(-\infty))), \tag{5}
$$

且对任意 $n\geqslant 0$,当 $\xi\in[\tau_n,\tau_{n+1})$ 时

$$
X(\xi) = f(X(\tau_n),\xi-\tau_n). \tag{6}
$$

根据定义 20.1.2 可知,$X(\xi)$ 关于 $\{\tau_n;n\geqslant 0\}$ 是逐段决定的 $(H_m,Q_m)_{m=1}^{\infty}$ - 过程. 因此,我们研究孤波解 $f(y,\xi)(\xi\geqslant 0)$ 在随机干扰下的影响,就等价于研究逐段决定的 $(H_m,Q_m)_{m=1}^{\infty}$ - 过程 $X(\xi)$ 的性质.

记

$$
G^{(n+1)}(\xi,y) \triangleq P(\tau_{n+1}-\tau_n \leqslant \xi \mid X(\tau_n)=y),
$$
$$
G_\lambda^{(n+1)}(y) \triangleq \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda\xi} dG^{n+1}(\xi,y).
$$

此时

$$
\begin{aligned}
& h^{(n+1)}(\xi,y,A) = \\
& P(X(\tau_n+\xi)\in A,\tau_{n+1}-\tau_n>\xi \mid X(\tau_n)=y) = \\
& \delta_A(f(y,\xi))(1-G^{(n+1)}(\xi,y)),
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$q^{(n+1)}(\xi, y, A) =$$
$$P(X(\tau_n + 1) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant \xi \mid X(\tau_n) = y) =$$
$$G^{(n+1)}(\xi, y) . \pi^{(n+1)}(A). \tag{8}$$

由于

$$Q_0 \cdot H_1(y, A) = h_\lambda^{(1)}(y, A),$$

$$(\prod_{k=0}^{m} Q_k) \cdot H_{m+1}(y, A) =$$

$$\begin{cases} G_\lambda^{(1)}(y) \cdot \int \pi^{(1)}(\mathrm{d}z) h_\lambda^{(2)}(z, A), & m = 1, \\ G_\lambda^{(1)}(y) \cdot [\prod_{k=1}^{m-1} \int \pi^{(k)}(\mathrm{d}z) G_\lambda^{(k+1)}(z)] \cdot \int \pi^{(m)}(\mathrm{d}z) h_\lambda^{(m+1)}(z, A), & m > 1. \end{cases}$$

因此,根据定理 20.1.1 立知

定理 1 对任意 $y \in (u_1(+\infty), u_1(-\infty))$,从 y 出发,$u_1(\xi)$ 的条件概率的 Laplace 变换为

$$P_\lambda(y, A) =$$
$$h_\lambda^{(1)}(y, A) + G_\lambda^{(1)}(y) \sum_{m=1}^{\infty} [\prod_{k=1}^{m-1} \int \pi^{(k)}(\mathrm{d}z) G_\lambda^{(k+1)}(z)] \cdot$$
$$\int \pi^{(m)}(\mathrm{d}z) h_\lambda^{(m+1)}(z, A), \tag{9}$$

此处规定$\prod_{k=1}^{0} = 1$.

定理 2 设 $b < 0$,行波速度 v 满足 $r^2 + 6v + \frac{3a^2}{2b} < 0$,$\{\pi^{(n)}; n \geqslant 1\}$ 是$(u_1(+\infty), u_1(-\infty))$上的一列概率测度,则对任意 $y \in (u_1(+\infty), u_1(-\infty))$,

$$\mathbf{E}_{y,\lambda} X \triangleq \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\xi} \mathbf{E}_y [X(\xi)] \mathrm{d}\xi =$$
$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\xi} f(y, \xi)(1 - G^{(1)}(\xi, y)) \mathrm{d}\xi +$$
$$G_\lambda^{(1)}(y) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} [\prod_{k=1}^{m-1} \int \pi^{(k)}(\mathrm{d}z) G_\lambda^{(k+1)}(z))] \cdot$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda\xi}\int f(z,\xi)(1-G^{(m+1)}(\xi,z))\pi^{(m)}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}\xi. \tag{10}$$

特别,若 $G^{(n)}(\xi,y)=1-e^{-\mu\xi}(n\geqslant 1)$,则

$$\mathbf{E}_{y,\lambda}X=\int_0^{\infty}e^{-\lambda\xi}e^{-\mu\xi}f(y,\xi)\mathrm{d}\xi+$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^m\int_0^{\infty}\int e^{-(\lambda+\mu)\xi}f(z,\xi)\pi^{(m)}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}\xi, \tag{11}$$

从而

$$\mathbf{E}_y[X(\xi)]=e^{-\mu\xi}f(y,\xi)+$$

$$e^{-\mu\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu^m}{(m-1)!}\int_0^{\xi}r^{m-1}\int f(z,\xi-r)\pi^{(m)}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}r. \tag{12}$$

证明 由(7)及(9)两式

$$\mathbf{E}_{y,\lambda}X=\int_0^{\infty}e^{-\lambda\xi}\mathbf{E}_y[X(\xi)]\mathrm{d}\xi=\int zP_\lambda(y,\mathrm{d}z)=$$

$$\int zh_\lambda^{(1)}(y,\mathrm{d}z)+G_\lambda^{(1)}(y)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{m-1}\int\pi^{(k)}(\mathrm{d}z)G_\lambda^{(k+1)}(z)\right]\cdot$$

$$\iint zh_\lambda^{(m+1)}(u,\mathrm{d}z)\pi^{(m)}(\mathrm{d}u)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\int zh_\lambda^{(1)}(\xi,y,\mathrm{d}z)+$$

$$G_\lambda^{(1)}(y)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{m-1}\int\pi^{(k)}(\mathrm{d}z)G_\lambda^{(k+1)}(z)\right]\int_0^{\infty}e^{-\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\cdot$$

$$\iint zh^{(m+1)}(\xi,u,\mathrm{d}z)\pi^{(k)}(\mathrm{d}u)=$$

$$\int_0^{\infty}e^{-\lambda\xi}f(y,\xi)(1-G^{(1)}(\xi,y))\mathrm{d}\xi+$$

$$G_\lambda^{(1)}(y)\sum_{m=1}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{m-1}\int\pi^{(k)}(\mathrm{d}z)G_\lambda^{(k+1)}(z)\right]\int_0^{\infty}e^{-\lambda\xi}\mathrm{d}\xi\cdot$$

$$\int f(u,\xi)(1-G^{(m+1)}(\xi,u))\pi^{(m)}(\mathrm{d}u),$$

特别地,若 $G^{(n)}(\xi,y)=1-e^{-\mu\xi}(n\geqslant 1)$,则 $G_\lambda^{(n)}(y)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$,由此立得(11)式.其次由

$$\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^m = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\frac{\mu^m}{(m-1)!}e^{-\mu\xi}\xi^{m-1}d\xi$$

及 Laplace 变换的卷积公式立即得到(12) 式.

定理 3 设定理 2 中条件成立,且 $G^{(n)}(\xi,y) = 1 - e^{-\mu\xi}(n \geqslant 1)$,

(1) 若 $\mathbf{E}[X(\tau_n)] = \int y\pi^{(n)}(dy) \to u_1(+\infty) \quad (n \uparrow \infty)$,则

$$\lim_{\xi\to+\infty}\mathbf{E}_y[X(\xi)] = u_1(+\infty),\ \forall y \in (u_1(+\infty),u_1(-\infty)). \tag{13}$$

(2) 若 $\pi^{(n)}(\cdot) = \pi(\cdot)(n \geqslant 1)$,则 $\forall y \in (u_1(+\infty),u_1(-\infty))$,

$$\lim_{\xi\to+\infty}\mathbf{E}_y[X(\xi)] = \mu\int_0^\infty e^{-\mu r}\int f(z,r)\pi(dz)dr. \tag{14}$$

证明 (1) 由于 $f(y,\xi)$ 关于 ξ 单调下降以及 $\pi^{(n)}((u_1(+\infty),u_1(-\infty))) = 1$,易知

$$f(y,\xi) \leqslant y,\quad \forall \xi \geqslant 0,$$

且

$$u_1(+\infty) < X(\xi) < u_1(-\infty),$$

从而由(12) 得

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant \mathbf{E}_y[X(\xi)] - u_1(+\infty) \leqslant e^{-\mu\xi}f(y,\xi) + \\
&e^{-\mu\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu^m}{(m-1)!}\int_0^\xi r^{m-1}dr\left(\int z\pi^{(m)}(dz) - u_1(+\infty)\right) \leqslant \\
&e^{-\mu\xi}f(y,\xi) + e^{-\mu\xi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\mu\xi)^m}{m!}\cdot\left(\int z\pi^{(m)}(dz) - u_1(+\infty)\right).
\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$,由 $\lim\limits_{m\to\infty}\int z\pi^{(m)}(dz) = u_1(+\infty)$ 知存在 $N > 0$,当 $m > N$ 时,

$$0 \leqslant \int z\pi^{(m)}(dz) - u_1(+\infty) < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{\xi\to+\infty}\mathbf{E}_y[X(\xi)] - u_1(+\infty) \leqslant$$

$$\lim_{\xi \to +\infty} e^{-\mu\xi} \sum_{m=1}^{N} \frac{(\mu\xi)^m}{m!} \cdot (u_1(-\infty) - u_1(+\infty)) +$$

$$\varepsilon \lim_{\xi \to +\infty} e^{-\mu\xi} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{(\mu\xi)^m}{m!},$$

从而 $\lim\limits_{\xi \to +\infty} \mathbf{E}_y[X(\xi)] = u_1(+\infty)$.

(2) 根据(12)式,即可得(14)式.

定理3(1)表明,若发生跳跃的时间间隔具有相同的负指数分布,且按平均意义来说,系统的跳跃越来越接近 $u_1(+\infty)$,则受这种随机脉冲干扰的孤波解当 $\xi \to +\infty$ 时仍趋于 $u_1(+\infty)$.

§3 B－CKdV 方程在固定位置受随机干扰的影响

现在,我们来讨论孤波在固定位置 x 处受随机脉冲干扰的情况.与上节类似,我们也只就 $u_1(\xi)$ 进行讨论,令

$$u_1(x,t) = u_1(x - vt) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{b}\left(r^2 + 6v + \frac{3a^2}{2b}\right)} \cdot$$

$$\left[-\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{3}\left(r^2 + 6v + \frac{3a^2}{2b}\right)}(x - vt + \xi_0)\right] -$$

$$\frac{r}{\sqrt{-6b}} - \frac{a}{2b}. \tag{1}$$

固定 x,显然(3.1)式中 ξ_0 由 $u_1(x,0)$ 唯一决定,记满足 $u_1(x,0) = y$ 的孤波解 $u_1(x,t)$ 为 $u(x,t,y)$.设 $\{\tau_n; n \geqslant 0\}$ 为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一列随机时刻:$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots, \tau_n \uparrow +\infty$. $X = \{X(t); t \geqslant 0\}$ 关于 $\{\tau_n; n \geqslant 0\}$ 为 $(H_m, Q_m)_{m=1}^{\infty}$－过程,且对任意 $n \geqslant 0$,当 $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$ 时,

$$X(t) = u(x, t - \tau_n, X(\tau_n)), \tag{2}$$

并假定存在 $(u_1(+\infty), u_1(-\infty))$ 上的一列概率分布 $\{\pi^{(n)}\}_{n \geqslant 1}$ 使得

$$P(X(\tau_n) \in A \mid X(\tau_{n-1}), \tau_{n-1}, \tau_n) = \pi^{(n)}(A). \tag{3}$$

记

$$G^{(n+1)}(t, y) \triangleq P(\tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n) = y),$$

$$G_\lambda^{(n+1)}(y) \triangleq \int_{0-}^{\infty} e^{-\lambda t} dG^{(n+1)}(t, y).$$

此时

$$h^{(n+1)}(t, y, A) =$$
$$P(X(\tau_n + t) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n > t \mid X(\tau_n) = y) =$$
$$\delta_A(u(x, t, y)) \cdot (1 - G^{(n+1)}(t, y)), \tag{4}$$
$$q^{(n+1)}(t, y, A) =$$
$$P(X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n) = y) =$$
$$G^{(n+1)}(t, y) \cdot \pi^{(n+1)}(A). \tag{5}$$

定理 1 设 $b < 0$，行波速度 v 满足 $r^2 + 6v + \dfrac{3a^2}{2b} < 0$，$\{\pi^{(n)}; n \geqslant 1\}$ 是 $(u_1(+\infty), u_1(-\infty))$ 上的概率测度序列，则

$$\mathbf{E}_{y,\lambda} X = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} u(x, t, y)(1 - G^{(1)}(t, y)) dt +$$
$$G_\lambda^{(1)}(y) \sum_{m=1}^{\infty} [\prod_{k=1}^{m-1} \int \pi^{(k)}(dz) G_\lambda^{(k+1)}(z)] \cdot$$
$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \int u(x, t, z)(1 - G^{(m+1)}(t, z)) \pi^{(m)}(dz) dt. \tag{6}$$

特别地，若 $G^{(n)}(t, y) = 1 - e^{-\mu t} (n \geqslant 1)$，则

$$\mathbf{E}_{y,\lambda} X = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-\mu t} u(x, t, y) dt +$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} (\frac{\mu}{\lambda + \mu})^m \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+\mu)t} \int u(x, t, y) \pi^{(m)}(dz) dt, \tag{7}$$

从而

$$\mathbf{E}_y[X(t)] = e^{-\mu t} u(x, t, y) +$$
$$e^{-\mu t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu^m}{(m-1)!} \int_0^t s^{m-1} \int u(x, t-s, z) \pi^{(m)}(dz) dt. \tag{8}$$

证明　与定理2.2类似可得.

定理2　设定理1的条件成立且 $v > 0, G^{(n)}(t, y) = 1 - e^{-\mu t}(n \geq 1)$,

(1) 若 $\lim\limits_{m \to \infty} \int z \pi^{(m)}(\mathrm{d}z) = u_1(-\infty)$, 则

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{E}_y X(t) = u_1(-\infty).$$

(2) 若 $\pi^{(m)}(\cdot) = \pi(\cdot)(n \geq 1)$,则

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{E}_y [X(t)] = \mu \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu s} \int u(x, s, z) \pi(\mathrm{d}z) \mathrm{d}s.$$

证明　由(8)式,类似于定理2.3即可证得.

§4　补充与注记

本章结果属于李俊平、张卫国、侯振挺和刘再明.

第7篇

应用之三:金融事业

22 期权定价

§1 引言

现代期权定价理论的体系始于 1900 年法国数学家 L. Bachelier,在《投机理论》中,他提出了最早的期权定价模型,该模型用漂移率为零的 Brown 运动刻划股票价格波动规律,给出不同类型的期权价格的理论值. L. Bachelier 模型奠定了现代期权理论的基础,但该模型假设股票价格过程是绝对 Beown 运动,这允许股票价格为负,与有限债务假设矛盾;另外该模型忽略了资金的时间价值为正,期权与股票间的不同风险特征,以及投资者的风险厌恶,因而在应用上受到限制.

期权定价理论的最新革命开始于 1973 年, F. Black 和 M. Scholes 发表了他们关于期权定价的经典论文《期权与公司的债务的定价》,提出了一个完整的期权定价模型,获得了期权定价的数学公式. 稍后, R. Merton 发表了《计算期权合理价格的理论》,在若干重要方面作了推广. 为此, 1997 年诺贝尔经济学奖授予 M. Scholes 和 R. Merton,以表彰他们和去世的 F. Black 在期权定价方面开创性的工作,这些最具革命性的里程碑式成果,引发了第二次"华尔街革命",在理论和实践中都有特别重要的意义. 他们的理论是促成如今金融市场繁荣的重要因素,他们在金融学从描述型向分析型的转变起了中心作用.

在 Black - Scholes 的期权定价模型提出之后,分析型金融学以

前所未有的速度发展.随机过程理论,特别是马尔可夫骨架过程理论将在期权定价中起着越来越重要的作用,本章主要介绍马尔可夫骨架过程理论在几种期权定价模型中的应用.

§2 Merton 跳 - 扩散期权定价模型

在 Black - Scholes 期权定价模型中,最基本的假设是股票价格的运动过程是连续轨道的随机过程,如果这一假设不正确,那么模型中给出的价格就可能出现偏差.实证分析表明,股票价格的连续性假设常常是不正确的,而呈现间断的跳空过程.

1976 年,Merton 推广了 Black - Scholes 模型,建立了股票价格的跳 - 扩散模型.

Merton 将股票价格过程分为两部分:其一是连续部分,表示股票价格的"正常"波动,即由股票的供求关系或一些细小的信息到达使得股票价格进行一些小的波动,用 Brown 运动来刻划.其二是不连续部分,即跳跃,因一些重大的信息(如重大经济政治改革等)到达使股票价格发生大的波动,用 Possion 过程来刻画.因此,股票价格过程实质是一特殊的马尔可夫骨架过程.如果不考虑连续部分,当在 t 到 $t+h$ 内有一个重大信息到达时,有 $S(t+h)=S(t)Y$,其中 Y 为一非负随机变量,因此可设股票价格过程 $S(t)$ 满足随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}=(\alpha-\lambda k)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z(t)+\mathrm{d}q(t), \tag{1}$$

其中 α 表示股票期望收益率,为常数;σ^2 表示没有重大信息到达时股票收益率的方差,为常数;$z(t)$ 是标准 Brown 运动;$q(t)$ 是参数为 λ 的 Possion 过程;$k=E(Y-1)$,$Y-1$ 为股票价格的相对跳跃高度.随机微分方程(1)可重写为:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}=\begin{cases}(\alpha-\lambda k)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z(t), & \text{Possion 事件没有发生;}\\ (\alpha-\lambda k)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z(t)+(Y-1). & \text{Possion 事件发生.}\end{cases} \tag{2}$$

定义 $W(t) \triangleq F(S,t)$ 为期权在 t 时刻的价值，其中 F 关于 t 一阶可导连续，关于 S 二阶可导连续.

定理 1 设由跳产生的风险为非系统风险，则 F 满足下面的微分方程：

$$F_t + (r - \lambda k)SF_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss} + \lambda\varepsilon(F(SY,t) - F(S,t)) = rF, \tag{3}$$

其中 F 的下标为偏微分算子，ε 是关于 Y 的期望算子.

证明 由(1)式有

$$\frac{\mathrm{d}W}{W} = (\alpha_W - \lambda k_W)\mathrm{d}t + \sigma_W \mathrm{d}z + \mathrm{d}q_W, \tag{4}$$

其中，α_W 是期权的期望收益率；σ_W^2 是无重大信息到达时，期权收益率方差；q_W 是参数为 λ 的 Possion 过程；$k_W = \varepsilon(Y_W - 1)$，$Y_W - 1$ 是跳跃发生时期权的相对跳跃高度，ε 是关于 Y_W 的期望算子.

由 ITO 引理有：

$$\alpha_W = [\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss} + (\alpha - \lambda k)SF_s + F_t + \lambda\varepsilon(F(SY,t) - F(s,t)]/F, \tag{5a}$$

$$\sigma_W = \frac{\sigma S F_s}{F}. \tag{5b}$$

考虑一包含债卷、股票和期权的证券组合，其比例分别为 x_1、x_2 和 $x_3(x_1 + x_2 + x_3 = 1)$. 记此组合的价值为 P，则组合的收益率可表示为：

$$\frac{\mathrm{d}p}{P} = (\alpha_p - \lambda k_p)\mathrm{d}t + \sigma_p \mathrm{d}z + \mathrm{d}q_p, \tag{6}$$

其中 α_p 是组合的期望收益率；σ_p^2 是无重大信息到达时，组合收益率的方差；q_p 是参数为 λ 的 Possion 过程；$k_p = \varepsilon(Y_p - 1)$，$Y_p - 1$ 是组合的相对跳跃高度，ε 是关于 Y_p 的期望算子.

由(1)式，(4)式有

$$\alpha_p = x_1(\alpha - r) + x_2(\alpha_W - r) + r, \tag{7a}$$

$$\sigma_p = x_1\sigma + x_2\sigma_W, \tag{7b}$$

$$Y_p - 1 = x_1(Y-1) + x_2\frac{F(SY,t) - F(S,t)}{F(S,t)}. \tag{7c}$$

选取 $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ 使 $x_1^*\sigma + x_2^*\sigma_W = 0$,则(6)式可写为

$$\frac{dp^*}{P^*} = (\alpha_p^* - \lambda k_p^*)dt + dq^*. \tag{8}$$

由假设跳产生的风险为非系统风险,则 $\alpha_p^* = r$.因此我们得到方程组

$$\begin{cases} x_1^*(\alpha - r) + x_i^*(\alpha_W - r) + r = r, \\ x_1^*\sigma + x_2^*\sigma_W = 0. \end{cases} \tag{9}$$

将(5)式及 $x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1$ 代入(9)式,即得(3)式.

定理 2 设跳产生风险为非系统风险,则标准欧式看涨期权 F 在时刻 τ 的价值为:

$$F(S,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp(-\lambda\tau)(\lambda\tau)^n}{n!}\varepsilon_n(W(SX_n\exp(-\lambda k\tau),\tau;K,\sigma^2,r)). \tag{10}$$

其中 $\tau = T - t$,T 为到期日;K 为期权的执行价格;$W(S,\tau;K,\sigma^2,r) = S\Phi(\mathrm{d}_1) - K\exp(-r\tau)\Phi(\mathrm{d}_2)$,$\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数,$\mathrm{d}_1 = \dfrac{\log(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$,$\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \sigma\sqrt{\tau}$;$\varepsilon_n$ 是关于 X_n 的期望算子,$X_n = \prod_{j=0}^{n} Y_j$,$Y_j - 1$ 为第 j 次相对跳跃高度,$Y_0 = 1$.

证明 根据标准期权的定义,只需证明(10)式为(3)式的解,及(10)式满足下面的边值条件和终值条件:

$$F(0,\tau) = 0, \tag{11}$$

$$F(S,0) = (S-K)^+. \tag{12}$$

令

$$P_n(\tau) = \exp(-\lambda\tau)(\lambda\tau)^n/n!, \quad V_n = SX_n\exp(-\lambda k\tau).$$

由(10)式微分得:

$$SF_s = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau)\varepsilon_n(V_n W_1), \tag{13}$$

$$S^2 F_{ss} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau)\varepsilon_n(V_n^2 W_{11}), \tag{14}$$

$$F_t = -F_\tau = \lambda F + \lambda k \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau)\varepsilon_n(V_n W_1) -$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau)\varepsilon_n(W_2) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{n-1}\exp(-\lambda\tau)}{(n-1)!} \cdot \varepsilon_n(W) =$$

$$\lambda F + \lambda KSF_s - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau)\varepsilon_n(W_2) -$$

$$\lambda \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\tau)\varepsilon_{m+1}(W(V_{m+1},\tau;K,\sigma^2,r)), \tag{15}$$

其中 $m = n - 1$.

$$\varepsilon_Y(F(SY,\tau)) = \varepsilon_Y(\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau)\varepsilon_n(W(V_n Y,\tau;K,\sigma^2,r)) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau)\varepsilon_{n+1}(W(V_{n+1},\tau;K,\sigma^2,r). \tag{16}$$

由(13) – (16) 式得

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + (\gamma - \lambda k)SF_s + F_t - rF =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau)\varepsilon_n(\frac{1}{2}\sigma^2 V_n^2 W_{11} + rV_n W_1 - W_2 - rW) -$$

$$\lambda kSF_s + \lambda F + \lambda kSF_s -$$

$$\lambda \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\tau)\varepsilon_{m+1}(W(V_{m+1},\tau;K,\gamma^2,r)) =$$

$$-\lambda\varepsilon_y(F(SY,\tau) - F(S,T)). \tag{17}$$

由于 W 满足 Black – Scholes 微分方程,因此对每个 n 有

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_n^2 W_{11} + rV_n W_1 - W_2 - rW = 0. \tag{18}$$

将(18) 代入(17) 式,整理得(3) 式,即 $F(S,\tau)$ 满足(3) 式.

当 $S=0$ 时，则对任意 n 有 $V_n=0$，而 $W(0,\tau;k,\sigma^2,r)=0$，所以 $F(0,\tau)=0$.即 $F(S,\tau)$ 满足边值条件(11).

由欧式期权定义有：

$$\varepsilon_n(W(V_n,0;k,\sigma^2,r))=\varepsilon_n((V_n-K)^+)\leqslant$$
$$\varepsilon_n(V_n)=S(1+k)^n. \tag{19}$$

于是

$$\lim_{\tau\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\tau)\varepsilon_n(W)\leqslant$$
$$\lim_{\tau\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S\exp(-\lambda\tau)[(1+k)\lambda\tau]^n}{n!}=$$
$$\lim_{\tau\to 0}S\exp(-\lambda\tau)(\exp((1+k)\lambda-1)=0. \tag{20}$$

因此

$$F(S,0)=\lim_{\tau\to 0}F(S,\tau)=$$
$$\lim_{\tau\to 0}(P_0(\tau)\varepsilon_0(W(V_0,\tau;k,\sigma^2,r)))=(S-K)^+,$$

即 $F(S,\tau)$ 满足终值条件(12).

§3 Merton 跳 - 扩散期权定价模型的推广

在 Merton 跳 - 扩散期权定价模型中，假定重大信息到达引起股票价格的相对跳跃高度度为同一随机变量，而实际上股票价格的相对跳跃高度与引起的信息相对重要性有关. 本节推广了 Merton 跳 - 扩散模型，在股票价格为更一般的马尔可夫骨架过程下，给出了类似 Merton 的结果.

假设市场上存在两种可连续交易的证券，其中一种为无风险证券，称为债券. 其价格过程 $B(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}B}{B}=r\mathrm{d}t,\qquad B(0)=1, \tag{1}$$

其中 r 为无风险利率，为常数；另一种为风险证券，称为股票，其价

格过程 $S(t)$ 满足随机微分方程

$$\frac{\mathrm{d}S}{S}=(\mu-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i m_i)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z+\sum_{i=1}^{k}X_i\mathrm{d}q_i, \tag{2}$$

其中 μ 是股票的期望收益率，为常数；σ^2 是无跳跃发生时股票收益率的方差，为常数；Z 是标准 Brown 运动；$q_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是 k 个相互独立的参数为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,k)$ 的 Possion 过程，且与 Z 独立；$X_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是第 i 个 Possion 过程发生跳跃时，股票价格的相对跳跃高度，为一随机变量，且其无条件期望为 m_i.

记 $V(t)=F(S,t)$ 表示执行价格 K，到期的 T 的欧式看涨期权在时刻 t 的价格，其终期收益为

$$F(S,T)=(S_T-K)^+, \tag{3}$$

其中 F 关于 t 一阶可导，关于 S 二阶可导连续.

定理 1 设跳产生的风险为非系统风险，则股票价格过程服从(1.2)的欧式期权价值 $F(S,t)$ 满足价值方程

$$\frac{1}{2}\sigma^2S^2F_{ss}+(r-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i m_i)SF_s+F_t-rF+$$

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\varepsilon_i(F(S(1+X_i),t)-F(S,t))=0, \tag{4}$$

其中 F 的下标是偏微分算子，ε_i 是关于$(1+X_i)$的期望算子.

定理 2 $F(s,\tau)$ 的值为：

$$F(s,\tau)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1\tau)^{n_1}\mathrm{e}^{-\lambda_1\tau}}{n_1!}\cdots\frac{(\lambda_k\tau)^{n_k}\mathrm{e}^{-\lambda_k\tau}}{n_k!}\cdot$$

$$\varepsilon_{n_1\cdots n_k}W[S\prod_{j_1=0}^{n_1}(1+X_{1j_1})\cdots\prod_{j_k=0}^{n_k}(1+X_{kj_k}),\tau;K,r,\sigma^2], \tag{5}$$

其中 $\tau=T-t$ 表示距到期的时间；$W(S,\tau;K,r,\sigma^2)$ 是 $B-S$ 期权定价公式；$\varepsilon_{n_1\cdots n_k}$ 是关于 $\prod_{j_1=0}^{n_1}(1+X_{kj_1})\cdots\prod_{j_k=0}^{n_k}(1+X_{kj_k})$ 的期望算子$(X_{i0}=0,i=1,2,\cdots,k)$；$X_{ij_k}$ 是表示第i个过程第j_K次跳跃的相对高度.

定理1和定理2的证明可用第二节同样方法.

§4 具有不连续利率的期权定价模型

本节讨论股票价格和无风险债券价格都为马尔可夫骨架过程的期权定价模型.设无风险债券价格 $B(t)$ 和股票价格 $S(t)$ 分别满足随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}B}{B} = (\mu_B - \lambda k_B)\mathrm{d}t + \sigma_B \mathrm{d}Z_B + X_B \mathrm{d}q, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = (\mu - \lambda k)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}Z + X \mathrm{d}q. \tag{2}$$

其中 μ_B,μ 分别表示债券和股票的期望收益率,为常数;σ_B,σ 分别表示无跳跃发生时债券和股票收益率的方差,为常数;Z_B 和 Z 是标准 Brown 运动,其相关系数为 ρ;q 是与 Z_B,Z 独立的参数 λ 的 Possion 过程;X_B,X 分别表示债券和股票的相对跳跃高度,其无条件期望分别为 k_B,k.

记 $V(t)=F(S,B,t)$ 为执行价格 K,到期日 T 的欧式看涨期权在时刻 t 时的价值,其终期收益为

$$F(S,B,T) = (S_T - K)^+. \tag{3}$$

其中 F 关于 t 一阶可导,关于 S,B 二阶可导连续.

定理1 设跳产生的风险为非系统风险,则债券价格和股票价格分别服从(2.1),(2.2)式的欧式看涨期权的价值 $F(S,B,t)$ 满足下面价值方程:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{11} + \frac{1}{2}\sigma_B^2 B^2 F_{22} + \rho\sigma\sigma_B SBF_{12} - \\ &\lambda kSF_1 - \lambda k_B BF_2 + F_t + \\ &\lambda\varepsilon[F(S(1+X),B(1+X_B),t) - F(S,B,t)] = 0.\end{aligned} \tag{4}$$

证明 由(1),(2)式知期权的收益可表示为

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = (\mu_v - \lambda k_v)\mathrm{d}t + \sigma_v \mathrm{d}z + \sigma_{VB}\mathrm{d}z_B + X_v \mathrm{d}q. \tag{5}$$

其中 μ_v 表示期权的期望收益率；σ_v，σ_{VB} 为期权的波动率；X_V 为期权的相对跳跃高度，且无条件期望为 k_v，由 ITO 引理有：

$$\mu_v = [\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{11} + \frac{1}{2}\sigma_B^2 B^2 F_{22} + \rho\sigma\sigma_B SBF_{12} +$$

$$(\mu - \lambda k)SF_1 + (\mu_B - \lambda k_B)BF_2 + F_t +$$

$$\lambda\epsilon(F(S(1+X), B(1+X_B), t) - F(S, B, t]/F. \tag{6a}$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma SF_1}{F}, \tag{6b}$$

$$\sigma_{VB} = \frac{\sigma_B BF_2}{F}, \tag{6c}$$

$$X_V = [F(S(1+X), B(1+X_B), t) - F(S, B, t)]/F, \tag{6d}$$

其中，ϵ 是关于 $(1+X)$ 和 $(1+X_B)$ 的期望算子.

考虑一包含债券、股票和期权的证券组合，其价值分别为 π_1，π_2 和 π_3，且 $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0$，记此证券的价值为 P，则组合收益为

$$\frac{dP}{P} = (\mu_p - \lambda k_p) + \sigma_p dz + \sigma_{PB} dz_B + X_p dq, \tag{7}$$

其中 k_p 为 X_p 的无条件期望.

由(1)，(2) 和(5) 得

$$\begin{cases} \mu_p = \pi_1 \mu_B + \pi_2 \mu + \pi_3 \mu_v \\ \sigma_p = \pi_2 \sigma + \pi_3 \sigma_v \\ \sigma_{PB} = \pi_1 \sigma_B + \pi_3 \sigma_{VB} \\ X_p = \pi_1 X_B + \pi_2 X + \pi_3 [F(S(1+X), B(1+X_B), t) - F(S, B, t)]/F. \end{cases} \tag{8}$$

选取 $\pi_1 = \pi_1^*$，$\pi_2 = \pi_2^*$，$\pi_3 = \pi_3^*$ 使得

$$\pi_2^* \sigma + \pi_3^* \sigma_V = 0, \quad \pi_1^* \sigma_B + \pi_3^* \sigma_{VB} = 0.$$

记此时组合的价值为 P^*，则

$$\frac{dP^*}{P^*} = (\mu_p^* - \lambda k_p^*)dt + X_p^* dq. \tag{9}$$

由假设跳产生的风险为非系统风险，且此组合为零投资组合，则资产的期望收益率为零，即 $\mu_p^* = 0$.

于是得到下面的方程组

$$\begin{cases}\pi_1^* \mu_B + \pi_2^* \mu + \pi_3^* \mu_V = 0, \\ \pi_2^* \sigma + \pi_3^* \sigma_V = 0, \\ \pi_1^* \sigma_B + \pi_3^* \sigma_{VB} = 0.\end{cases} \tag{10}$$

将 $\pi_3^* = -(\pi_1^* + \pi_2^*)$ 代入上方程组得

$$\begin{cases}\pi_1^* (\mu_B - \mu_V) + \pi_2^* (\mu - \mu_V) = 0, \\ -\pi_1^* \sigma_V + \pi_2^* (\sigma - \sigma_V) = 0, \\ \pi_1^* (\sigma_B - \sigma_{VB}) - \pi_2^* \sigma_{VB} = 0.\end{cases} \tag{11}$$

此方程组有非零解的充要条件为

$$\frac{\mu_B - \mu_V}{\mu - \mu_V} = \frac{-\sigma_V}{\sigma - \sigma_V} = \frac{\sigma_B - \sigma_{VB}}{-\sigma_{VB}}. \tag{12}$$

将(6) 式代入(12) 式得

$$F = SF_1 + BF_2. \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{11} + \frac{1}{2}\sigma_B^2 B^2 F_{22} + \rho\sigma\sigma_B SBF_{12} +$$
$$(\mu - \lambda k) SF_1 + (\mu_B - \lambda k_B) BF_2 + F_t +$$
$$\lambda \varepsilon [F(S(1 + X), B(1 + X_B), t) - F(S, B, t)] -$$
$$\mu F = 0. \tag{14}$$

将(13) 代入(14) 即得到方程(4).

定理 2 $F(S, B, \tau)$ 的值为

$$F(S, B, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^n}{n!} \varepsilon_n (H(S\prod_{i=0}^{n}(1 + X_i) e^{-\lambda k\tau},$$
$$B\prod_{i=0}^{n}(1 + X_{Bi}) e^{-\lambda k_B \tau}, \tau), \tag{15}$$

其中 $\tau = T - t$, $H(S, B, \tau)$ 表示没有跳时 Merton 的随机利率模型期权价值, ε_n 是关于 $\prod_{i=0}^{n}(1 + X_i)$ 和 $\prod_{i=0}^{n}(1 + X_{Bi})$ 的期望算子($X_0 = 0, X_{B0} = 0$).

可验证 $F(S, B, \tau)$ 满足方程(4) 和边值条件(3).

23 逐段决定马尔可夫过程与风险模型(Ⅰ)

§1 引言

风险理论产生于保险公司承保项目的可行性研究.风险理论已发展了很长一个时期,较为系统的理论形成始于 Lundberg[1,2]和 Cramér[1,2,3],他们建立了风险理论与随机过程理论之间的联系.关于风险理论系统的论述当推 Gerber[2]与 Grandell[1].

近二十多年来,随机过程的一般概念与结果在风险理论特别在有关破产问题的研究中的地位不断提高.应用随机过程的标准结果来研究风险理论的方法,不仅大大简化了经典结果的证明,而且可解决许多新问题,如平均破产时间,破产瞬间前后盈余额的分布,破产前最大盈余额的分布,引起破产的索赔额的分布,以及从破产到恢复期间最大亏损额的分布等.在相关文献中,这种方法通常称为鞅方法.主要思想是通过构造适当的鞅来推导所求.这种思想始于 Gerber[1],并在各种各样推广模型的研究中得到不断的发展.例如,Harrison[1],Gerber[2],Delbaen & Haezendonck[1],Dassios & Embrechts[1],Pauflsen[1],Embrechts & Schmidli[1],Muller[1]和 Paulsen & Gjessing[1]等.推广的模型大致可分为两类:一类是扩散过程,带跳扩散过程甚至半鞅模型;另一类是逐段决定马尔可夫过程模型.

保险风险理论发展至今,形成了多种处理风险模型的方法.一般说来,所需鞅的构造需要技巧,而基于逐段决定马尔可夫过程理

论的鞅方法，为所需鞅的构造提供了程式化的方法. 正如 Embrechts 在 1984 年就指出的那样，逐段决定马尔可夫过程(PDMP)为保险风险理论的研究提供了标准的理论. 本章的重点自然是基于逐段决定马尔可夫过程风险模型研究的系统化方法的介绍. 有鉴于风险理论研究所关注的焦点问题，一直是破产概率的计算与估计，风险理论中其他问题的结果这里少有提及.

§2 经典风险模型与鞅方法

一般说来风险模型由三个过程组成：

(i) **保费收入过程** $\{U_t, t \in \mathrm{R}_+\}$，$U_t$ 表示在$(0,t]$内收到的总保费；

(ii) **索赔到达的计数过程** $\{N_t, t \in \mathrm{R}_+\}$，$N_t$ 表示在$(0,t]$内发生的索赔总次数；

(iii) **索赔额序列** $\{Y_n, n \in \mathrm{N}\}$，$Y_n$ 表示第 n 个索赔的索赔额.

在一般保险风险理论中，人们关心的是所谓的**盈余过程**(surplus process)，它表示保险公司的盈余(或累积资本). 若定义 $Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$，它称为**索赔总额过程**，表示在$(0,t]$内的索赔总额. 于是，盈余过程

$$X_t = U_t - Y_t, \quad t \in R_+.$$

以 $\psi(x)$ 表示保险公司最终破产的概率. 它可以视作初始盈余 x 的函数. 记

$$T = \inf\{t \mid X_t < 0\}$$

(约定，$\inf\varnothing = \infty$)，它称作**破产(发生的)时刻**. 则有

$$\psi(x) = P_x(T < \infty) = P(T < \infty \mid X_0 = x).$$

而

$$\psi(x,t) = P(T \leqslant t \mid X_0 = x).$$

表示在$(0,t]$内破产的概率. 它亦可视作初始盈余 x 的函数.

风险模型的最简单情形为经典风险模型. 经典风险模型需要如下附加假设:

I. 保费收入过程 $\{U_t, t \in \mathrm{R}_+\}$ 为时间 t 的决定性函数,

$$U_t = x + ct, \quad t \in \mathrm{R}_+,$$

其中, c 是一常数, 它表示单位时间内收到的保费; x 为初始盈余(或称初始准备金).

II. 索赔到达的计数过程 $\{N_t, t \in \mathrm{R}_+\}$ 为一齐次 Poisson 过程, 具有参数 λ.

III. 索赔额序列 $\{Y_n, n \in \mathrm{N}\}$ 是独立同分布随机变量序列, 有共同分布函数 G.

IV. 索赔计数过程 $\{N_t, t \in \mathrm{R}_+\}$ 与索赔额序列 $\{Y_n, n \in N\}$ 相互独立.

这里我们把经典风险模型纳入逐段决定马尔可夫过程(PDMP)的框架.

命题 1 经典风险模型的盈余过程

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \in R_+,$$

是状态空间为 $\mathbf{E} = \mathrm{R}$ 的齐次逐段决定强马尔可夫过程, 具有三元特征

$$\varphi(t,x) = x + ct, \quad F(x,t) = \mathrm{e}^{-\lambda t},$$
$$Q(x,t,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}G(\varphi(t,x) - y)$$

(其中, $x \in \mathrm{R}, t \in \mathrm{R}_+$). 广义生成算子只有绝对连续部分且

$$\mathbf{A}f(x) = c\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \lambda\int_0^\infty [f(x-y) - f(x)]\mathrm{d}G(y). \quad (1)$$

证明 若记 $\tau_n, n = 1,2,\cdots$ 为第 n 个索赔到达的时刻, 则盈余过程

$$X_t = \sum_{n=0}^\infty \varphi(t - \tau_n, X_{\tau_n}) I_{[\tau_n < t \le \tau_{n+1}]}, \quad t \in \mathrm{R}_+,$$

为齐次逐段决定过程(按约定, $\tau_0 = 0$). 由附加假设 I 知,

$$\varphi(t,x) = x + ct, \quad x \in \mathrm{R}, t \in \mathrm{R}_+.$$

而由附加假设 II 知,两次相邻索赔时刻间的时间长度序列$\{\tau_{n+1}-\tau_n, n=1,2,\cdots\}$为独立同指数分布(参数为$\lambda$)的随机变量序列.故有

$$F(x,t)=P_x(\tau_1>t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t\in \mathbf{R}_+.$$

再由附加假设 III, IV 及 $Y_n=X_{\tau_n}-, X_{\tau_n-}, n=1,2,\cdots$ 有

$$Q(x,t,\mathrm{d}y)=P_x(X_{\tau_1}\in \mathrm{d}y\mid \tau_1)|_{\tau_1=t}=\mathrm{d}G(\varphi(t,x)-y).$$

容易验证,三元特征 φ, F, Q 满足定理 3.5.1 的条件,从而$\{X_t\}$为逐段决定齐次强马尔可夫过程.

注意到,指数分布 F 为连续型分布,其广义生成算子只有绝对连续部分.再由定理 12.3.4,其广义生成算子 $\mathbf{A}$ 具有式(1)的形式.

进一步假定

V. $\Lambda=\dfrac{c\mu}{\lambda}-1>0$,其中 $1/\mu$ 表示单个索赔额的均值 $\mathbf{E}Y_1<\infty$.

这意味着单位时间内所收到的保费超过单位时间内所支付的索赔额的均值.我们称 Λ 为**相对安全负荷**,条件 V 亦称为**净收益条件**.

命题 2 在经典模型中,若索赔额分布 G 为参数为 μ 的指数分布,则破产概率

$$\psi(x)=P_x(T<\infty)=\frac{\lambda}{c\mu}\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda/c)x}, \quad x\in \mathbf{R}_+. \tag{2}$$

证明 由命题 1 的(1)式,此时广义生成算子取如下形式:

$$\mathbf{A}f(x)=c\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}+\lambda\left[\int_0^\infty f(x-y)\mu\mathrm{e}^{-\mu y}\mathrm{d}y-f(x)\right].$$

为使$\{f(X_t)\}$为鞅,由定理 12.2.5,只需 f 为方程 $\mathbf{A}f=0$ 的解且满足

$$\mathbf{E}\sum_{\tau_n\leqslant t}|f(X_{\tau_n})-f(X_{\tau_n-})|<\infty. \tag{3}$$

首先,我们求积分 - 微分方程 $\mathbf{A}f=0$ 形如 $f(x)=\mathrm{e}^{vx}$ 的特解.将

$f(x) = \mathrm{e}^{\nu x}$ 代入方程,得

$$c\nu^2 + (c\mu - \lambda)\nu = 0,$$

取非零解 $\nu = -R_0 := -(\mu - \lambda/c)$,得 $f(x) = \mathrm{e}^{-R_0 x}$.由附加假设 V(净收益条件)知,$R_0 = \mu - \lambda/c > 0$.显然,$f$ 满足(3)式.从而,$\{f(X_t)\}$ 是鞅.

对鞅 $\{f(X_t)\}$ 关于有界停时 $0, T \wedge t(t > 0)$,应用 Doob 可选定理得

$$\mathrm{e}^{-R_0 x} = \mathbf{E}_x[\mathrm{e}^{-R_0 X_{T \wedge t}}], \quad t \in \mathrm{R}_+.$$

于是

$$\mathrm{e}^{-R_0 x} = \mathbf{E}_x[\mathrm{e}^{-R_0 X_T} I_{[T \leq t]}] + \mathbf{E}_x[\mathrm{e}^{-R_0 X_t} I_{[T > t]}], \quad t \in \mathrm{R}_+.$$

注意到,$\lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n} Y_m / n = 1/\mu$ a.s.及 $[T = \infty] = [\lim_{t \to \infty} N_t = \infty]$ 蕴含

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = c - \frac{\lambda}{\mu} > 0 \ a.s.\text{于}[T = \infty].$$

故 $\lim_{t \to \infty} X_t = X_\infty = \infty$ a.s.于 $[T = \infty]$.由控制收敛定理

$$\mathrm{e}^{-R_0 x} = \mathbf{E}_x[\mathrm{e}^{-R_0 X_T} I_{[T < \infty]}].$$

而上式右端等于 $P_x(T < \infty)\mathbf{E}_x[\mathrm{e}^{-R_0 X_T} \mid T < \infty]$.所以,我们有

$$\psi(x) = P_x(T < \infty) = \frac{\mathrm{e}^{-R_0 x}}{\mathbf{E}_x[\mathrm{e}^{-R_0 X_T} \mid T < \infty]}.$$

因此,我们只需计算上式右端的分母.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x[\mathrm{e}^{-R_0 X_T} \mid T < \infty] = \\
&\mathbf{E}_x\{\mathbf{E}_x[\mathrm{e}^{-R_0 X_T} \mid \mathscr{F}_{T-}, T < \infty] \mid T < \infty\} \\
&\mathbf{E}_x\{\mathbf{E}_x[\mathrm{e}^{-R_0 (X_{T-} - Y)} \mid X_{T-}, Y > X_{T-}, T < \infty] \mid T < \infty\} = \\
&\mathbf{E}_x\left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-R_0 y} \mu \mathrm{e}^{-\mu y} \mathrm{d}y \mid T < \infty\right\} = \\
&\mathbf{E}_x\left\{\frac{\mu c}{\lambda} \mid T < \infty\right\} = \frac{\mu c}{\lambda}.
\end{aligned}$$

上面倒数第三个等式是由于指数分布的无记忆性.这就得到了经典的公式(2),命题得证.

经典模型虽然简单,但从上述命题的证明中,我们可以得出应用 PDMP 理论研究风险模型的一般方法:

I. 将风险模型纳入 PDMP 框架,得到 PDMP$\{X_t\}$;

II. 确定过程$\{X_t\}$的广义生成算子 $\mathbf{A}$,并求解方程 $\mathbf{A}f = 0(f \in \mathscr{D}(\mathbf{A}))$. 事实上,我们仅需一适当的特解.

III. 应用鞅论于鞅$\{f(X_t)\}$以寻求原风险模型的结果.

下面我们把这种方法应用于经典模型其他重要结果的求解.

定理 1 在经典模型中,设索赔额分布 G 的 Laplace – Stieltjes 变换

$$\hat{G}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dG(y).$$

在某区间$(-d,0](d>0)$上是两次可微的且 $\lim_{s\downarrow d}\hat{G}(s) = \infty$. 则对所有的 $\theta \geqslant 0$ 存在方程

$$-\theta - cs + \lambda[\hat{G}(-s) - 1] = 0$$

的唯一根 R_θ 且使得 $e^{-\theta t}e^{-R_\theta X_t}$ 是一鞅.

证明 由命题 1 知,盈余过程$\{X_t\}$为齐次强马尔可夫过程,当然亦可视作非齐次马尔可夫过程. 于是,时间 – 空间过程$\{(t, X_t)\}$亦为逐段决定齐次马尔可夫过程,具有广义生成算子

$$\mathbf{A}f(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + c\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + \lambda\left[\int_0^\infty f(t,x-y)dG(y) - f(t,x)\right],$$

若 $f \in \mathscr{D}(\mathbf{A})$. 我们来求积分 – 微分方程 $\mathbf{A}f(t,x) = 0$ 的形如 $e^{-\theta t}e^{-sx}$ 的特解. 代入方程 $\mathbf{A}f(t,x) = 0$ 即得

$$-\theta - cs + \lambda[\hat{G}(-s) - 1] = 0.$$

注意到 $\hat{G}$ 两次可微与凸性,对任意 $\theta \geqslant 0$ 上面方程存在唯一正根 R_θ. 注意到净收益条件,函数 $f(t,x) = e^{-\theta t}e^{-R_\theta x}$ 显然满足

$$\mathbf{E}\sum_{\tau_n \leqslant t} | f(\tau_n, X_{\tau_n}) - f(\tau_n, X_{\tau_n -}) | < \infty.$$

从而由定理 12.2.5 知, $e^{-\theta t}e^{-R_\theta X_t}$ 是一鞅. 于是定理得证.

当 $\theta = 0$ 时，根 $R_\theta = R_0$ 通常称为调解系数. 于是由定理 1 知 $e^{-R_0 X_t}$ 是鞅. 类似于命题 2 证明中的推导可得

$$\psi(x) = P_x(T < \infty) = \frac{e^{-R_0 x}}{\mathbf{E}(e^{-R_0 X_T} \mid T < \infty)}. \tag{4}$$

又由于 $\mathbf{E}(e^{-R_0 X_T} \mid T < \infty) \geqslant 1$，立得

$$\psi(x) = P_x(T < \infty) \leqslant e^{-R_0 x}.$$

此不等式称为 **Lundberg 不等式**. 一般说来，$\mathbf{E}(e^{-R_0 X_T} \mid T < \infty)$ 并不像命题 2 中那样容易计算. 这也正是 Lundberg 不等式著名的原因.

定理 2 如果经典模型满足净收益条件 V，则

$$\frac{e^{-R_0 x}}{m_1(R_0)} \leqslant P_x(T < \infty) \leqslant \frac{e^{-R_0 x}}{m_2(R_0)}.$$

其中

$$m_1(R_0) := \sup_{x \geqslant 0}\left\{\frac{e^{-R_0 x}\int_x^{\infty} e^{R_0 y} \mathrm{d}G(y)}{1 - G(x)}\right\},$$

$$m_2(R_0) := \inf_{x \geqslant 0}\left\{\frac{e^{-R_0 x}\int_x^{\infty} e^{R_0 y} \mathrm{d}G(y)}{1 - G(x)}\right\}.$$

证明 因为

$$\mathbf{E}_x[e^{-R_0 X_T} \mid T < \infty] =$$

$$\mathbf{E}_x[\mathbf{E}_x(e^{-R_0 X_T} \mid X_{T-}, T < \infty) \mid T > \infty] =$$

$$\mathbf{E}_x\left[\left\{\frac{e^{-R_0 X_{T-}}\int_{X_{T-}}^{\infty} e^{R_0 y} \mathrm{d}G(y)}{1 - G(X_{T-})}\right\}\right] \leqslant$$

$$\sup_{x \geqslant 0}\left\{\frac{e^{-R_0 x}\int_x^{\infty} e^{R_0 y} \mathrm{d}G(y)}{1 - G(x)}\right\} = m_1(R_0),$$

所以，由(4)式有

$$P_x(T < \infty) \geqslant \frac{e^{-R_0 x}}{m_1(R_0)}.$$

类似可得

$$P_x(T<\infty)\leqslant\frac{e^{-R_0x}}{m_2(R_0)}.$$

这便证明了定理.

作为定理2的应用,取 G 为参数为 $(2,\alpha)$ 的 Gamma 分布,有分布密度 $\alpha^2 y e^{-\alpha y}, y>0$.则由定理有

$$\left(\frac{\alpha-R_0}{\alpha}\right)^2 e^{-R_0x}\leqslant P_x(T<\infty)\leqslant\left(\frac{\alpha-R_0}{\alpha}\right)e^{-R_0x}.$$

定理 3　在定理2的条件下,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{E}_x(T\mid T<\infty)}{x}=\frac{\lambda}{\mu c^2-\lambda c}.$$

证明　对鞅 $e^{-\theta t}e^{-R_\theta X_t}$ 应用 Doob 停止定理,得

$$e^{-R_\theta x}=\mathbf{E}_x[e^{-\theta(T\wedge t)}e^{-R_\theta X_{T\wedge t}}]=$$
$$\mathbf{E}_x[e^{-\theta T}e^{-R_\theta X_T}\mid T\leqslant t]P_x(T\leqslant t)+$$
$$\mathbf{E}_x[e^{-\theta t}e^{-R_\theta X_t}\mid T>t]P_x(T>t),$$

与命题2证明中的推理类似.由控制收敛定理,当 $t\to\infty$ 时,上式右端第二项趋于零.所以,

$$e^{-R_\theta x}=\mathbf{E}_x[e^{-\theta T}e^{-R_\theta X_T}\mid T<\infty]P_x(T<\infty).$$

等价地,

$$\mathbf{E}_x[e^{-\theta T}e^{-R_\theta X_T}\mid T<\infty]=\frac{e^{-R_\theta x}}{P_x(T<\infty)}.$$

此式蕴含

$$\mathbf{E}_x[e^{-\theta T}e^{-R_\theta X_T}\mid T<\infty]=$$
$$\mathbf{E}_x[e^{-R_0X_T}\mid T<\infty].e^{-(R_\theta-R_0)x}.$$

亦即

$$\frac{\mathbf{E}_x[e^{[cR_\theta-\lambda(\hat{G}(-R_\theta)-1)]T}e^{-R_\theta X_T}\mid T<\infty]}{\mathbf{E}_x[e^{-R_0X_T}\mid T<\infty)}=$$
$$e^{-(R_\theta-R_0)x}.$$

对上式关于 θ 求导数并令 $\theta=0$,得

$$\frac{\mathbf{E}_x[(-\lambda\hat{G}'(-R_0)-c)Te^{-R_0X_T}\mid T<\infty]}{\mathbf{E}_x(e^{-R_0X_T}\mid T<\infty)}+$$

$$\frac{\mathbf{E}_x(X_T e^{-R_0 X_T} \mid T < \infty)}{\mathbf{E}_x(e^{-R_0 X_T} \mid T < \infty)} = x.$$

因此,当 $x \to \infty$ 时,

$$\mathbf{E}_x(T \mid T < \infty) \sim x(-\lambda \hat{G}'(-R_0) - c)^{-1},$$

所以

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbf{E}_x(T \mid T < \infty)}{x} = \frac{\lambda}{\mu c^2 - \lambda c}.$$

证毕.

定理 4 在定理 2 的条件下,

$$\psi(x, t) \leqslant \inf_{\theta \geqslant 0} \frac{\exp\{-[cR_\theta - \lambda(\hat{G}(-R_\theta) - 1)]t - R_\theta x\}}{m_2(R_\theta)}, \quad (5)$$

其中 m_2 的定义如定理 2.

证明 同样地,对鞅 $\{e^{-\theta t} e^{-R_\theta X_t}\}$ 应用 Doob 停止定理,有

$$e^{-R_\theta x} = \mathbf{E}_x[e^{-\theta T} e^{-R_\theta X_T} \mid T \leqslant t] P_x(T \leqslant t) + \mathbf{E}_x[e^{-\theta t} e^{-R_\theta X_t} \mid T > t] P_x(T > t).$$

因此

$$e^{-R_\theta x} \geqslant \mathbf{E}_x[e^{-\theta T} e^{-R_\theta X_T} \mid T \leqslant t] \psi(x, t).$$

此式可改写为

$$e^{-R_\theta x} \geqslant \mathbf{E}_x[e^{[cR_\theta - \lambda(\hat{G}(-R_\theta) - 1)]T} e^{-R_\theta X_T} \mid T \leqslant t] \psi(x, t).$$

所以对任意 $\theta \geqslant 0$ 有,

$$e^{-R_\theta x} \geqslant e^{[cR_\theta - \lambda(\hat{G}(-R_\theta) - 1)]t} \mathbf{E}_x[e^{-R_\theta X_T} \mid T \leqslant t] \psi(x, t).$$

类似于定理 2 证明中的推导,我们发现

$$\mathbf{E}_x[e^{-R_\theta X_T} \mid T \leqslant t] \geqslant m_2(R_\theta).$$

这样就得到了(5)式.定理得证.

§3 经典风险模型的推广与一维 PDMP

近二十年来,保险风险理论的研究基本上是经典模型的改造

与推广,使得模型更贴近于实际,结果更具可操作性.作为极具针对性的应用学科,风险理论除了追求模型及其结果的一般化外,它更重视模型假设的合理性与结果的可操作性,而后者更造就了风险理论研究内容的丰富多彩.Grandell[1]给出了模型如下可能的推广方向:

(i) 保费可能依赖于保险业务的现状.当盈余额很大时,相对安全负荷可小些;反之,相对安全负荷可大些.

(ii) 通货膨胀率与银行利率等经济环境因素可以加入模型.

(iii) 索赔的到达的计数过程可用较 Poisson 过程更一般的点过程来描述.

本节模型作为经典模型的推广,其基本特点是,保持盈余过程 X_t 本身为逐段决定马尔可夫过程(PDMP).

1. 预备知识.

定义 1 一个函数 f 称为一个(有限或无限)区间上的**完全单调函数**,如果它在该区间上具有所有阶的导数,且对所有 $n \geqslant 0$ 及该区间上的 s 有

$$(-1)^n f^{(n)}(s) \geqslant 0.$$

S. Bernstein 得到了 $\mathbf{R}_+$ 上测度的 Laplace - Stieltjes 变换的如下有用特征.

定理 1 定义在$(0,\infty)$上的函数 f 是完全单调的充分必要条件是

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dM(x),$$

其中 M 为$[0,\infty)$上有限区间取有限值的测度.

证明 由于

$$f^{(n)}(s) = \int_0^\infty (-x)^n e^{-sx} dM(x),$$

充分性部分是显然的.

往证必要性.首先我们证明 f 在$(0,\infty)$内是**拟解析**的,即 f 在$(0,\infty)$内可展开为收敛的 Taylor 级数.设 $0 < s_0 \leqslant s < t$,则根据

Taylor 定理,我们有

$$f(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(s-t)^i +$$

$$\frac{(s-t)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-\mu)^{n-1} f^{(n)}(t+(s-t)u)\mathrm{d}u.$$

由于 f 是完全单调的,Taylor 展式中的余项为正;又因为当 n 为偶数时$f^{(n)}\downarrow$ 且$(s-t)^n>0$,而当 n 为奇数时$f^{(n)}\uparrow$ 且$(s-t)^n<0$,故余项不会超过

$$\frac{(s-t)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(t+(s_0-t)u)\mathrm{d}u.$$

注意到 Taylor 展式中的每一项为正,用 s_0 取代展式中的 s 得上式等于

$$\left(\frac{s-t}{s_0-t}\right)^n\left[f(s_0) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f^{(i)}(t)}{i!}(s_0-t)^i\right] \leqslant \left(\frac{s-t}{s_0-t}\right)^n f(s_0).$$

因此,当 $n\to\infty$ 时,展式的余项趋于 0.这便证明了 f 在$(0,\infty)$内是拟解析的.

现在对每个 $n\geqslant 1$,由如下单调增加函数 $F_n(x)$ 定义离散测度 F_n,

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^{[nx]} \frac{n^i}{i!}(-1)^i f^{(i)}(n).$$

对于 $s>0$, F_n 的 Lebesgue – Stieltjes 变换为

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}F_n(x) = \sum_{i=0}^\infty \mathrm{e}^{-s(i/n)}\frac{(-n)^i}{i!}f^{(i)}(n) =$$

$$\sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i!}(n(1-\mathrm{e}^{-s/n})-n)^i f^{(i)}(n) = f(n(1-\mathrm{e}^{-s/n})),$$

最后的等式来自 Taylor级数.令 $n\to\infty$,由f的连续性,上式最后一项的极限为 $f(s)$.于是,测度列$\{F_n\}$淡收敛(vague convergence)于某测度 M,而且 M 的 Lebesgue – Stieltjes 变换是 f.定理得证.

2. 带利率结构的风险模型

作为经典模型的推广,我们假定保险公司必要时(如盈余为负时)可以贷款,亦可当盈余超过一定水平 Δ 的流动资金时获得投

资利润.假设投资利率与借贷利率分别为常值 β_1 与 β_2,亦即经过时间 t 后,初始资本 z 的现值为 $ze^{\beta t}$,$\beta \in \{\beta_1, \beta_2\}$.经典模型的假设 II,III,IV 保持不变.用 PDMP 的语言叙述,即假设盈余过程 X_t 的三元特征(φ, F, Q)中,φ 为微分动力系统具有速度场 χ:

$$\chi = \begin{cases} (\beta_1(x-\Delta)+c)\dfrac{\partial}{\partial x}, & \Delta \leqslant x; \\ c\dfrac{\partial}{\partial x}, & 0 \leqslant x < \Delta; \\ (\beta_2 x + c)\dfrac{\partial}{\partial x}, & x < 0. \end{cases}$$

而 F, Q 与经典模型相同.

由于 $x_t := \varphi(t, x)$ 满足

$$\dot{x}_t = \begin{cases} (\beta_1(x_t-\Delta)+c), & \Delta \leqslant x_t; \\ c, & 0 \leqslant x_t < \Delta; \\ (\beta_2 x_t + c), & x_t < 0. \end{cases}$$

我们看到,当 $x > -c/\beta_2$ 时,$\varphi(t, x)$ 为时间 t 的增函数,即使需要借贷仍可望扭亏为盈;而当 $x \leqslant -\beta_2$ 时,$\varphi(t, x)$ 为时间 t 的减函数,借贷已不可能阻止盈余额的负增长.因此,我们称临界值 $-c/\beta_2$ 为**绝对破产限**,称首中绝对破产限的时刻

$$T_{ab} := \inf\{t > 0, X_t \leqslant -c/\beta_2\}$$

为**绝对破产时刻**.

索赔额分布 G 的 Laplace – Stieltjes 变换记为 $\hat{G}(s) := \int_0^\infty e^{-sx}dG(x)$.显然,至少对 $s \geqslant 0$,$\hat{G}(s)$ 存在.

引理 1 设 $\Delta = 0, \beta_1 = \beta_2$.则

(i) 对任意常数 $K > 0$,函数

$$\hat{M}_3(s) := \int_0^\infty e^{-sx}dM_3(x) = K\exp\left\{-\frac{\lambda}{\beta_2}\int_0^s \frac{1-\hat{G}(\xi)}{\xi}d\xi\right\} \quad (1)$$

为某$[0, \infty)$上有限测度 M_3 的 Laplace – Stieltjes 变换.进一步有 $M_3(\{0\}) = 0$;

(ii) 过程 $f_3(X_t)$ 为一鞅，其中 $f_3: x \to M_3((-\infty, x+c/\beta_2])$，$x \in \mathrm{R}$ 满足定理 1 的条件.

证明 (i) 容易得，

$$s^{-1}(1-\hat{G}(s)) = \int_0^\infty \int_0^x \mathrm{e}^{-sy}\mathrm{d}y\mathrm{d}G(x)$$

为完全单调的. 由 Feller(1971, p.441) 知函数 $\exp\{\lambda\beta_2^{-1}\int_0^s \xi^{-1}(1-\hat{G}(\xi))\mathrm{d}\xi\}$ 亦为完全单调的. 因此，由定理 1，存在一测度 M_3 满足 (1). 对满足 $\hat{G}(\bar{s}) \leqslant \frac{1}{2}$ 的 $\bar{s}$，有

$$\int_{\bar{s}}^\infty \xi^{-1}(1-\hat{G}(\xi))\mathrm{d}\xi \geqslant \frac{1}{2}\int_{\bar{s}}^\infty \xi^{-1}\mathrm{d}\xi = \infty.$$

因此，$M_3(\{0\}) = \lim_{s\to\infty}\hat{M}_3(s) = 0$. 而由 $M_3(\mathrm{R}) = \lim_{s\to 0}\hat{M}_3(s) = K$ 知，M_3 为有限测度.

(ii) 注意到在引理条件下，盈余过程 $\{X_t\}$ 的广义生成算子为

$$\mathbf{A}f(x) = (\beta_2 x + c)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \lambda\left[\int_0^{x+c/\beta_2} f(x-y)\mathrm{d}G(y) - f(x)\right],$$

$x \in [-c/\beta_2, \infty)$. 求解方程 $\mathbf{A}f(x) = 0$. 对方程

$$(\beta_2 x + c)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \lambda\left[\int_0^{x+c/\beta_2} f(x-y)\mathrm{d}G(y) - f(x)\right] = 0. \tag{2}$$

两端同乘以 e^{-sx} 并从 $-c/\beta_2$ 到 ∞ 积分，得

$$-\beta_2\hat{f}(s) - \beta_2 s\hat{f}'(s) + cs\hat{f}(s) - \lambda\hat{f}(s)(1-\hat{G}(s)) = 0,$$

其中，$\hat{f}(s) := \int_{-c/\beta_2}^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$. 故得

$$\hat{f}(s) = K\frac{1}{s}\exp\left\{\frac{c}{\beta_2}s - \frac{\lambda}{\beta_2}\int_0^s \frac{1-\hat{G}(\xi)}{\xi}\mathrm{d}\xi\right\},$$

这里，$K > 0$ 为常数. 因此，$f_3(x) = M_3((-\infty, x+c/\beta_2])$ 是方程 $\mathbf{A}f(x) = 0$ 的增解. 注意到，$M_3(\{0\}) = 0$ 及方程(2)，知 f_3 是绝对连续函数. 又注意到 M_3 为有限测度，由定理 12.2.5 知，$f_3 \in$

$\mathscr{D}(\mathbf{A})$.所以,$f_3(X_t)$ 是一鞅.引理 1 得证.

令

$$h_2(s):=\lambda\int_0^{\infty}\int_x^{x+c/\beta_2}f_3(x-y)\mathrm{d}G(y)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x.$$

引理 2 设 $\Delta=\infty$,f_3 为引理 1 中定义的函数.

(i) 存在常数 s_0 使得

$$\hat{M}_2(s):=\frac{cf_3(0)-h_2(s+s_0)}{c-\lambda(s+s_0)^{-1}(1-\hat{G}(s+s_0))}$$

为某$[0,\infty)$上有限测度 M_2 的 Laplace – Stieltjes 变换,满足 $M_2(\{0\})=f_3(0)$.

(ii) 过程 $f(X_t)$ 为一鞅.其中,满足定理 1 条件的函数 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 由下式给出,

$$f(x)=\begin{cases}f_2(x), & \text{如果 } x\in[0,\infty);\\ f_3(x), & \text{否则}.\end{cases}$$

这里,$f_2:x\to\int_0^x\mathrm{e}^{-s_0y}\mathrm{d}M_2(y)$.

(iii) 如果 $c>\lambda\mu$(亦即,净收益条件满足),可选 $s_0=0$.

证明 (i) 注意到

$$\frac{cf_3(0)-h_2(s+s_0)}{c-\lambda(s+s_0)^{-1}(1-\hat{G}(s+s_0))}=f_3(0)+$$
$$\frac{\lambda f_3(0)(s+s_0)^{-1}(1-\hat{G}(s+s_0))-h_2(s+s_0)}{c-\lambda(s+s_0)^{-1}(1-\hat{G}(s+s_0))}.$$

右端的分子可改写为

$$\lambda\int_0^{\infty}\Big(\int_x^{\infty}f_3(0)\mathrm{d}G(y)-$$
$$\int_x^{x+c/\beta_2}f_3(x-y)\mathrm{d}G(y)\Big)\exp\{-(s+s_0)x\}\mathrm{d}x,$$

因而是完全单调的.函数 $cs-\lambda(1-\hat{G}(s))$ 是凸函数,其 0 点的导数存在且等于 $c-\lambda\mu$.因此,存在 $s_0\geqslant 0$,使得 $cs_0-\lambda(1-\hat{G}(s_0))>0$.因为函数 $c-\lambda(s+s_0)^{-1}(1-\hat{G}(s+s_0))$ 的导数是完全单调的,由

定理1及Feller(1971，p.441)知，满足引理的(i)中等式的测度 M_2 存在.测度 M_2 的有限性及 $M_2(\{0\}) = f_3(0)$ 的证明与引理1的证明雷同.

(iii) 由(i)的证明立得.

(ii) 在引理的假设条件下，类似于引理1的(ii)的证明，为使 $\mathbf{A}f(x) = 0, f \in \mathscr{D}(\mathbf{A})$，可取 $f(x) = f_3(x)$，若 $x < 0$；而当 $x \geqslant 0$ 时，f 满足

$$cf'(x) + \lambda\Big[\int_0^x f(x-y)\mathrm{d}G(y) + \int_x^{x+c/\beta_2} f(x-y)\mathrm{d}G(y) - f(x)\Big] = 0 \tag{3}$$

及边界条件 $f(0) = f_3(0)$（以保证 $f(x)$ 在 R 上的连续性）.求解上述方程可得

$$\hat{f}_2(s) = \frac{cf_3(0) - h_2(s)}{cs - \lambda(1 - \hat{G}(s))},$$

其中，$\hat{f}_2(s) = \int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$.显然，如此得到的 $f(x)$ 是R上的绝对连续增函数.由于 $X_t \leqslant x + ct$ a.s.，对任意的 $s \leqslant t$ 有 $f(X_s) \leqslant f(x+ct)$ a.s.因此，$f \in \mathscr{D}(\mathbf{A})$ 且使 $f(X_t)$ 是一鞅.

至此，引理得证.

对于模型的一般情形，令

$$h_1(x) := \lambda\int_\Delta^\infty \Big[\int_{x-\Delta}^x f_2(x-y)\mathrm{d}G(y) + \int_x^{x+c/\beta_2} f_3(x-y)\mathrm{d}G(y)\Big]\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x.$$

引理3　设 $0 \leqslant \Delta < \infty$，

$$\hat{g}(s) := \exp\Big\{\beta_1^{-1}\Big(cs - \lambda\int_0^s \xi^{-1}(1 - \hat{G}(\xi))\mathrm{d}\xi\Big)\Big\}.$$

(i) 函数

$$\hat{M}_1(s) := \frac{\hat{g}(s)}{\beta_1}\int_s^\infty \frac{cf_2(\Delta) - h_1(\eta)\mathrm{e}^{\Delta\eta}}{\hat{g}(\eta)}\mathrm{d}\eta$$

为某$[0,\infty)$上有限测度 M_1 的 Laplace – Stieltjes 变换.

(ii) 令 $f_1: x \to M_1([0, x-\Delta]), x \in [\Delta, \infty)$.取

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{如果 } x \in [\Delta, \infty); \\ f_2(x), & \text{如果 } x \in [0, \Delta); \\ f_3(x), & \text{否则}. \end{cases}$$

则$\{f(X_t)\}$是一鞅.

证明 (i) 再由 Feller(1971, p.441),易得,$\exp\{-\beta_1^{-1}\lambda\int_0^{s+s_0}\xi^{-1}(1-\hat{G}(\xi))d\xi\}$ 与$(\hat{g}(s+s_0))^{-1}$ 均是完全单调的.这里 s_0 如引理 2 那样选定.进一步地,

$$cf_2(\Delta) - h_1(s+s_0)e^{\Delta(s+s_0)} =$$
$$f_2(\Delta)(c - \lambda\frac{1-\hat{G}(s+s_0)}{s+s_0}) +$$
$$[\lambda f_2(\Delta)\frac{1-\hat{G}(s+s_0)}{s+s_0} - h_2(s+s_0)\exp\{\Delta(s+s_0)\}].$$

上式右端第一项显然是完全单调的,而第二项可表示为

$$\lambda\int_0^\infty[\int_x^\infty f_2(\Delta)dG(y) - \int_x^{x+\Delta+c/\beta_2}f(x+\Delta-y)dG(y)]\times$$
$$\exp\{-(s+s_0)x\}dx,$$

由定理 1,它也是完全单调的.因此,存在一$[0,\infty)$上的测度 M,其 Laplace – Stieltjes 变换为

$$\frac{\exp\{-\frac{\lambda}{\beta_1}\int_0^{s+s_0}\frac{1-\hat{G}(\xi)}{\xi}d\xi\}}{\beta_1}\int_{s+s_0}^\infty\frac{cf_2(\Delta)-h_1(\eta)e^{\Delta\eta}}{\hat{g}(\eta)}d\eta.$$

函数

$$\tilde{f}(x) := \int_{c/\beta_1}^{x+c/\beta_1}\exp\{s_0 y\}dM(y), \quad x \in [0,\infty)$$

是增函数,具有 Laplace – Stieltjes 变换

$$\frac{\hat{g}(s)}{\beta_1 s}\int_s^\infty\frac{cf_2(\Delta)-h_1(\eta)e^{\Delta\eta}}{\hat{g}(\eta)}d\eta.$$

于是，由 $M_1([0,x]) := \bar{f}(x)$ 定义的测度 M_1 具有所期望的 Laplace - Stieltjes 变换.注意到 $f_2(\Delta) \geqslant f_2(x), x \in [0,\Delta)$ 与 $f_2(\Delta) \geqslant f_3(x), x \in (-\infty, 0)$，故有

$$| h_1(s)e^{\Delta s} | \leqslant \lambda f_2(\Delta)\int_\Delta^\infty \int_{x-\Delta}^{x+c/\beta_2} dG(y)e^{-s(x-\Delta)}dx \leqslant$$

$$\lambda f_2(\Delta)\int_0^\infty \int_x^{x+\Delta+c/\beta_2} dG(y)dx \leqslant$$

$$\lambda f_2(\Delta)\int_0^\infty \int_{y-\Delta-c/\beta_2}^{y} dx dG(y) = \lambda(\Delta + c/\beta_2)f_2(\Delta) < \infty.$$

因此，$| cf_2(\Delta) - h_1(\eta)e^{\Delta\eta} | \leqslant A < \infty$，且使

$$\int_0^\infty A\exp\{-\frac{c}{\beta_1}\eta + \frac{\lambda}{\beta_1}\int_0^\eta \frac{1-\hat{G}(\xi)}{\xi}d\xi\}d\eta \leqslant$$

$$A\exp\{\frac{\lambda}{\beta_1}\int_0^1 \frac{1-\hat{G}(\xi)}{\xi}d\xi\}(1 + \int_1^\infty \exp\{-\eta c/\beta_1\}\eta^{\lambda/\beta_1}d\eta) < \infty.$$

因为 $\lim_{s\to 0}\hat{g}(s) = 1$，我们有

$$M_1([0,\infty)) = \lim_{s\to\infty}\hat{M}_1(s) < \infty.$$

(ii) 为保证函数 $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 满足 $\mathbf{A}f = 0$，f 必须当 $x < 0$ 与 $x \in [0,\Delta)$ 时分别满足积分 - 微分方程(2)与(3)，而且当 $x \geqslant \Delta$ 时为如下积分 - 微分方程的解，

$$(\beta_1(x-\Delta) + c)f'(x) +$$

$$\lambda[\int_0^{x-\Delta} f(x-y)dG(y) + \int_{x-\Delta}^{x} f(x-y)dG(y) +$$

$$\int_x^{x+c/\beta_2} f(x-y)dG(y) - f(x)] = 0. \tag{4}$$

因此，可取 $f(x) = f_3(x)$，若 $x \in (-\infty,0)$；$f(x) = f_2(x)$，若 $x \in [0,\Delta)$. 为保证 f 的连续性，需有 $f(\Delta) = f_2(\Delta)$. 令 $\hat{f}_1(s) := \int_\Delta^\infty f(x)e^{-sx}dx$. 则 $\hat{f}_1$ 为下面方程的解，

$$-\beta_1(\Delta f_2(\Delta)e^{-\Delta s} + \hat{f}_1(s) + s\hat{f}'_1(s)) +$$

$$(c - \Delta\beta_1)(-f_2(\Delta)e^{-\Delta s} + s\hat{f}_1(s)) -$$

$$\lambda\hat{f}_1(s)(1-\hat{G}(s))+h_1(s)=0,$$

或等价地，对某常数 K_1，

$$\hat{f}_1(s)=\frac{\hat{g}(s)\mathrm{e}^{-\Delta s}}{\beta_1 s}\int_{K_1}^{s}\frac{h_1(\eta)\mathrm{e}^{\Delta\eta}-cf_2(\Delta)}{\hat{g}(\eta)}\mathrm{d}\eta.$$

因为 $f(\Delta)=\lim_{s\to\infty}s\mathrm{e}^{\Delta s}\hat{f}_1(s)$，且当 $s\geqslant 1$ 时，

$$\exp\{\beta_1^{-1}\lambda\int_0^s\xi^{-1}(1-\hat{G}(\xi))\mathrm{d}\xi\}\leqslant$$

$$\exp\{\beta_1^{-1}\lambda\int_0^1\xi^{-1}(1-\hat{G}(\xi))\mathrm{d}\xi\}s^{\lambda/\beta_1},$$

我们有

$$\int_{K_1}^{\infty}\frac{h_1(\eta)\mathrm{e}^{\Delta\eta}-cf_2(\Delta)}{\hat{g}(\eta)}\mathrm{d}\eta=0.$$

因此，

$$\hat{f}_1(s)=\frac{\hat{g}(s)\mathrm{e}^{-\Delta s}}{\beta_1 s}\int_{s}^{\infty}\frac{cf_2(\Delta)-h_1(\eta)\mathrm{e}^{\Delta\eta}}{\hat{g}(\eta)}\mathrm{d}\eta.$$

上式蕴含 $f(x)=f_1(x)$，若 $x\in[\Delta,\infty)$. 积分 - 微分方程(4) 及 $f_1(\Delta)=f_2(\Delta)$ 的事实保证了 f 的绝对连续性. 进一步地，f 的有界性及引理 3 蕴含 $\{f(X_t)\}$ 是一鞅.

定理 2 对任意 $\Delta\in[0,\infty]$，

$$P_x(T=\infty)=\frac{f(x)}{f(\infty)},$$

其中，当 $\Delta<\infty$ 时，f 由引理 3 决定；而当 $\Delta=\infty$ 时，f 由引理 2 决定.

证明 由鞅的收敛定理，$f(X_t)$ a.s. 收敛且有 $\mathbf{E}[f(X_t)]=f(x)$. 但当 $t\to\infty$ 时，$f(X_t)$ 的收敛性蕴含 $X_\infty\notin(-c/\beta_2,\infty)$. 因此，$P_x[(X_t\to\infty)\cup(T<\infty)]=1$. 故有

$$f(x)=\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}_xf(X_{T\wedge t})=$$

$$\mathbf{E}_x[f(X_T)I_{[T<\infty]}]+\mathbf{E}_x[f(X_\infty)I_{[T=\infty]}]=$$

$$f(\infty)P_x(T=\infty).$$

进一步地，$P_x(T<\infty)\equiv 1$ 的充要条件是 f 有界. 这便证明了定理.

定理 3 令

$$R_0 := \sup\{r \in R : \hat{G}(-r) < \infty\}.$$

若 $\Delta < \infty$，则对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{x\to\infty} P_x(T < \infty)e^{(R_0-\varepsilon)x} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} P_x(T < \infty)e^{(R_0+\varepsilon)x} = \infty.$$

在这种意义下，R_0 亦可称作风险过程 $\{X_t\}$ 的 Lundberg 指数.

证明 函数 $p(x) := P_x(T < \infty)e^{rx}$ 有 Laplace 变换

$$\hat{p}(s) := \int_{\Delta}^{\infty} p(x)e^{-sx}dx =$$

$$\frac{e^{-\Delta(s-r)}}{f(\infty)}\left(\frac{f(\infty) - \beta^{-1}\hat{g}(s-r)\int_{s-r}^{\infty}\hat{g}(\eta)^{-1}(cf_2(\Delta) - h_1(\eta)e^{\Delta\eta})d\eta}{s-r}\right).$$

容易得，

$$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{s\to 0} s\hat{p}(s) = \begin{cases}\infty, & r > R_0;\\ 0, & r < R_0.\end{cases}$$

定理证毕.

3. 带利率与通货膨胀率的风险模型

在下面的模型中我们引入常数通货膨胀率 δ. 这时，索赔总额过程为

$$\tilde{S}_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \exp\{\delta\tau_i\},$$

其中 τ_i 为第 i 个索赔到达的时刻. 由于索赔额随时间的增长，同样地，保费收入率 $c_t = ce^{\delta t}$，流动资金水平 $\Delta_t = \Delta e^{\delta t}$ 亦随时间增长. 记 $\tilde{X}_t$ 为盈余过程. 显然，它是时间相依的，不是齐次逐段决定马尔可夫过程. 为了避免非齐次的困难，我们转而考虑盈余现值过程 $X_t = \tilde{X}_t e^{-\delta t}$. 显然，过程 $\{X_t\}$ 为齐次逐段决定马尔可夫过程. 盈余过程 $\{X_t\}$ 的三元特征 (φ, F, Q) 中，φ 为微分动力系统具有速度场

χ:

$$\chi = \begin{cases} [(\beta_1 - \delta)x + c - \beta_1\Delta]\dfrac{\partial}{\partial x}, & \Delta \leqslant x; \\ (c - \delta x)\dfrac{\partial}{\partial x}, & 0 \leqslant x < \Delta; \\ ((\beta_2 - \delta)x + c)\dfrac{\partial}{\partial x}, & x < 0. \end{cases}$$

而 F, Q 与经典模型相同.

引理 4 设 $c > \delta\Delta, \kappa = (c - \delta\Delta)/(\beta_1 - \delta), G(x) = 1 - e^{-x/\mu}$. 令

$$f_3(x) = \int_0^{x+c/(\beta_2-\delta)} s^{(\lambda/(\beta_2-\delta))-1} e^{-s/\mu} ds,$$

$$f_2(x) = f_3(0) +$$

$$e^{-c/(\delta\mu)} (\frac{c}{\delta})^{\lambda/\delta+1} f'_3(0) \int_{c/\delta-x}^{c/\delta} s^{-(\lambda/\delta)-1} e^{s/\mu} ds,$$

$$f_1(x) = f_2(\Delta) +$$

$$e^{\kappa/\mu} \kappa^{1-\lambda/(\beta_1-\delta)} f'_2(\Delta) \int_\kappa^{x-\Delta+\kappa} s^{\lambda/(\beta_1-\delta)-1} e^{-s/\mu} ds,$$

$$f(x) = f_3(x) I_{[-c/(\beta_2-\delta), 0)} +$$

$$f_2(x) I_{[0,\Delta)} + f_1(x) I_{[\Delta,\infty)}.$$

则 $\{f(X_t)\}$ 是一有界鞅.

证明 直接计算显示, f 是 $\mathbf{A}f = 0$ 的可微有界解,其中 $\mathbf{A}$ 为过程 $\{X_t\}$ 的广义生成算子. 因此,由定理 12.2.5 知 $\{f(X_t)\}$ 为有界鞅.

定理 4 在引理 4 的条件下,

$$P_x(T = \infty) = \frac{f(x)}{f(\infty)}.$$

证明 类似于定理 2 的证明,可得结论.

§4 经典风险模型的推广与补充变量

1.时间相依模型

作为经典模型的另一种推广,考虑索赔到达率 $\lambda = \lambda(t)$,保费收入率 $c = c(t)$ 及索赔额分布 $G(y) = G(y,t)$ 均依赖于时间 t 的情形.这种情形或是由于某些险种的流行,或是由于某些险种的季节性或气候的变化.如车辆保险,冬季索赔发生的可能性会增大,同时,投保的顾客数亦可能增加.

由于时间相依性,盈余额过程 $\{X_t\}$ 显然不是齐次逐段决定马尔可夫过程.但若补充上时间变量 t,则 (X_t,t) 就成为齐次逐段决定马尔可夫过程.类似于第12章 §3的1.1小节的讨论,作用在函数 $f(x,t)$ 上的广义生成算子为

$$\mathbf{A}f(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}f(x,t) + c(t)\frac{\partial}{\partial x}f(x,t) + \lambda(t)\left[\int_0^\infty f(x-y,t)\mathrm{d}G(y,t) - f(x,t)\right].$$

因此,我们需要求解方程 $\mathbf{A}f(x,t) = 0$.

如果考虑形如 $f(x,t) = f_1(t)\mathrm{e}^{-\nu x}$ 的解,则由方程 $\mathbf{A}f(x,t) = 0$ 可得

$$f'_1(t) - c(t)\nu f_1(t) + \lambda(t)[f_1(t)\hat{G}(\nu,s) - f_1(t)] = 0.$$

其中,$\hat{G}(\nu,t) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{\nu y}\mathrm{d}G(y,t)$.解此方程得

$$f_1(t) = \exp\left\{c(t)\nu t - \int_0^t \lambda(s)[\hat{G}(\nu,s) - 1]\mathrm{d}s\right\}.$$

因此,

$$\exp\left\{c(t)\nu t - \int_0^t \lambda(s)[\hat{G}(\nu,s) - 1]\mathrm{d}s\right\}\mathrm{e}^{-\nu X_t} \tag{1}$$

为一鞅.

定理1 设保费收入率 c 及索赔额分布 G 与 t 无关,索赔到达

过程为非齐次 Poisson 过程具有参数 $\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin \frac{2\pi}{T_0}(t + t_0)]$，其中 λ_0 可视作平均索赔到达率.则

$$\psi(x) = \frac{e^{\nu_0 x} \exp[\frac{c\nu_0}{\lambda_0} \frac{\lambda_1 T_0}{2\pi} \cos \frac{2\pi t_0}{T_0}]}{\mathbf{E}_x[\exp(\frac{cR_0}{\lambda_0} \frac{\lambda_1 T_0}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T_0}(T + t_0)) e^{-R_0 X_T} \mid T < \infty]}, \tag{2}$$

其中，R_0 满足 $cR_0 = \lambda_0[\hat{G}(R_0) - 1]$.

证明 此时，(1) 式为

$$\exp\{c\nu t - [\varphi(\nu) - 1]\int_0^t [\lambda_0 + \lambda_1 \sin \frac{2\pi}{T_0}(s + t_0)] ds\} e^{-\nu X_t} =$$

$$\exp\{c\nu t - [\varphi(\nu) - 1](\lambda_0 t -$$

$$\frac{\lambda_1 T_0}{2\pi} \cos \frac{2\pi}{T_0}(t + t_0) + \frac{\lambda_1 T_0}{2\pi} \cos \frac{2\pi t_0}{T_0})\} e^{-\nu X_t}.$$

我们选 R_0 使得 $cR_0 = \lambda_0[\varphi(R_0) - 1]$，亦即，$R_0$ 为平均到达率 λ_0 的调解系数.因此，

$$\exp\{\frac{cR_0 \lambda_1 T_0}{2\pi\lambda_0}[\cos \frac{2\pi}{T_0}(t + t_0) - \cos \frac{2\pi}{T_0} t_0]\} e^{-R_0 X_t}$$

是一鞅.类似于前两节，将条件加在 $[T \leqslant t]$，$[T > t]$ 上，再令 $t \to \infty$，即得结论.

一般说来，(2) 式的分母的计算是困难的，即便是 G 为指数分布且 T 与 X_T 独立的情形.但我们仍能得到一些有趣的结果.例如，由 $|\cos(2\pi(T + t_0)/T_0| < 1$ a.s.我们有

$$\mathbf{E}_x(e^{-R_0 X_t} \mid T < \infty)\psi(x) < e^{-R_0 x} \exp\{\frac{cR_0 \lambda_1 T_0}{2\pi\lambda_0}(\cos \frac{2\pi t_0}{T_0} + 1)\},$$

$$\mathbf{E}_x(e^{-R_0 X_t} \mid T < \infty)\psi(x) > e^{-R_0 x} \exp\{\frac{cR_0 \lambda_1 T_0}{2\pi\lambda_0}(\cos \frac{2\pi t_0}{T_0} - 1)\}.$$

特别地，如果 $t_0 = 0$ 时有

$$\psi(x) > e^{-R_0 x} / \mathbf{E}[e^{-R_0 X_T} \mid T < \infty];$$

而当 $t_0 = T/2$ 时，有

$$\psi(x) < e^{-R_0 x} / \mathbf{E}[e^{-R_0 X_T} \mid T < \infty].$$

我们发现与 $\lambda = \lambda_0$ 的经典情形比较，如果保险公司开业于索赔到达率较高的半周期前，则破产的可能较经典情形增加；反之，如果保险公司开业于索赔到达率较低的半周期前，则破产的可能较经典情形减少.

2. 一般更新模型

本小节我们对模型作如下推广：

(i) Poisson 到达的条件放松为一般更新到达过程；到达时间间隔分布 H 具有密度 h.

(ii) 放弃索赔到达过程与索赔额独立的假设，仅假定索赔额序列为独立随机变量序列(未必同分布).更确切地，我们假定索赔额分布依赖于索赔发生时刻与上一次索赔发生时刻的时间间隔，即 Y_n 的分布为 $G(y,\sigma_n)$，其中 $\sigma_n = \tau_n - \tau_{n-1}$，$(n = 1,2,\cdots)$，而 τ_n 为第 n 次索赔发生的时刻.

此时，盈余过程 $\{X_t\}$ 是逐段决定过程，但不是马尔可夫过程.由定理3.6.2知，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$ 值过程 $(X_t, u_t) := (X_t, t - \tau_n)$，$\tau_{n-1} \leqslant t < \tau_n$，$n = 1,2,\cdots$ 成为逐段决定马尔可夫过程.作用在函数 $f(x,u)$ 上的广义生成算子为

$$\mathbf{A}f(x,u) = \frac{\partial}{\partial u}f(x,u) + c\frac{\partial}{\partial x}f(x,u) +$$

$$\lambda(u)\Big[\int_0^\infty f(x-y,0)\mathrm{d}G(y,u) - f(x,u)\Big]. \qquad (3)$$

其中，$\lambda(u)$ 为 $H(u)$ 的率函数(hazard rate)，亦即，$\lambda(u) := h(u)/(1 - H(u))$.

定理2 设 $\hat{G}(\nu,u)$ 为 $G(y,u)$ 的 Laplace 变换满足通常可微条件.且 $\nu = R_0$ 满足方程

$$\int_0^\infty e^{-c\nu x}\varphi(\nu,x)h(x)\mathrm{d}x = 1.$$

则在如下净收益条件下

$$c\int_0^\infty xh(x)\mathrm{d}x > \int_0^\infty \hat{G}'(0,x)h(x)\mathrm{d}x,$$

$$e^{-R_0 X_t}\frac{e^{cR_0 u_t}}{1-H(u_t)}\int_{u_t}^{\infty}e^{-cR_0 x}\hat{G}(R_0,x)h(x)\mathrm{d}x$$

是一鞅.

证明　为求解方程 $\mathbf{A}f(x,u)=0$,假设方程有形如 $e^{-\nu x}q(u)$ 的解,代入方程得

$$-c\nu q(u)+q'(u)+\lambda(u)[\hat{G}(\nu,u)q(0)-q(u)]=0.$$

令 $k(u)=(1-H(u))q(u)$,则

$$-c\nu k(u)+k'(u)+h(u)\hat{G}(\nu,u)k(0)=0.$$

此方程有通解

$$k(u)=Ce^{c\nu u}+k(0)e^{c\nu u}\int_u^{\infty}e^{-c\nu x}\hat{G}(\nu,x)h(x)\mathrm{d}x.$$

令 $u=0$ 可得

$$C=q(0)[1-\int_0^{\infty}e^{c\nu x}\hat{G}(\nu,x)h(x)\mathrm{d}x].$$

将 $\nu=R_0$ 代入上式即得 $C=0$.因此,

$$e^{-R_0(X_t-cu_t)}\int_{u_t}^{\infty}e^{-cR_0 x}\hat{G}(R_0,x)h(x)\mathrm{d}x/(1-H(u_t))$$

是一鞅.证毕.

利用上述结果可得进一步的结果,这里略去.

§5　补充与注记

我们不可能用一章的篇幅系统地介绍风险理论.即便是基于逐段决定马尔可夫过程模型的破产理论,也仅限于与破产概率相关的部分结果.尽管如此,我们已不难看到马尔可夫过程理论在风险理论中的重要地位.而且,一旦归结为马尔可夫模型,丰富的马尔可夫过程理论即可用来研究风险模型的各个方面.正是由于这一点吸引了大量的概率论学者投身于风险理论的研究,导致近十几年风险理论的快速发展.反过来,又为随机过程理论提出了许多

值得进一步深入研究的课题.

§2 介绍经典风险模型的基于逐段决定马尔可夫过程的鞅方法，主要来自于 Dassios & Embrechts[1]. 对结果的证明我们作了适当的修改与补充.

§3 取自 Embrechts & Schmidli[1]. 本节模型的主要特点是盈余过程本身是齐次逐段决定马尔可夫过程. Dassios & Embrechts[1] 还讨论了保费收入率 $c = c(x)$，亦即保费收入率随盈余额变化的模型，给出了破产概率的显式表达. 张春生[1] 建立了受限制贷款风险模型，讨论了破产概率及破产瞬间前后盈余额分布. 该文的主要想法是银行可能将最大贷款额限制在破产线以上. 王过京[1] 讨论了更一般的一维逐段决定马尔可夫过程模型.

§4 模型的主要特点是盈余过程本身不是齐次马尔可夫过程，但经适当补充变量之后成为齐次逐段决定马尔可夫过程. 更接近实际的经济环境的引入必然导致这样的模型. 这样的模型亦可分为两类：一类是非齐次情形，只需补充上时间 t，过程 $\{(X_t, t)\}$ 即成为齐次马尔可夫过程；另一类，盈余过程本身不是马尔可夫过程，必须用第 11 章 §6 所论的补充变量方法才能化为齐次马尔可夫过程. 关于这类模型工作，可参见 Reinhard[1], Asmussen[2] 与 Bäuerle[1] 及所附参考文献.

有关保险风险过程控制的内容超出了本书的范围. 有兴趣的读者可参见 Schäl[1] 及其参考文献.

24 逐段决定马尔可夫过程与风险模型(II)

§1 引言

在本章中,我们构造一类新的过程,在一定条件下,一般风险过程仍具有时齐强马尔可尔性.新的风险过程逐段决定马尔可夫骨架过程,我们首先提出两个重要例子:经典风险过程的一般化和复合资产并讨论它们的破产问题.然后我们讨论更一般风险模型的破产理论.

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是包含所有如下定义的物体的完备概率空间.

设经典风险过程

$$R_t^0 = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \tag{1}$$

其中 u 为初始资产,c 为保费收入;$\{N_t: t \geq 0\}$ 为参数为 λ 的 Poisson 过程,表示$(0,t]$区间内理赔的次数,Z_k 表示第 k 次理赔的量.R_t 表示 t 时刻保险公司盈余;$\{N_t\}$ 与 $\{Z_k\}$ 相互独立(见 Grandell[1]),$\{R_t^0\}$ 是一个时齐的强马氏过程.

近年来,许多作者根据逐段决定马尔可夫过程理论(PDMP)将模型(1)进行推广,例如 Dassios 和 Embrechts[1],Embrechts,Grandell,Schmidli[1] 和 Furrer 和 Schmidli[1].

在本章中,我们将利用侯振挺,刘再明,邹捷中,李学伟[1]提出的逐段决定马尔可夫骨架过程理论改进风险模型(1).

经典风险理论主要依赖以下三个重要假设

(见 Grandell[1])

(i) N_t 是一个 Poisson 过程;

(ii) $\{N_t\}$ 和 $\{Z_k\}$ 是相互独立的;

(iii) $\{Z_k\}$ 是独立 r.v.序列.

不管理论与实际,考虑 $\{N_t\}$ 是一般的点过程,且 $\{N_t\}$ 与 $\{Z_k\}$ 不相互独立,都是非常有意义的.为了得到某种确切的结果,一般风险过程至少要有时齐强马尔可夫性,为了推广风险模型(1)一个最合适的过程就是逐段决定马氏骨架过程.一般风险模型包含两个很重要的例子,经典风险模型的一般化和复合资产过程.

§2 描述一般风险模型的结构.

§3 讨论线性保费收入风险过程的破产理论.这个风险模型是经典风险模型(1)的推广.

在 §3.1 中,我们证明了破产概率的一些性质,当理赔是指数分布时,我们得到了破产概率的明显表达式.

在 §3.2 讨论生存函数对破产概率的影响,当理赔发生的速率只在很小的区间取值时,我们可以用经典风险过程代替一般风险模型.

在 §3.3 中给出破产前风险过程上确界分布的一些性质,当理赔是指数分布时,我们得到了上确界分布的明显表达式.

§4 中对含投资回报的风险理论的破产理论加以讨论,这个风险模型是复合资产过程的一般化(见 Harrison[1]),这一节的内容与第 3 节非常相似.

§5 讨论更一般的风险过程的破产理论,在这节中,风险过程的样本轨道的逐段运动由具有初值的微分方程给出.

在 §5.1 中,我们证明了破产概率的一些特点,当理赔是指数分布时,我们得到了破产概率的明确表达式.

在 §5.3 中,我们给出了破产前的风险过程的上确界函数的一些性质,当理赔是指数分布时,给出了上确界函数的明显表达式.

§3, §4 中的风险过程是 §5 中的特殊情形.

本章的内容基本上取自王过京[1].

§2　风险过程的构造

我们将风险过程(1.1) 一般化,在该条件下,一般的模型仍然是时齐强马氏过程.我们用 N_t 表示区间$(0,t]$的理赔次数连续样本轨道,Z_k 表示 k 次理赔的数量. $\{T_n\}, n \geq 1$ 理赔时间序列,令 $T_0=0, S_k=T_k-T_{k-1}, k \geq 1$. θ 表示 R_+ 上的 Borelσ－代数. $Z_k \in (R_+, \theta)$,假设 $\{Z_k\}(k \geq 1)$ 是独立同分布的随机变量序列,连续两次理赔之间的保费收入是确定的,这样保险公司在 t 时刻的盈余可表示为:

$$R_t=\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t-T_n, R_{T_n}) I_{(T_n \leq t<T_{n+1})}, \tag{1}$$

其中 $\varphi_n(t,x): R_+ \times R \to R$ 是可测函数,$\varphi_n(t,x)$ 是 t 的右连续函数,且

$$\varphi_n(0,x)=x. \tag{2}$$

我们假设

$$\varphi_n=\varphi, \quad n=0,1,2,\cdots \tag{3}$$

即 φ_n 与 n 无关,φ 满足下列泛函等式

$$\varphi(0,x)=x, \quad \varphi(t+s,x)=\varphi(t,\varphi(s,x)). \tag{4}$$

这样风险过程(1) 可以写成如下:

$$R_t=\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(t-T_n, R_{T_n}) I_{(T_n \leq t<T_{n+1})}. \tag{5}$$

定义生存函数 F 如下:

$$F(t,u)=\exp\left\{-\int_0^t \lambda(\varphi(s,u)) \mathrm{d}s\right\}, \tag{6}$$

其中 $\lambda: R \to R_+$ 是一个可测函数. 对于 λ,我们假设 $\int_0^{+\infty} \lambda(\varphi(s,u)) \mathrm{d}s=+\infty$ 且存在 $\varepsilon>0$, λ 在$[0,\varepsilon)$是可积的,点过程 N_t 如下

定义：

$$P(T_k - T_{k-1} < t \mid R_{T_{k-1}}) = F(t, R_{T_{k-1}}) \quad (k = 1,2,\cdots), \tag{7}$$

那么

$$P(S_k > 0) = P(T_k - T_{k-1} > 0) = 1 \quad (k = 1,2,\cdots).$$

从(7)知，$T_k - T_{k-1}$ 的分布依赖于 $R_{T_{k-1}}$. 然而在经典风险理论中，$T_k - T_{k-1}$ 独立于 $R_{T_{k-1}}$.

由(4)中的两个等式，我们得到

$$F(t+s,x) = F(t,x)F(s,\varphi(t,x)), \tag{8}$$

其中 $x \in R, t \in R_+, s+t \in (0, S_*(x)]$,

$$S_*(x) = \inf(t; F(t,x) = 0). \tag{9}$$

我们定义可数测度 $N_t(A)$ 如下：

$$N_t(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} I_{(T_i \leq t, Z_i \in A)}, \quad A \in \theta, \tag{10}$$

假设1 $\mathbf{E}[N_t] = \mathbf{E}[\sum_{i=1}^{+\infty} I_{(T_i \leq t)}] < +\infty$，对所有 $t < +\infty$.

从假设(1)和 N_t 的右连续性，T_k 是 $\{F_t\}$ 停时 $(k = 1,2,\cdots)$ 和 $T_n \uparrow +\infty (n \to +\infty)$.

定义1 设 $\{F_t^X\}$ 是实值随机过程 $X = \{X_t, t \geq 0\}$ 的自然 σ-代数. 我们称过程 X 为时齐的马尔可夫骨架过程，如果存在一列停时序列 $\{\tau_n\}, n \geq 1$，使得

(1) $\tau_0 = 0, \tau_n \uparrow +\infty \quad (n \to +\infty)$

(2) 对每一 τ_n 和每一个 R 上的可测函数 f，我们有下列等式：

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}_x[f(X(\cdot)\cdot\theta_{\tau_n} \mid F_{\tau_n}^X] = \\ &\mathbf{E}_x[f(X(\cdot))\cdot\theta_{\tau_n} \mid X_{\tau_n}] = \\ &\mathbf{E}_{X_{\tau_n}}[f(X(\cdot))] \quad \mathrm{P}_x - \text{a.s.}, \quad X \in R, \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $P_x(A) = P(A \mid X_0 = x), \quad A \in F_{+\infty} = \bigcup_{t=0}^{+\infty} F_t^X$.

注记1 马尔可夫骨架过程的一般定义参考侯振挺，刘再明，

邹捷中,李学伟[1].

注记 2　为方便,记 $X_t = X(t)$.

我们将证明 R_t 是时齐马尔可夫骨架过程,从(7)知道 $S_k = T_k - T_{k-1}$ 只通过 $F(t,R_{T_{k-1}})$ 依赖 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_{k-1}$ 的值而与 $Z_n,n \geqslant k$ 无关. 因此 $\{Z_k\}_{k\geqslant 1}$ 是独立随机变量序列,从而 Z_k 独立于 $S_k,k \leqslant n$,所以独立于 $R_{T_k},k < n$.这样,我们有

命题 1　Z_n 独立于 $(S_k,R_{T_{k-1}}),k \leqslant n,n = 1,2,\cdots$.

用 $Q_k(R_{T_{k-1}},T_k - T_{k-1},\cdot)$ 记 R_t 从 $R_{T_{k-1}}$ 出发在 T_k 跳跃的转移概率.即

$$Q_k(R_{T_{k-1}},S_k,\cdot) = P(R_{T_k} \in \cdot \mid R_{T_{k-1}},S_k). \tag{12}$$

记 $R_{T_k} = \varphi(R_{T_{k-1}},S_k) - Z_k$,这样给定 $R_{T_{k-1}} = x$ 和 $S_k = t$,我们有

$$\begin{aligned}&Q_k(x,t,\cdot) = P(\varphi(x,t) - Z_k \in \cdot) = \\ &P(Z_k \in \varphi(x,t) - \cdot) = P(Z_i \in \varphi(x,t) - \cdot) = \\ &Q(x,t,\cdot).\end{aligned} \tag{13}$$

实际上,由命题 1,我们有

$$\begin{aligned}&Q_k(x,t,\cdot) = \\ &\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}} P(R_{T_k} \in \cdot \mid R_{T_{k-1}} \in \Delta x,S_k \in \Delta t) = \\ &\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}} P(Z_k \in \varphi(t,x) - \cdot \mid R_{T_{k-1}} \in \Delta x,S_k \in \Delta t) = \\ &\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}} P(Z_k \in \varphi(t,x) - \cdot = P(Z, \in \varphi(t,x) - \cdot).\end{aligned}$$

由(4)我们有

$$Q(x,t + s,\cdot) = Q(\varphi(t,x),s,\cdot).$$

风险过程 R_t 由满足(4)式的 $\varphi(t,x)$,由(6)式定义的 $F = F(t,u)$ 及由(14)式定义的 $Q = Q(x,t,\cdot)$ 完全决定,我们称 φ,F,Q 为 R_t 的三元特征.把它们写作 (φ,F,Q).

因为 R_t 的三特征 (φ,F,Q) 分别满足等式(4),(8)和(14),从侯振挺,刘再明,邹捷中,李学伟[1]中定理 3.2 的推论可知 R_t 是

时齐马尔可夫骨架过程.因为 R_t 有表达式(5),我们称它为具有马尔可夫骨架的时齐逐段决定过程.

令 $\eta_k = (S_k, R_{T_k})$,从侯振挺、刘再明、邹捷中、李学伟[1] 的定理 3.2 知 $\{\eta_k\}_{k\geq 1}$ 在状态空间$(R_+ \times R, \theta(R_+ \times R))$ 中形成一个时齐的马尔可夫链和转移概率 $P(\eta_{k+1} \in B \mid \eta_k) = P(\eta_{k+1} \in B \mid R_{T_k})(B \in \theta(R_+ \times R))$ 不依赖于 η_k 的第一个元 S_k.这意味着在当前时刻 T_k 给定一保险公司的盈余 R_{T_k} 的值,那么在时刻 T_{k+1} 保险公司的盈余和 S_k 的分布只依赖于当前的盈余 R_{T_k},而与 $R_{T_1}, R_2, \cdots, R_{T_{k-1}}$ 无关,这是合理的.

我们可以证明:如果逐段决定马尔可夫过程的三元特征(φ, F, Q) 分别满足等式(4),(8) 和(14),那么,它是一个时齐强马氏过程(见侯振挺,刘再明,邹捷中,李学伟[1] 定理 2.4.1).

§3 具有线性保费收入的风险过程的破产理论

设 $\varphi(t,u) = \varphi_1(t,u) = u + ct$,显然 $\varphi = \varphi_1$ 满足(2.4) 中的两个等式,在等式(2.5) 中当 $\varphi = \varphi_1$ 时,用 R_t^1 记 R_t.从等式(2.5)

$$R_t^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_1(t - T_n, R_{T_n}^1) I_{(T_n \leq t < T_{n+1})} =$$

$$u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k. \tag{1}$$

风险过程(1) 是经典风险过程(1.1) 的一般化.注意 N_t 和$\{Z_k\}$ 在(1) 中不一定相互独立,R_t^1 是时齐强马氏过程.

3.1. 破产概率

用 $\Psi_1(u)$ 记 R_t^1 的破产概率,记 $\Phi_1(u)$ 为非破产概率,注意 $\Phi_1(u) = 0$ 当 $u < 0$.令 $F(z) = P(Z_1 \leq z)$.

定理 1 设 $u \geq 0$,且 λ 在$(0, +\infty)$ 连续,那么 $\Phi_1(u)$ 有下列

Feller 表达式

$$\Phi_1(u) = \int_0^{+\infty} \lambda(u+ct)\cdot$$

$$\exp\left\{-\int_0^t \lambda(u+cs)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\int_0^{u+ct} \Phi_1(u+ct-z)\mathrm{d}F(z). \quad (2)$$

证明 因为在区间$(0,T_1)$, $R_t^1 \geqslant 0$,这样我们有

$$\Phi_1(u) = P(\inf_{t\geqslant 0} R_t^1 \geqslant 0) = P(\inf_{t\geqslant T_1} R_t^1 \geqslant 0) =$$

$$\mathbf{E}[I(\inf_{t\geqslant 0} R_t^1 \geqslant 0)\cdot \theta_{T_1})]. \quad (3)$$

由 R_t^1 的时齐强马尔可夫性和等式(3),我们有

$$\Phi_1(u) = \mathbf{E}[\Phi_1(R_{T_1}^1)]. \quad (4)$$

因此,由命题 2.1 我们有

$$\Phi_1(u) = \mathbf{E}[\Phi_1(u+cT_1-Z_1)] =$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Phi_1(u+cs-z,x)P(T_1\in \mathrm{d}s, Z_1\in \mathrm{d}z) =$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \Phi_1(u+cs-z,x)P(T_1\in \mathrm{d}s)P(Z_1\in \mathrm{d}z) =$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\varphi_1(s,u))\cdot$$

$$\exp\left\{-\int_0^s \lambda(\varphi_1(l,u))\mathrm{d}l\right\}\mathrm{d}s\int_0^{+\infty} \Phi_1(u+cs-z,x)\mathrm{d}F(z) =$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda(u+cs)\cdot$$

$$\exp\left\{-\int_0^s \lambda(u+cs)\mathrm{d}l\right\}\mathrm{d}s\int_0^{u+cs} \Phi_1(u+cs-z,x)\mathrm{d}F(z).$$

定理 2 设 $F(z)$ 的密度函数 $f(z)$ 在$[0,+\infty)$是连续的.

(1) 如果 λ 在$(0,+\infty)$是连续的,那么 $\Phi_1(u)$ 在$(0,+\infty)$有一阶连续导数;

(2) 如果 λ 是$(0,+\infty)$连续可微的,那么 $\Phi_1(u)$ 在$(0,+\infty)$是两次连续可微的.

证明 设 $u+ct=p$,那么等式(2)可写成

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{c}\int_u^{+\infty}\lambda(p)\cdot$$

$$\exp\left\{-\int_0^{\frac{p-u}{c}}\lambda(\Phi(s,u))\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}p\int_0^p\Phi_1(p-z)f(z)\mathrm{d}z =$$

$$\frac{1}{c}\int_u^{+\infty}\lambda(p)\exp\left\{-\int_u^p\lambda(s)\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}p\int_0^p\Phi_1(p-z)f(z)\mathrm{d}z. \quad (5)$$

因为 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 是连续的和 $\Phi_1(u)$ 是有界的，这样 $\int_0^p\Phi_1(p-z)f(z)\mathrm{d}z$ 在 $[0,+\infty)$ 关于 p 是连续的. 因而由等式(5)和 λ 的连续性知 $\Phi_1(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 有一阶连续导数.

定理第(1)部分可由等式(5)和 f 及 λ 的连续性立即得到. 由 f 和 λ' 的连续性及第(1)部分，我们可以证明 $\Phi_1(u)$ 在 $[0,+\infty)$ 两次可微.

定理 3 设 $F(z) = 1-\exp\{-\alpha z\}$，$(\alpha>0)$，$\lambda\neq 0$，$\lambda$ 在 $[0,+\infty)$ 是连续可微的，那么 $\Phi_1(u)$ 满足下列微分方程：

$$\Phi_1''(u) - \left[\frac{1}{\lambda(u)}(\lambda(u)-\alpha\lambda(u)) + \frac{1}{c}\lambda(u)\right]\Phi_1'(u) = 0. \quad (6)$$

证明 由定理2，$\Phi_1(u)$ 在 $[0,+\infty)$ 两次连续可微，将(5)两边微分，我们得到

$$\Phi_1'(u) = -\frac{1}{c}\lambda(u)\int_0^u\Phi_1(u-z)\mathrm{d}F(z) + \frac{\lambda(u)}{c}\Phi_1(u). \quad (7)$$

因为 $F(z) = 1-\alpha\exp\{-\alpha z\}$，从等式(7)我们有

$$\Phi_1'(u) = -\frac{1}{c}\lambda(u)\cdot$$

$$\exp\{-\alpha u\}\int_0^u\Phi_1(p)\alpha\exp\{\alpha p\} + \frac{1}{c}\lambda(u)\Phi_1(u). \quad (8)$$

这样我们有

$$\int_0^u\Phi_1(p)\alpha\exp\{\alpha p\}\mathrm{d}p =$$

$$\frac{1}{\lambda(u)}[\lambda(u)\Phi_1(u) - c\Phi_1'(u)]\cdot\exp\{\alpha u\} \quad (9)$$

将(8)两边同时微分，代替在计算过程中出现的$\int_0^u \Phi_1(p)\alpha\exp\{\alpha p\}dp$，我们可得到微分方程(6).

从(5)式，我们有

$$\Phi_1(0) = \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} \lambda(p) \cdot$$

$$\exp\{-\int_0^p \lambda(s)ds\}dp\int_0^p \Phi_1(p-z)f(z)dz. \tag{10}$$

如果 $\Phi(0) = 0$，从(10)我们得到 $\Phi_1(+\infty) = \lim_{n \to +\infty} \Phi_1(u) = 0$，即 $\forall u \geqslant 0, \Psi_1(u) = 1$. 这意味着保险公司以概率1破产. 这样，我们考虑情形

$$\Phi_1(0) > 0, \tag{11}$$

在定理4的条件和(11)下，我们有

$$\Phi_1'(0) = \frac{1}{c}\lambda(0)\Phi_1(0) > 0. \tag{12}$$

解微分方程(6)，我们有

$$\Phi_1(u) = \Phi_1(0)[1 + \frac{\lambda(0)}{c}\int_0^u dl \cdot$$

$$\exp\{-\int_0^l (\alpha - \frac{\lambda'(p)}{\lambda(p)} - \frac{\lambda(p)}{c})dp\}]. \tag{13}$$

当 $\lambda = \lambda_0$(一个正常数)时，由于(13)我们有

$$\Phi_1(u) = \Phi_1(0)[1 + \frac{\lambda_0}{c\alpha - \lambda_0}[1 - \exp\{-(\alpha - \frac{\lambda_0}{c})u\}]. \tag{14}$$

公式(14)与 Grandell[1] 中的公式 Ⅱ 一致.

3.2. 生存函数对破产概率的影响

我们考虑函数 λ 对破产概率的影响.

(i) $\lambda(0) = 0$.

我们假设 λ' 在 $(0, +\infty)$ 是连续的，从等式(7)有 $\Phi_1'(0) = 0$，如果理赔分布函数是指数分布，由等式(13)我们有

$$\Phi_1(u) = \Phi_1(0), \quad 对所有\ u \geqslant 0. \tag{15}$$

等式(15)的意思是如果在时间 $t = 0$，发生理赔的速率是0，那么破

产概率的值不改变.即不管初始资产的大小如何,保险公司破产的可能性总是相同的.

(ii) $\lambda \equiv \lambda_0$(一个正常数).

在这种情形下,点过程 N_t 是参数为λ_0 的 Poisson 过程,风险过程 R_t^1 是经典风险过程.当理赔的分布是指数分布时,我们有公式(13),经典风险理论现在可以很好地发展

$$0 < a \leqslant \inf_{s \geqslant 0} \lambda(s) \leqslant \sup_{s \geqslant 0} \lambda(s) \leqslant b < +\infty .$$

如果在模型(1)中 N_t 是参数为λ_0 的 Poisson 过程,用 $N_t^{\lambda_0}$ 记N_t,$R_t^{\lambda_0}$ 记 R_t^1,$T_k^{\lambda_0}$,$k \geqslant 0$记 $N_t^{\lambda_0}$ 的跳跃时刻.用 $\varphi_{1\lambda}(u)$ 记 $R_t^{1\lambda_0}$ 的非破产概率,因为

$$\begin{aligned}
&P(T_k - T_{k-1} > t \mid R^1_{T_{k-1}}) = \\
&\exp\{-\int_0^t \lambda(\varphi_1(s, R^1_{T_{k-1}}))\mathrm{d}s\} \geqslant \\
&\exp\{-bt\} = P(T_k^b - T_{k-1}^b > t) = \\
&P(T_k^b - T_{k-1}^b > t \mid R^{1b}_{T_{k-1}}),
\end{aligned} \tag{16}$$

即 N_t 的更新时间"统计地"大于 N_t^b 的更新时间.换言之,R_t^1"随机地"大于 R_t^{1b},因此我们有下列不等式

$$\Phi_1(u) = \Phi_{1b}(u) \tag{17}$$

与(17)相似,我们有

$$\Phi_1(u) \leqslant \Phi_{1a}(u). \tag{18}$$

由不等式(17)和(18),我们可选择两个经典风险模型分别从上下控制 R_t^1,特别地,如果 a 接近于 b,我们可用经典风险模型代替 R_t^1.

注1 设 $\mu = \mathbf{E}[Z_1]$,$c - b\mu > 0$.由 Grandell[1]公式(Ⅰ)我们有:$\Phi_{2b}(u) = \dfrac{c - bu}{c} > 0$.这样由不等式(17),假设(11)是具有意义的.

3.3. 破产前上确界分布

我们考虑破产前 R_t^1 的上确界分布函数 $G_1(u,x)$：

$$G_1(u,x) = P(\sup_{0\leq t\leq T_\mu} R_t^1 \geq x, T_u < +\infty). \tag{19}$$

显然

$$\begin{cases} G_1(u,x) = \Psi_1(x), & u \geq 0; \\ G_1(u,x) = 0, & u < 0, x > 0. \end{cases} \tag{20}$$

定理 4 设 $x > u \geq 0$，设 λ 在 $(0,+\infty)$ 连续，那么 $G_1(u,x)$ 满足下面积分方程

$$G_1(u,x) =$$

$$\exp\left\{-\int_0^{t_0}\lambda(u+cl)\mathrm{d}l\right\}G_1(u+ct_0,x) + \int_0^{t_0}\lambda(u+cs)\cdot$$

$$\exp\left\{-\int_0^{t_0}\lambda(u+cl)\mathrm{d}l\right\}\mathrm{d}s\int_0^{u+cs}G_1(u+cs-z,x)\mathrm{d}F(z). \tag{21}$$

其中，$t_0 < \frac{1}{c}(x-u)$.

证明 设 $T = t_0 \wedge T_1$，$\forall t \in (0,T)$，我们有 $0 < R_t^1 < x$，这样 $P(T_u \geq T) = 1$ 而且在 $\{T_u < +\infty\}$ 上，$T_u = T + T_u \cdot \theta_T$。因此，我们有

$$G_1(u,x) = \mathbf{E}[I_{(\sup_{0\leq t\leq T_u} R_t^1 \geq x, T_u < +\infty)}] =$$

$$\mathbf{E}[I_{(\sup_{0\leq t\leq T_u} R_t^1 \geq x, T\leq T_u < +\infty)}] =$$

$$\mathbf{E}[I_{(\sup_{0\leq t\leq T_u} R_t^1 \geq x, T_u < +\infty)\cdot\theta_T}]. \tag{22}$$

由 R_t^1 的时齐强马氏性，我们有

$$G_1(u,x) = \mathbf{E}[G_1(R_T^1,x)]. \tag{23}$$

因此

$$G_1(u,x) = \mathbf{E}[G_1(R_{t_0}^1,x), T_1 > t_0] +$$

$$\mathbf{E}[G_1(R_{T_1}^1,x), T_1 \leq t_0] = I_1 + I_2. \tag{24}$$

我们计算 I_1 和 I_2

$$I_1 = \mathbf{E}[G_1(u+ct_0,x)I_{(T_1>t_0)}] =$$

$$\exp\{-\int_0^{t_0}\lambda(\varphi_1(u,l))\mathrm{d}l\}G_1(u+ct_0,x)=$$

$$\exp\{-\int_0^{t_0}\lambda(u+cl)\mathrm{d}l\}G_1(u+ct_0,x). \tag{25}$$

由命题 1,我们有

$$I_2=\mathbf{E}[G_1(u+cT_1-Z_1,x)I_{(T_1\leqslant t_0)}]=$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}G_1(u+cs-z,x)I_{(s\leqslant t_0)}P(T_1\in\mathrm{d}s,Z_1\in\mathrm{d}z)=$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}G_1(u+cs-z,x)I_{(s\leqslant t_0)}P(T_1\in\mathrm{d}s)P(Z_1\in\mathrm{d}z)=$$

$$\int_0^{t_0}\lambda(\varphi_1(u,s))\exp\{-\int_0^{s}\lambda(\varphi_1(u,l))\mathrm{d}l\}\int_0^{+\infty}G_1(u+cs-z,x)\mathrm{d}F(z)=$$

$$\int_0^{t_0}\lambda(u+cs)\exp\{-\int_0^{s}\lambda(u+cl))\mathrm{d}l\}\int_0^{u+cs}G_1(u+cs-z,x)\mathrm{d}F(z). \tag{26}$$

由等式(24)-(26),我们得到(21)

定理 5 令 $\alpha>0,0\leqslant u<x_0$,假设 $F(z)$ 的密度函数 $f(z)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

(1) 如果 λ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,则 $G_1(u,x)$ 当 $u\in(0,x)$ 时关于 u 一阶连续可导;

(2) 如果 λ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可导,则 $G_1(u,x)$ 当 $u\in(0,x)$ 时关于 u 二阶连续可导.

证明 (1) $\forall\varepsilon_0>0,\varepsilon_0<\frac{1}{2}x$,只需证 $G_1(u,x)$ 关于 $u\in(\varepsilon_0,x-\varepsilon_0)$ 一阶连续可导,选取 Δt 使得 $0<\Delta t<\frac{1}{c}(x-\varepsilon 0)$.对任意 $u\in(\varepsilon_0,x-\varepsilon_0)$,有

$$G_1(u,x)=\exp\{-\int_0^{\Delta t}\lambda(u+cl)\mathrm{d}l\}G_1(u+c\Delta t,x)+$$

$$\int_0^{\Delta t}\lambda(u+cs)\cdot$$

$$\exp\{-\int_0^{s}\lambda(u+cl)\mathrm{d}l\}\mathrm{d}s\int_0^{u+cs}G_1(u+cs-z,x)\mathrm{d}F(z). \tag{27}$$

令 $p=u+cs$,则(27) 变成

$$G_1(u,x)=\exp\{-\int_0^{\Delta t}\lambda(u+cl)\mathrm{d}l\}G_1(u+c\Delta t,x)+$$

$$\int_0^{u+c\Delta t}\frac{1}{c}\lambda(p)\exp\{-\int_u^p\lambda(l)\mathrm{d}l\}\mathrm{d}p\int_0^p G_1(p-z,x)f(z)\mathrm{d}z, \quad (28)$$

利用(28)可完成本定理的证明.为简便起见,用 $G_1(u)$ 代替 $G_1(u,x)$.

定理 6 令 $x>0,0\leqslant u<x$.假设 $F(z)$ 的密度函数 $f(z)$,在$[0,+\infty)$上连续,λ 在$[0,+\infty)$上连续,则 $G_1(u)$ 满足下列积微方程

$$G_1'(u)=\frac{\lambda(u)}{c}G_1(u)-\frac{1}{c}\lambda(u)\int_0^u G_1(u-z)\mathrm{d}F(z). \quad (29)$$

证明 对任意 $\varepsilon_0>0,\varepsilon_0<\frac{1}{2}x$,只需证 $G_1(u)$ 当 $u\in(\varepsilon_0,x-\varepsilon_0)$ 满足(29).设 Δt 足够小使得 $\forall u\in(\varepsilon_0,x-\varepsilon_0)$,(28)式成立.由定理 5 可得

$$\exp\{-\int_0^{\Delta t}\lambda(u+cl)\mathrm{d}l\}G_1(u+c\Delta t,x)=$$
$$\exp\{-\lambda(u+cl_0)\Delta t\}G_1(u+c\Delta t)=$$
$$(1-\lambda(u+cl_0)\Delta t+o(\Delta t))(G_1(u)+G_1(u)c\Delta t+o(\Delta t)) \quad (30)$$

和

$$\int_u^{u+c\Delta t}\frac{1}{c}\lambda(p)\exp\{-\frac{1}{c}\int_u^p\lambda(l)\mathrm{d}l\}\mathrm{d}p\int_0^p G_1(p-z,x)f(z)\mathrm{d}z=$$

$$\lambda(P_0)\exp\{-\frac{1}{c}\int_u^{p_0}\lambda(l)\mathrm{d}l\}\mathrm{d}p\int_0^{p_0}G_1(p_0-z,x)f(z)\mathrm{d}z\Delta t. \quad (31)$$

这里 $l_0\in(0,\Delta t)$,$p_0\in(u,u+c\Delta t)$,由 λ,f 和 $G_1(u)$ 的连续性,及(28),(30)和(31),可得(29).

定理 7 令 $F(z)=1-\exp\{-\alpha z\}(\alpha>0)$,$\lambda\neq0$,$\lambda$ 在$(0,+\infty)$连续可微,则 $G_1(u)$ 满足下列微分方程:

$$G_1''(u)-[\frac{1}{\lambda(u)}(\lambda'(u)-\alpha\lambda(u))+$$

$$\frac{1}{c}\lambda(u)]G_1'(u) = 0,\quad 0 < u < x. \tag{32}$$

证明 此证明和定理3的证明类似.

引理1 设X和Y是两个相互独立的实随机变量,X有连续密度函数$f(x)$,则$P(X = Y) = 0$.

证明 $P(X = Y) = \mathbf{E}[I_{(X=Y)}] = \iint I_{(x=y)}P(X \in dx, Y \in dy)$

$$= \iint I_{(x=y)}P(X \in dx)P(Y \in dy) =$$

$$\int P(Y \in dy)\int I_{(x=y)}f(x)dx = 0.$$

引理2 令$u \geqslant 0$,如果$F(z)$有连续密度函数$f(z)$,则

$$P(\inf_{t\geqslant 0} R_t^1 = 0) = 0.$$

证明 由命题2.1和引理1,可得

$$P(\inf_{t\geqslant 0} R_t^1 = 0) \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k = R_{T_{k-1}} + c(T_k - T_{k-1})) = 0.$$

命题1 设$x > 0$,如果$F(z)$有连续密度函数$f(z)$,则

$$G_1(x-) = G_1(x).$$

证明 令$A_n = \{T_{x-\frac{1}{n}} < +\infty\}$, $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, $A_0 = \{T_x < +\infty\}$. 因为T_u关于u递增,因此$A \supset A_0$.令$C = \{\inf_{t\geqslant 0} R_t' = 0\}$, $X_t = ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k$,如果$\omega \in A - C$,则存在一个$k$使得$\forall n \geqslant k$, $\inf_{t\geqslant 0}(x - \frac{1}{n} + X_t(\omega)) < 0$.因此$\inf_{t\geqslant 0}(x + X_t(\omega)) < 0$,从而$A - C \subset A_0$.因此除去一个$P$-零集,可得$A = A_0$.

令$B_n = \{\sup_{0\leqslant s < T_{x-\frac{1}{n}}}(x - \frac{1}{n} + X_s) \geqslant x\}$, $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.由$X_t$的右连续性和$P(T_1 > 0)$,可得$P(B) = 1$.因此,由控制收敛定理,得

$$G_1(x-) = \lim_{n\to\infty} G_1(x - \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[I_{B_n}I_{A_n}] =$$

$$\mathbf{E}[\lim_{n\to\infty} I_{B_n} I_{A_n}] = \mathbf{E}[I_B I_A] = G_1(x).$$

定理 8 令 $F(z) = 1 - e^{-\alpha z}, \alpha > 0, \lambda \neq 0, \lambda$ 在$(0, +\infty)$上连续可微,则

$$G_1(u) = \frac{\Phi_1(u)}{\Phi_1(x)}\Psi_1(x) = \frac{1 - \Psi_1(u)}{1 - \Psi_1(x)}\Psi_1(x), \quad 0 \leqslant u \leqslant x. \quad (33)$$

证明 由式(28)可证 $G_1(u)$ 在$[0,x)$上连续.因而由命题1可知 $G_1(u)$ 在$[0,x)$上连续.由(6)和(32),知 $G_1(u)$ 和 $\Phi_1(u)$ 在$(0,x)$满足同一个微分方程,由下列初值问题解的唯一性.

$$\begin{cases} G_1'(u) - [\frac{1}{\lambda(u)}(\lambda(u) - \alpha\lambda(u)) + \frac{1}{c}\lambda(u)]G_1(u) = 0, \\ G_1(0) = G_1(0), \quad 0 < u < x; \\ G_1(x) = \Psi(x) \end{cases} \quad (34)$$

可得式(33).

注 1 如果初值问题(29)的有界连续解是唯一的,则仍有式(33).

§4 含投资回报的风险过程的破产理论

令 $\varphi(t,u) = \varphi_2(t,u) = \exp\{rt\}[u + \frac{c}{r}(1 - \exp\{-rt\})]$.则

$$\varphi_2(0,u) = u, \quad (1)$$

且

$$\varphi_2(t,\varphi_2(s,u)) = \exp\{rt\}[\exp\{rs\}(u + \frac{c}{r}(1 - \exp\{-rs\})) + \frac{c}{r}(1 - \exp\{-rt\})] =$$

$$\exp\{r(s+t)\}[u+\frac{c}{r}(1-\exp\{-r(s+t)\})] =$$

$$\varphi_2(t,s,u). \tag{2}$$

这样 $\varphi_2(t,u)$ 满足(2.4)中的两个等式,在(2.5)式中当 $\varphi = \varphi_2$ 时,用 R_t^2 代替 R_t.由(2.5)式,可得

$$R_t^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_2(t-T_n, R_{T_n}^2) I_{(T_n \leq t < T_{n+1})} =$$

$$\exp\{rt\}[u+\frac{c}{r}(1-\exp\{-rt\}) - \sum_{i=1}^{N_t} \exp\{-rT_i\} Z_i]. \tag{3}$$

在(3)中,$c, r > 0$ 为常数,c 表示保费率,r 表示投资回报率,这个风险模型称为含投资回报的风险过程.如果 N_t 是一个 Poisson 过程,则称风险过程(3)为含投资回报的经典风险模型,1997 年 Harrison[1] 研究了这个模型,应该注意到在风险模型(3)中 $\{N_t\}$ 和 $\{Z_k\}$ 不一定相互独立,R_t^2 是一个齐次强马氏过程.

4.1 破产概率

记 $\Psi_2(u)$ 为 R_t^2 上的破产概率,$\Phi_2(u)$ 为非破产概率.则当 $u < 0$ 时,$\Phi_2(u) = 0$.

定理 1 假设 λ 为$(0, +\infty)$上的连续函数,则当 $u \geq 0$ 时,$\Phi_2(u)$ 有下列 Feller 表达式

$$\Phi_2(u) = \int_0^{+\infty} \lambda(\varphi_2(t,u)) \exp\{-\int_0^t \lambda(\varphi_2(s,u)) ds\} dt \cdot$$

$$\int_0^{\varphi_2(t,u)} \Phi_2(\varphi_2(t,u)-z) dF(z). \tag{4}$$

证明 类似于等式(3.4),可得

$$\Phi_2(u) = \mathbf{E}[\Phi_2(R_{T_1}^2)]. \tag{5}$$

因此由命题 2.1,有

$$\Phi_2(u) = \mathbf{E}[\Phi_2(\varphi_2(T_1,u) - Z))] =$$

$$\iint \Phi_2(\varphi_2(s,u) - z]) P(T_1 \in ds, Z_1 \in dz) =$$

$$\iint \Phi_2(\varphi_2(s,u) - z])P(T_1 \in \mathrm{d}s)P(Z_1 \in \mathrm{d}z) =$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\varphi_2(t,u))\exp\{-\int_0^t \lambda(\varphi_2(s,u))\}\mathrm{d}t \cdot$$

$$\int_0^{+\infty} \Phi_2(\varphi_2(t,u) - z)\mathrm{d}F(z) =$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\varphi_2(t,u))\exp\{-\int_0^t \lambda(\varphi_2(s,u))\}\mathrm{d}t \cdot$$

$$\int_0^{\varphi_2(t,u)} \Phi_2(\varphi_2(t,u) - z)\mathrm{d}F(z).$$

定理 2 假设 F 的密度函数是$(0, +\infty)$上的连续函数.

(1) 如果 λ 在$(0, +\infty)$连续,则 $\Phi_2'(u)$ 在$(0, +\infty)$连续.

(2) 如果 λ' 在$(0 + \infty)$连续,则 $\Phi_2''(u)$ 在$(0, +\infty)$上连续.

证明 记 $p = \varphi_2(t,u) = \exp\{rt\}(u + \frac{c}{r}) - \frac{c}{r}$,则 $t = \frac{1}{r}\ln \frac{c + rp}{c + ru}$.由式(4)可得

$$\Phi_2(u) = \int_u^{\infty} \frac{1}{c + rp}\lambda(p) \cdot$$

$$\exp\{-\int_0^{\frac{1}{r}\ln\frac{c+rp}{c+ru}} \lambda(\varphi_2(s,u))\mathrm{d}s\}\mathrm{d}p\int_0^p \Phi_2(p - z)\mathrm{d}F(z). \qquad (6)$$

记 $s = \frac{1}{r}\ln\frac{c + rp}{c + ru}$,则

$$\int_0^{\frac{1}{r}\ln\frac{c+rp}{c+ru}} \lambda(\varphi_2(s,u))\mathrm{d}s = \int_u^p \frac{1}{c + rs_1}\lambda(s_1)\mathrm{d}s_1. \qquad (7)$$

由方程(6)和(7)得

$$\Phi_2(u) = \int_u^{+\infty} \frac{1}{c + rp}\lambda(p) \cdot$$

$$\exp\{-\int_u^p \frac{1}{c + rs_1}\lambda(s_1)\mathrm{d}s_1\}\mathrm{d}p\int_0^p \Phi_2(p - z)\mathrm{d}F(z). \qquad (8)$$

因为$\int_0^p \Phi_2(p - z)\mathrm{d}F(z)$在$[0, +\infty)$连续,因此,如果 λ 在$(0, +\infty)$连

续,则由(8)可知$\Phi_2(u)$在$(0,+\infty)$连续;如果λ'在$(0,+\infty)$连续,则也从(8)也可知$\Phi_2'(y)$在$(0,+\infty)$上连续.

在等式(8)两边求导,得

$$\Phi_2(u)=\frac{\lambda(u)}{c+ru}\Phi_2(u)-\frac{\lambda(u)}{c+ru}\int_0^u\Phi_2(u-z)\mathrm{d}F(z). \quad (9)$$

定理3 假设$\lambda\neq0$,λ'在$(0,+\infty)$上连续,令$F(u)=1-e^{-\alpha z}$,则$\Phi_2(z)$满足下列微分方程:

$$\Phi_2''(u)+\left(\frac{r}{c+ru}-\frac{\lambda'}{\lambda(u)}+\alpha\frac{\lambda(u)}{c+ru}\right)\Phi_2'(u)=0. \quad (10)$$

证明 利用定理2,$\Phi_2'(u)$在$(0,+\infty)$上连续,由(9),得

$$\Phi_2'(u)=-\frac{\lambda(u)}{c+ru}\exp\{-\alpha u\}\int_0^u\alpha\Phi_2(p)\exp\{\alpha o\}\mathrm{d}p+$$

$$\frac{\lambda(u)}{c+ru}\Phi_2(u). \quad (11)$$

由(11)得

$$\int_0^u\Phi_2(p)\exp\{\alpha p\}\mathrm{d}p=$$

$$\frac{c+ru}{\lambda(u)}\exp\{\alpha u\}\left[\frac{\lambda(u)}{c+ru}\Phi_2(u)-\Phi_2(u)\right]. \quad (12)$$

对上式两端求导,简单计算可得(10).

由(8),可得

$$\Phi_2(0)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{c+rp}\lambda(p)\cdot$$

$$\exp\{-\int_0^p\frac{1}{c+rs_1}\lambda(s_2)\mathrm{d}s_1\}\mathrm{d}p\int_0^p\Phi_2(p-z)\mathrm{d}F(z). \quad (13)$$

如果$\Phi_2(0)=0$,则由(13)可得$\Phi_2(+\infty)=\lim\limits_{u\to+\infty}\Phi_2(u)=0$,即对任意$u\geqslant0$,$\Psi_2(u)=1$,现在我们排除这种情形,即假定

$$\Phi_2(0)>0. \quad (14)$$

由定理3的假设条件和(14),得

$$\Phi_2(0)=\frac{1}{c}\lambda(0)\Phi_2(0)>0. \quad (15)$$

解方程(10),得

$$\Phi_2(u) = \Phi_2(0)[1 + \frac{\lambda(0)}{c}\int_0^u \mathrm{d}l \cdot$$

$$\exp\{-\int_0^l(\frac{r}{c + rs_1} - \frac{\lambda'(p)}{\lambda(p)} + \alpha - \frac{\lambda(p)}{c + rp})\mathrm{d}p\}], \qquad (16)$$

当 $\lambda \equiv r$ 时,由(16)可得

$$\Phi_2(u) = \Phi_2(0)[1 + \frac{r}{c\alpha} - \frac{r}{c\alpha}\exp\{-\alpha u\}]. \qquad (17)$$

4.2. 生存函数对破产概率的影响

现在考虑生存函数 λ 对破产概率 $\Psi_2(u)$ 的影响,这节内容和3.2节内容非常相似.

(i) $\lambda(0) = 0$.

假设 λ' 在 $[0, +\infty)$ 上连续,则由(15)得 $\Phi_2'(0) = 0$,如果理赔分布是指数分布,则由方程(15),得

$$\Phi_1(u) = \Phi_1(0), \quad 对\ u \geqslant 0, \qquad (18)$$

式(18)的意义和式(3.14)的意义非常相似.

(ii) $\lambda \equiv \lambda_0$(正常数).

在这种情形,点过程 N_t 是带参数 λ_0 的 Poisson 过程.风险过程 R_t^2 是含技投资回报的经典风险过程,当索赔分布为指数分布时,可得(17).

(iii) $0 < a \leqslant \inf\limits_{s \geqslant 0}\lambda(s) \leqslant \sup\limits_{s \geqslant 0}\lambda(s) \leqslant b < +\infty$.

如果模型(3)中的 N_t 是带参数 λ_0 的 Poisson 过程,用 $N_t^{\lambda_0}$ 记 N_t,用 $N_t^{2\lambda_0}$ 记 R_t^2,记 $\{T_k^{\lambda_0}\}$, $k \geqslant 0$ 为 $N_t^{\lambda_0}$ 的跳跃时间,$\Phi_{2\lambda_0}(u)$ 为 $R_t^{2\lambda_0}$ 的非破产概率.因为

$$P(T_k - T_{k-1} > t \mid R_{T_{k-1}}^2) =$$

$$\exp\{-\int_0^t \lambda(\varphi_2(s, R_{T_{k-1}}^2))\mathrm{d}s\} \geqslant \exp\{-bt\} =$$

$$P(T_k^b - T_{k-1}^b > t) = P(T_k^b - T_{k-1}^b > t \mid R_{T_{k-1}}^{2b}), \qquad (19)$$

即,过程 N_t 的更新时间"随机地"大于过程 N_t^b 的更新时间,也就是

说，R_t^2“随机”地大于 R_t^{2b}. 因此，有

$$\Phi_2(u) \geqslant \Phi_{2b}(u). \tag{20}$$

类似(20)，可得

$$\Phi_2(u) \leqslant \Phi_{2a}(u). \tag{21}$$

利用(20)和(21)，我们能够选择两个适当的具有投资回报的经典风险模型，特别地，如果 a 接近于 b，则我们能用一个经典的风险模型代替 R_t^2.

4.3. 破产前的上确界分布

现在讨论破产前 R_t^2 的上确界分布 $G_2(u,x)$，记

$$G_2(u,x) = P(\sup_{0\leqslant t\leqslant T_u} R_t^2 \geqslant x, T_x < +\infty), \tag{22}$$

则

$$\begin{cases} G_2(u,x) = \Psi_2(x), & u \geqslant x; \\ G_2(u,x) = 0, & u < 0, x > 0. \end{cases} \tag{23}$$

定理 4 设 $x > u \geqslant 0$，假设 λ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，则 $G_2(u,x)$ 满足下列积分方程

$$\begin{aligned} G_2(u,x) = \\ \exp\{-\int_0^{t_0}\lambda(\varphi_2(l,u))\mathrm{d}l\}G_2(t_0,u),x) + \\ \int_0^{t_0}\lambda(\varphi_2(s,u))\exp\{-\int_0^s\lambda(\varphi_2(l,u))\mathrm{d}l\}\mathrm{d}s\cdot \\ \int_0^{\varphi_2(s,u)}G_2(\varphi_2(s,u)-z,x)\mathrm{d}F(z). \end{aligned} \tag{24}$$

这里 t_0 满足不等式 $\varphi_2(t_0,u) < x$.

证明 记 $T = t_0 \wedge T_1$，类似于(3.23)有

$$G_2(u,x) = \mathbf{E}[G_2(R_T^2,x)]. \tag{25}$$

因此

$$\begin{aligned} G_2(u,x) = \mathbf{E}[G_2(R_T^2,x),T_1 > t_0] + \\ \mathbf{E}[G_2(R_{T_1}^2,x),T_1 \leqslant t_0] = I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{26}$$

下面计算 I_1 和 I_2：

$$I_1 = \mathbf{E}[G_2(\varphi_2(t_0,u),x)I_{(T_1>t_0)}] =$$

$$\exp\{-\int_0^{t_0}\lambda(\varphi_2(l,u))\mathrm{d}l\}G_2(\varphi_2(t_0,u),x). \tag{27}$$

利用命题2.1,有

$$I_2 = \mathbf{E}[G_2(\varphi_2(T_1,u)-Z_1,x)I_{(T_1\leqslant t_0)}] =$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}G_2(\varphi_2(s,u)-z,x)I_{(s\leqslant t_0)}P(T_1\in \mathrm{d}s,Z_1\in \mathrm{d}z) =$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}G_2(\varphi_2(s,u)-z,x)I_{(s\leqslant t_0)}P(T_1\in \mathrm{d}s)P(Z_1\in \mathrm{d}z) =$$

$$\int_0^{t_0}\lambda(\varphi_2(u,s))\exp\{-\int_0^s\lambda(\varphi_2(u,l))\mathrm{d}l\}\int_0^{+\infty}G_2(\varphi_2(s,u)-z,x)\mathrm{d}F(z) =$$

$$\int_0^{t_0}\lambda(\varphi_2(s,u))\exp\{-\int_0^s\lambda(\varphi_2(l,u))\mathrm{d}l\}\int_0^{\varphi_2(s,u)}G_2(\varphi_2(s,u)-z,x)\mathrm{d}F(z). \tag{28}$$

则由(26)–(28),可得式(24)

定理5 设 $x>0, 0\leqslant u<x$,假设 $F(z)$ 的密度函数 $f(z)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

(1) 如果 λ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,则 $G_2(u,x)$ 当 $u\in(0,x)$ 关于 u 有一阶连续偏导;

(2) 如果 λ 在 $(0,+\infty)$ 连续可导,则 $G_2(u,x)$ 当 $u\in(0,x)$ 关于 u 有二阶连续偏导;

证明 (1) $\forall \varepsilon_0>0, \varepsilon_0<\frac{1}{2}x$,只需证 $G_1(u,x)$ 当 $u\in(\varepsilon_0,x-\varepsilon_0)$ 有一阶连续导数.选取 Δt 使得 $\Delta t>0$ 且 Δt 满足 $\varphi_2(t,x-\varepsilon_0)<x$.则 $\forall u\in(\varepsilon_0,x-\varepsilon_0)$,有

$$G_2(u,x) = \exp\{-\int_0^{\Delta t}\lambda(\varphi_2(l,u))\mathrm{d}l\}G_1(\varphi_2(\Delta t,u)x) +$$

$$\int_0^{\Delta t}\lambda(\varphi_2(s,u))\exp\{-\int_0^s\lambda(\varphi_2(l,u0)\mathrm{d}l\}\mathrm{d}s\cdot$$

$$\int_0^{\varphi_2(s,u)}G_2(s,u)-z,x)\mathrm{d}F(z). \tag{29}$$

记 $p=\varphi_2(s,u)$,则由(29)可退化为

$$
\begin{aligned}
&G_2(u,x) = \\
&\exp\{-\int_0^{\Delta t}\lambda(\varphi_2(l,u))\mathrm{d}l\}G_1(\varphi_2(\Delta t,u)x) \\
&\int_u^{\varphi_2(\Delta t,u)}\frac{1}{c+rp}\lambda(p)\cdot \\
&\exp\{-\int_u^p\frac{1}{c+rs_1}\lambda(s_2)\mathrm{d}s_1\}\mathrm{d}p\int_0^p\Phi(p-z)\mathrm{d}F(z). \qquad (30)
\end{aligned}
$$

由(30)式可证明该定理.为简便起见,用 $G_2(u)$ 代替 $G_2(u,x)$.

定理 6 设 $x>0, 0\leqslant u<x$.假设 $F(z)$ 的密度函数 $f(z)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,λ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,则 $G_2(u)$ 满足下列积微方程

$$
G_2^1(u) = \frac{\lambda(u)}{c+ru}G_2(u) - \frac{\lambda(u)}{c+ru}\int_0^u G_2(u-z)\mathrm{d}F(z). \quad (31)
$$

证明 此证明类似于证明定理 3.6.

定理 7 令 $F(z)=1-\mathrm{e}^{-\alpha z}$,$(\alpha>0)$,$\lambda\neq 0$,$\lambda$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微,则 $G_2(u)$ 满足下列微分方程:

$$
G''(u) + \left(\frac{r}{c+ru} - \frac{\lambda'(u)}{\lambda(u)} + \alpha - \frac{\lambda(u)}{c+ru}\right)G_2'(u) = 0, \qquad 0<u<x. \quad (32)
$$

证明 此证明类似于定理 3 的证明.

命题 1 设 $x>0$,如果 $F(z)$ 有连续密度函数 $f(z)$,则 $G_2(u)$ 在 $[0,x]$ 上连续.

证明 类似命题 3.1,有 $G_2(x^-)=G_2(x)$,利用(30)可证 $G_2(u)$ 在 $[0,x)$ 连续,则 $G_2(u)$ 在 $[0,x]$ 连续.

定理 8 令 $F(z)=1-\mathrm{e}^{-\alpha z}$,$\alpha>0$,$\lambda\neq 0$,$\lambda$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,则

$$
G_2(u) = \frac{\Phi_2(u)}{\Phi_2(x)}\Psi_2(x) = \frac{1-\Psi_2(u)}{1-\Psi(x)}\Psi_2(x), \quad 0\leqslant u<x. \quad (33)
$$

证明 由命题1,和定理3.8的证明步骤一样,可证(33).

注1 如果积微方程(31)的有界连续解唯一,则仍有(33).

§5 一般情形

这节我们考虑(2.5)中的 $\varphi_2(t,x)$ 是由下列初值问题的解:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\varphi(t,x)}{\mathrm{d}t} = g(\varphi(t,x)), t > 0, \\ \varphi(0,x) = x. \end{cases} \tag{1}$$

这里,$g: R^1 \to R^1$ 是连续可微且 Lipschitz 连续函数,易知(1)的解 $\varphi(t,x)$ 唯一,且(1)的解 $\varphi(t,x)$ 满足(2.4)的两个方程.

因为 R_t 的跳跃是由理赔产生的,由(2.5)可得

$$R_{T_k} = \varphi(T_k - T_{k-1}, R_{T_{k-1}}) - Z_k. \tag{2}$$

这里 R_t 是齐次强马氏过程.

5.1. 破产概率

记 $\Psi(u)$ 为 R_t 的破产概率,$\Phi(u)$ 为非破产概率,则当 $u < 0$ 时,$\Phi(u) = 0$.

定理1 假设 λ 在 $(0, +\infty)$ 连续,则当 $u > 0$.$\Phi(u)$ 有下列 Feller 表达式:

$$\Phi(u) = \int_0^{+\infty} \lambda(\varphi(t,u)) \cdot$$

$$\exp\left\{-\int_0^t \lambda(\varphi(s,u))\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t\int_0^{\varphi(t,u)} \Phi(\varphi(t,u) - z)\mathrm{d}F(z). \tag{3}$$

证明 类似(3.4),得

$$\Phi(u) = \mathbf{E}[\Phi(R_{T_1})], \tag{4}$$

则由命题2.1,有

$$\Phi(u) = \mathbf{E}[\Phi(\varphi(T_1,u) - Z_1])] =$$

$$\iint \Phi\varphi(s,u) - z])P(T_1 \in \mathrm{d}s, Z_1 \in \mathrm{d}z) =$$

$$\iint \Phi[\varphi(s,u) - z])P(T_1 \in \mathrm{d}s)P(Z_1 \in \mathrm{d}z) =$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\varphi(t,u))\exp\{-\int_0^t \lambda(\varphi(s,u))\}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty} \Phi(\varphi(t,u) - z)\mathrm{d}F(z) =$$

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\varphi(t,u))\exp\{-\int_0^t \lambda(\varphi(s,u))\}\mathrm{d}t\int_0^{\varphi(t,u)} \Phi(\varphi(t,u) - z)\mathrm{d}F(z).$$

记 $\varphi^{-1}(t,x)$ 为 $\varphi(t,x)$ 的反函数,则 $\varphi^{-1}(x,x) = 0$,$\varphi^{-1}(t,x)$ 的导数不依赖于 x,记 $\varphi(t)$ 为 $\varphi^{-1}(t,x)$ 的导数.

定理 2 假设 F 的密度函数在 $[0, +\infty)$ 上连续.

(1) 如果 λ 在 $(0, +\infty)$ 上连续,则 $\Phi'(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

(2) 如果 λ' 在 $(0, +\infty)$ 上连续且 $\varphi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续求导,则 $\Phi''(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续.

证明 令 $p = \varphi(t,u)$,则 $t = \varphi^{-}(p,u)$,$p \geqslant u$.$\mathrm{d}t = \varphi(p)\mathrm{d}p$.则(3) 可得

$$\Phi(u) = \int_u^{+\infty} \lambda(p)\varphi(p) \cdot$$

$$\exp\{-\int_u^p \lambda(l)\varphi(l)\mathrm{d}l\}\mathrm{d}p\int_0^p \Phi(p - z)\mathrm{d}F(z). \tag{5}$$

利用(5) 类似于定理 4.2 或定理 3.2 的证明,可完成此定理证明.

对式(5) 两边求导,得

$$\Phi'(u) =$$

$$\lambda(u)\varphi(u)\Phi(u) - \lambda(u)\varphi(u)\int_0^u \Phi_2(u - z)\mathrm{d}F(z). \tag{6}$$

定理 3 设 $\lambda \neq 0$,λ' 在 $(0, +\infty)$ 上连续,$F(u) = 1 - e^{-\alpha x}$,$\varphi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的连续可导.则 $\Phi(z)$ 满足下列微分方程

$$\Phi''(u) + [\lambda(u)\varphi(u) + \alpha - \frac{(\lambda(u)\varphi(u))'}{\lambda(u)\varphi(u)}]\Phi'(u) = 0. \tag{7}$$

证明 此证明与定理 4.3 的证明类似.

由(6),可得

$$\Phi'(0) = \lambda(0)\Phi_2(0) > 0. \tag{8}$$

解方程(7),得

$$\Phi(u) = \Phi(0)[1 + \lambda(0)\int_0^u \mathrm{d}l \cdot$$

$$\exp\{-\int_0^t [\lambda(p)\varphi(p) + a - \frac{(\lambda(u)\varphi(u))'}{\lambda(u)\varphi(u)}]\mathrm{d}p\}]. \tag{9}$$

令 $\varphi = \varphi_1(t,x) = u + ct$,则由(9)式可得式(3.13).

令 $\varphi = \varphi_2(t,u) + \exp\{rt\}[u + \frac{c}{r}(1 - e^{-rt})]$.则由(9)可得(4.16).

5.2. 破产前的上确界分布

现在考虑破产前 R_+ 的上确界分布 $G(u,x)$,定义

$$G(u,x) = P(\sup_{0\leq t\leq T_u} R_t \geq x, T_u < +\infty). \tag{10}$$

类似(4.23),可得

$$\begin{cases} G(u,x) = \Psi(x), & u \geq x; \\ G(u,x) = 0, & u < 0, x > 0. \end{cases} \tag{11}$$

因为此部分内容和4.3节的内容完全相似,因此,我们只给出结果而省略其证明.

定理4 设 $x > u \geq 0$.假设 λ 在$(0,+\infty)$上连续,则 $G_2(u,x)$ 满足下列积分方程:

$$G(u,x) = \exp\{-\int_0^{t_0}\lambda(\varphi(l,u))\mathrm{d}l\}G(\varphi(t_0,u),x) + \int_0^{t_0}\lambda(\varphi(s,u))\cdot \exp\{-\int_0^s\lambda(\varphi(l,u))\mathrm{d}l\}\mathrm{d}s\int_0^{\varphi(s,u)}G(\varphi(s,u)-z,x)\mathrm{d}F(z), \tag{12}$$

则 t_0 满足不等式 $\varphi(t_0,u) < x$.

定理5 设 $x > 0, 0 \leq u < x$.假设 $F(z)$ 的密度函数 $f(z)$ 在$[0,+\infty)$上连续,

(1) 如果 λ 在$(0,+\infty)$连续,则 $G(u,x)$ 当 $u \in (0,x)$ 时关于 u 有一阶连续导数;

(2) 如果 λ' 在$(0,+\infty)$连续可导,$\varphi(t)$ 在$(0,+\infty)$连续可导,则 $G(u,x)$ 当 $u \in (0,x)$ 时关于 u 二阶可导.

为简单起见，用 $G(u,x)$ 代替 $G(u)$.

定理 6 令 $x > 0, 0 \leqslant u < x$，假设 $F(z)$ 的密度函数 $f(z)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续，λ 在 $(0, +\infty)$ 上连续，$\varphi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可导. 则 $G(u)$ 满足下列积微分方程:

$$G'(u) = \frac{\lambda(u)}{c + ru}G(u) - \frac{\lambda(u)}{c + ru}\int_0^u G(u - z)\mathrm{d}F(z). \qquad (13)$$

定理 7 令 $F(z) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha z}, \alpha > 0$，假设 $\lambda \neq 0$，λ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可导，$\varphi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可导，则 $G(u)$ 满足下列微分方程:

$$G''(u) + (\frac{r}{c + ru} - \frac{\lambda'(u)}{\lambda(u)} + \alpha - \frac{\lambda(u)}{c + ru}G'(u) = 0,$$

$$0 < u < x. \qquad (14)$$

命题 1 令 $x > 0$，如果 $F(z)$ 有连续密度函数 $f(z)$，则 $G(u)$ 在 $(0, x]$ 上连续.

定理 8 令 $F(z) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha z}, \alpha > 0$，假设 $\lambda \neq 0$，λ 是 $(0, +\infty)$ 上的连续可导函数 $\varphi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续可导，则

$$G(u) = \frac{\Phi(u)}{\Phi(x)}\Psi(x) = \frac{1 - \Psi(u)}{1 - \Psi(x)}\Psi(x), \quad 0 \leqslant u \leqslant x. \qquad (15)$$

注 1 如果积微分方程(13)的有界连续解是唯一的，则仍有式(15).

§6 补充与注记

本章结果属于王过京[1]，是他的博士论文中的一章的内容. 原文为英文，由袁成桂和李俊平译成中文，最后经邹捷中整理.

25 马尔可夫骨架过程与风险模型

§1 引言

Davis M.H.A[4] 第 3 章 §3、Paul Embrechts 等[1] 和张春生[1] 用逐段决定马氏过程的方法研究了保险风险模型中的破产概率及破产前后保险公司资产的分布. 本章在侯振挺, 刘再明, 邹捷中[2] 及侯振挺, 刘再明, 邹捷中, 李学伟[1] 的基础上, 介绍了马尔可夫骨架过程的基本概念及其主要结果. 作为马尔可夫骨架过程的应用, 我们将保险风险模型推广到一般的情形. 这种推广的保险风险模型包含 Paul Embrechts 等[1] 和张春生[1] 中讨论的模型作为特殊情况. 对于推广的保险风险模型, 本章给出了破产时间分布的计算公式, 以及在破产时刻前后保险公司资产和破产时间的联合分布的计算公式. 有别于 Davis M.H.A[4], Paul Embrechts 等[1] 和张春生[1], 本文把要计算的有关概率分布归结为求非负方程的最小非负解. 可用迭代的方法具体计算出来.

§2 保险风险模型的推广

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一完备概率空间, $X=\{X(t,\omega),t\geqslant 0\}$是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的右连左极实值随机过程. $\mathscr{B}$表示实数集的 Borelσ-域, $\{\mathscr{F}_t\}$是 X 产生的自然σ-域流.

定义 1 称随机过程 $X = \{X(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 为齐次马尔可夫骨架过程，如果存在一列 $\{\mathscr{F}_t\}$ 停时 $\{\tau_n\}_{n \geqslant 0}$，使得下列两条成立

(i) $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots, \tau_n \uparrow +\infty \quad P - a.e.$ (1)

(ii) 对于每个 τ_n，对任意定义在 $R^{[0,\infty)}$ 上的 $\mathscr{B}^{[0,\infty)}$ 有界可测函数 f，有

$$\mathbf{E}[f(X(\tau_n + \cdot, \omega)) \mid \mathscr{F}_{\tau_n}] =$$

$$\mathbf{E}[f(X(\tau_n + \cdot, \omega)) \mid X(\tau_n)] = \mathbf{E}_{X(\tau_n)}[f(X(\cdot, \omega))], \quad (2)$$

其中，$\mathscr{F}_{\tau_n} = \{A : A \in \mathscr{F}, \forall t \geqslant 0, A \cap \{\tau_n \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t\}$，$\mathbf{E}_x(\cdot)$ 表示条件概率 $P(\cdot \mid X(0) = x)$ 对应的条件数学期望.

定义 2 称齐次马尔可夫骨架过程 $X = \{X(t,\omega), t \geqslant 0\}$ 为推广的保险风险模型，如果对于骨架时序列 $\{\tau_n\}_{n \geqslant 0}$，存在非负可测函数族 $\{h(t,x,A)\}$，$\{g(t,x,A)\}$ 和 $\{\pi(x,A)\}$ 满足下列三条：

(i) $P(X(\tau_n + t) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n > t \mid X(\tau_n), \tau_n, X(\tau_{n-1}) \cdots X(0)) = P(X(\tau_n + t) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n > t \mid X(\tau_n)) = h(t, X(\tau_n), A), \quad t \geqslant 0, A \in \mathscr{B}, n \geqslant 0.$ (3)

(ii) $P(X(\tau_{n+1} - 0) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n), \tau_n, X(\tau_{n-1}), \cdots, X(0)) = P(X(\tau_{n+1} - 0) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n)) = g(t, X(\tau_n), A), \quad t \geqslant 0, A \in \mathscr{B}, n \geqslant 0.$ (4)

(iii) $P(X(\tau_{n+1}) \in A \mid X(\tau_{n+1} - 0), \tau_{n+1}, X(\tau_n), \tau_n, \cdots, X(0)) = P(X(\tau_{n+1}) \in A \mid X(\tau_{n+1} - 0)) = \pi(X(\tau_{n+1} - 0), A), A \in \mathscr{B}, n \geqslant 0.$ (5)

其中 $h(t,x,A)$，$g(t,x,A)$ 和 $\pi(x,A)$ 分别是三元和二元可测函数，当 t 和 x 固定时，关于 $A \in \mathscr{B}$ 是准分布.

特别地，有

$$h(t,x,A) = P(X(t) \in A, \tau_1 > t \mid X(0) = x),$$

$$g(t,x,A) = P(X(\tau_1 - 0) \in A, \tau_1 \leqslant t \mid X(0) = x),$$

$$\pi(x,A) = P(X(\tau_1) \in A \mid X(\tau_1 - 0) = x).$$

以下将推广的保险风险模型简称为保险风险模型. 令

$$P(t,x,A) \triangleq P(X(t) \in A \mid X(0 = x),$$
$$t \geqslant 0, x \in R, A \in \mathscr{B}.$$
$$P_\lambda(x,A) \triangleq \int_0^\infty e^{-\lambda t} P(t,x,A)\mathrm{d}t, \quad \lambda > 0, x \in R, A \in \mathscr{B}.$$

定理 1 $\forall t \geqslant 0, x \in R, A \in \mathscr{B}$,则

$$q(t,x,A) \triangleq P(X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n) = x) \tag{6}$$

与 n 无关,而且

$$q(t,x,A) = \int_R g(t,x,\mathrm{d}y)\pi(y,A). \tag{7}$$

进一步,$\{X(\tau_n)\}_{n\geqslant 0}$ 是离散时间马氏过程,以 $\{q(x,A): x \in R, A \in \mathscr{B}\}$ 为一步转移概率,此处 $q(x,A) = \lim\limits_{t\to\infty} q(t,x,A)$.

证明 由(2)–(5)可知,$\forall t \geqslant 0, A \in \mathscr{B}, n \geqslant 0$.

$$P(X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n), \tau_n, X(\tau_{n-1}), \tau_{n-1}, \cdots, X(0)) =$$
$$\int_R g(t, X(\tau_n), \mathrm{d}y)\pi(y,A) =$$
$$P(X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant t \mid X(\tau_n)).$$

由上式可知定理结论成立.

定理 2 $\{P(t,x,A), t \geqslant 0, x \in R, A \in \mathscr{B}\}$ 是非负方程

$$X(t,x,A) = \int_R \int_0^t \left(\int_R g(\mathrm{d}s,x,\mathrm{d}y)\pi(y,\mathrm{d}z)\right) X(t-s,z,A) + h(t,x,A),$$
$$t \geqslant 0, x \in R, A \in \mathscr{B} \tag{8}$$

的最小非负解,或等价地,$\forall \lambda > 0$, $\{P_\lambda(x,A), x \in R, A \in \mathscr{B}\}$ 是非负方程

$$X(x,A) = \int_R \left(\int_R g_\lambda(x,\mathrm{d}y)\pi(y,\mathrm{d}z)\right) X(z,A) + h_\lambda(x,A),$$
$$x \in R, A \in \mathscr{B} \tag{9}$$

的最小非负解,其中

$$h_\lambda(x,A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}h(t,x,A)dt,$$

$$g_\lambda(x,A)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}g(dt,x,A).\tag{10}$$

证明 见侯振挺,刘再明,邹捷中[4]及侯振挺,刘再明,邹捷中,李学伟[1].

定义 3 设 $X=\{X(t),t\geq 0\}$ 是保险风险模型,$\{\tau_n\}$ 是定义 2 中的停时序列.如果存在 $R\times[0,\infty)$ 上的二元实值可测函数 $f(x,t)$ 满足以下两条件,则称 X 为逐段决定保险风险模型.

(i) $\forall x\in R, f(x,t)$ 关于 t 是右连左极的,$f(x,0)=x$;

(ii) $\forall n\geq 0, X(t,\omega)=f(X(\tau_n),t-\tau_n),\quad \tau_n\leq t<\tau_{n+1}$.

由定义可知,若 X 是逐段决定保险风险模型,则

$$h(t,x,A)=\delta_A(f(x,t))P(\tau_1>t\mid X(0)=x)=$$
$$\delta_A(f(x,t))(1-A_x(t)).\tag{11}$$
$$g(t,x,A)=P(f(x,\tau_1-0)\in A,\tau_1\leq t\mid X(0)=x)=$$
$$\int_0^t\delta_A(f(x,s-0))dA_x(s),\tag{12}$$

其中 $A_x(t)=P(\tau_1\leq t\mid X(0)=x)$.

逐段决定保险风险模型是特殊的保险风险模型,因而定理 1 和定理 2 对逐段决定保险风险模型成立.

显然,文献 Paul Embrechts 等[1]和张春生[1]中讨论的模型是逐段决定保险风险模型的特殊情况.

§3 保险风险模型的破产概率分布计算

Davis M.H.A[4]第 3 章 §3,Paul Embrechts 等[1]和张春生[1]用逐段决定马氏过程的方法研究了一类逐段决定保险风险模型的破产概率.以下我们应用马尔可夫骨架过程的方法来讨论保险风险模型的破产概率分布的计算问题.

设 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是保险风险模型，$d\in R$.令

$$\tau_d=\begin{cases}\inf\{t\geqslant 0,X(t)\leqslant d\}, & \text{此集合非空;}\\ \infty, & \text{以上为空集合.}\end{cases} \tag{1}$$

定义1 τ_d 称为保险风险模型 X 在 d - 水平的破产时间(在不引起误解时，τ_d 简称为破产时间).

由马氏骨架过程的齐次性可知，$\forall\, t\geqslant 0, x>d$ 和 $A\in\mathscr{B}$ 以下定义合理(与 $n\geqslant 0$ 无关).

$$h_d(t,x,A)=P(X(\tau_n+t)\in A,X(\tau_n+s)>d,$$
$$0\leqslant s<t<\tau_{n+1}-\tau_n\mid X(\tau_n)=x)=$$
$$P(X(t)\in A,X(s)>d,0\leqslant s<t<\tau_1\mid X(0)=x) \tag{2}$$
$$g_d(t,x,A)=P(X(\tau_{n+1}-)\in A,X(\tau_n+s)>d,$$
$$0\leqslant s<\tau_{n+1}-\tau_n\leqslant t\mid X(\tau_n)=x)=$$
$$P(X(\tau_1-)\in A,X(s)>d,0\leqslant s<\tau_1\leqslant t\mid X(0)=x) \tag{3}$$
$$q_d(t,x,A)=P(X(\tau_{n+1})\in A,$$
$$X(\tau_n+s)>d,0\leqslant s<\tau_{n+1}-\tau_n\leqslant t\mid X(\tau_n)=x)=$$
$$P(X(\tau_1)\in A,X(s)>d,0\leqslant s<\tau_1\leqslant t\mid X(0)=x)=$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}g_d(t,x,\mathrm{d}y)\pi(y,A). \tag{4}$$

$\forall\,\lambda>0$,令

$$h_d(\lambda,x,A)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}h_d(t,x,A)\mathrm{d}t$$

$$g_d(\lambda,x,A)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}g_d(\mathrm{d}t,x,A).$$

$$q_d(\lambda,x,A)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}q_d(t,x,A)=$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_{-\infty}^{d}g_d(\mathrm{d}t,x,\mathrm{d}y)\pi(y,A).$$

定理1 设 $X(t)$ 是保险风险模型，则 $\forall\, t>0, d\in R, x\in R$，有

$$P(\tau_d>t\mid X(0)=x)=h_d(t,x,(d,\infty))+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_{d+}^{\infty} h_d(t-s,y,(d,\infty))q_d^{*n}(ds,x,dy)$$

或者等价地，$\forall \lambda > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}P(\tau_d > t \mid X(0) = x)dt = h_d(\lambda,x,(d,\infty)) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{d+}^{\infty} h_d(\lambda,y,(d,\infty))q_d^n(\lambda,x,dy),$$

其中

$$q_d^{*1}(t,x,A) = q_d(t,x,A),$$

$$q_d^{*n+1}(t,x,A) =$$

$$\int_0^t\int_{d+}^{\infty} q_d^{*n}(ds,x,dy)q_d(t-s,y,A), \quad n \geqslant 1.$$

$$q_d^1(\lambda,x,A) = q_d(\lambda,x,A),$$

$$q_d^{n+1}(\lambda,x,A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}q_d^{*n+1}(dt,x,A) =$$

$$\int_{d+}^{\infty} q_d^n(\lambda,x,dy)q_d(\lambda,y,A), \quad n \geqslant 1.$$

证明 以下给出证明思路，详细证明类似于侯振挺、刘再明、邹捷中[3]定理1的证明.

$$P(\tau_d > t \mid X(0) = x) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\tau_d > t, \tau_n \leqslant t < \tau_{n+1} \mid X(0) = x) =$$

$$h_d(t,x,(d,\infty)) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} 1_{(X(s)>d,0\leqslant s\leqslant \tau_n\leqslant t)} \cdot$$

$$\mathbf{E}[X(s) > d, \tau_n \leqslant s \leqslant t < \tau_{n+1} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}] \cdot$$

$$P(d\omega \mid X(0) = x) = h_d(t,x,(d,\infty)) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} 1_{(X(s)>d,0\leqslant s\leqslant \tau_n\leqslant t)} \cdot$$

$$\mathbf{E}[X(s) > d, \tau_n \leqslant s \leqslant t < \tau_{n+1} \mid X(\tau_n)]P(d\omega \mid$$

$$X(0) = x) = h_d(t,x,(d,\infty)) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} 1_{\{X(s)>\mathrm{d},0\leqslant s\leqslant \tau_n\leqslant t\}} h_{\mathrm{d}}(t-\tau_n, X(\tau_n), (\mathrm{d},\infty))P(\mathrm{d}\omega \mid$$

$$X(0)=x) = h_{\mathrm{d}}(t,x,(\mathrm{d},\infty)) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_{\mathrm{d}+}^{\infty} q_{\mathrm{d}}^{*n}(x,\mathrm{d}s,\mathrm{d}y)h_{\mathrm{d}}(t-s,y,(\mathrm{d},\infty)),$$

其中最后等号成立,应用了下列关系:

$$q_{\mathrm{d}}^{*n}(x,t,A) =$$

$$P(X(\tau_n)\in A, X(s)>\mathrm{d}, 0\leqslant s<\tau_n\leqslant t \mid X(0)=x). \tag{5}$$

推论 1 $\{\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}P(\tau_{\mathrm{d}}>t \mid X(0)=x)\mathrm{d}t;\quad x\in R, \lambda>0\}$ 是非负方程

$$X(\lambda,x) = \int_{\mathrm{d}+}^{\infty} q_{\mathrm{d}}(\lambda,x,\mathrm{d}y)X(\lambda,y) + h_{\mathrm{d}}(\lambda,x,(\mathrm{d},\infty)),$$

$$\lambda>0, x\in R$$

的最小非负解.

以下讨论在破产时刻前后保险公司资产的概率分布.

定理 2 设 $X(t)$ 是保险风险模型,在$[\tau_n,\tau_{n+1})$上单调不减$(\forall n\geqslant 0)$.则 $\forall u>\mathrm{d}, A\in\mathscr{B}((-\infty,\mathrm{d}])$ 有

$$P(\tau_{\mathrm{d}}\leqslant t, X(\tau_{\mathrm{d}})\in A \mid X(0)=u) = q(t,u,A) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_{\mathrm{d}+}^{\infty} q_{\mathrm{d}}^{*n}(\mathrm{d}s,u,\mathrm{d}y)q(t-s,y,A),$$

或等价地,$\{\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}P(\tau_{\mathrm{d}}\leqslant t, X(\tau_{\mathrm{d}})\in A \mid X(0)=u),\quad \lambda>0, u>\mathrm{d}\}$ 是非负方程

$$X(\lambda,x) = \int_{\mathrm{d}+}^{\infty} q_{\mathrm{d}}(\lambda,x,\mathrm{d}y)X(\lambda,y) + q(\lambda,x,A),$$

$$x>\mathrm{d}, \lambda>0$$

的最小非负解.其中,$q(t,x,A)$,$q_{\mathrm{d}}(t,x,A)$ 如前所定义.

证明 注意 $X(t)$ 在$[\tau_{n-1},\tau_n)$上单调不减$(n=1,\cdots)$.从而

$$P(\tau_{\mathrm{d}}\leqslant t, X(\tau_{\mathrm{d}})\in A \mid X(0)=u) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X(\tau_k) > \mathrm{d}, \quad k = 0,\cdots,n,$$

$$X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} \leqslant t \mid X(0) = u) =$$

$$q(t,u,A) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} \mathbf{E}[X(\tau_k) >$$

$$\mathrm{d}, k = 0,\cdots,n, X(\tau_{n+1}) \in A, \tau_{n+1} - \tau_n \leqslant$$

$$t - \tau_n \mid \tau_k, X(\tau_k), k = 0,\cdots,n] P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = u) =$$

$$q(t,u,A) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega} 1_{(\tau_n \leqslant t)} \cdot$$

$$1_{(X(\tau_k) > \mathrm{d}, k=0,\cdots,n)} \cdot$$

$$q(t - \tau_n, X(\tau_n), A) P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = u) = q(t,u,A) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathrm{d}+}^{\infty}\int_0^t q_{\mathrm{d}}^{*n}(\mathrm{d}s, u, \mathrm{d}y) q(t - s, y, A).$$

推论 2 $\forall u > \mathrm{d}$,有

$$P(\tau_{\mathrm{d}} \leqslant t \mid X(0) = u) = q(t,u,(-\infty,\mathrm{d}]) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathrm{d}+}^{\infty}\int_0^t q_{\mathrm{d}}^{*n}(\mathrm{d}s, u, \mathrm{d}y) q(t - s, y, (-\infty,\mathrm{d}]).$$

定理 3 设 $X(t)$ 是保险风险模型,在$[\tau_n,\tau_{n+1})$上单调不减($\forall n \geqslant 0$),则 $\forall u > \mathrm{d}, A \in \mathscr{B}((\mathrm{d}, +\infty))$,有

$$P(\tau_{\mathrm{d}} \leqslant t, X(\tau_{\mathrm{d}} -) \in A \mid X(0) = u) =$$

$$\int_A g(t,u,\mathrm{d}z)\pi(z,(-\infty,\mathrm{d}]) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_{\mathrm{d}+}^{\infty}\left[\int_A g(t - s, y, \mathrm{d}z)\pi(z,(-\infty,\mathrm{d}])\right] \cdot$$

$$q_{\mathrm{d}}^{*n}(\mathrm{d}s, u, \mathrm{d}y),$$

或等价地,$\{\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}P(\tau_{\mathrm{d}} \leqslant t, X(\tau_{\mathrm{d}} -) \in A \mid X(0) = u), u > \mathrm{d}, \lambda > 0\}$ 是非负方程

$$X(\lambda, x) = \int_{\mathrm{d}+}^{\infty} q_{\mathrm{d}}(\lambda, x, \mathrm{d}y) X(\lambda, y) +$$

$$\int_A g(\lambda, u, \mathrm{d}z)\pi(z,(-\infty,\mathrm{d}])$$

的最小非负解. 其中, $g(t,x,A)$, $q_\mathrm{d}(t,x,A)$ 等如前所述.

证明 类似于定理2的证明,有

$$P(\tau_\mathrm{d} \leqslant t, X(\tau_\mathrm{d}-) \in A \mid X(0) = u) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X(\tau_k) > \mathrm{d}, \quad k = 0,\cdots,n,$$

$$X(\tau_{n+1}-0) \in A, X(\tau_{n+1}) \leqslant \mathrm{d}, \tau_{n+1} \leqslant t \mid X(0) = u) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega 1_{(X(\tau_k)>\mathrm{d}, k=0,\cdots,n, \tau_n \leqslant t)} \cdot$$

$$\mathbf{E}[X(\tau_{n+1}-0) \in A, \tau_{n+1} \leqslant t, X(\tau_{n+1}) \leqslant$$

$$\mathrm{d} \mid \tau_k, X(\tau_k), k = 0,\cdots,n] P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = u) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega 1_{(X(\tau_k)>\mathrm{d}, k=0,\cdots,n, \tau_n \leqslant t)} \cdot$$

$$\mathbf{E}\{X(\tau_{n+1}-0) \in A, \tau_{n+1} \leqslant t, \mathbf{E}[X(\tau_{n+1}) \leqslant \mathrm{d}$$

$$\mid \tau_{n+1}, X(\tau_{n+1}-0), \tau_k, X(\tau_k), k = 0,\cdots,n]$$

$$\mid \tau_k, X(\tau_k), k = 0,\cdots,n\} P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = u) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega 1_{(X(\tau_k)>\mathrm{d}, k=0,\cdots,n, \tau_n \leqslant t)} \cdot$$

$$\mathbf{E}\{X(\tau_{n+1}-0) \in A, \tau_{n+1} \leqslant t, \pi(X(\tau_{n+1}-0),(-\infty,\mathrm{d}])$$

$$\mid \tau_k, X(\tau_k), k = 0,\cdots,n\} P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = u) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega 1_{(X(\tau_k)>\mathrm{d}, k=0,\cdots,n, \tau_n \leqslant t)} \cdot$$

$$\int_A g(t-\tau_n, X(\tau_n), \mathrm{d}z)\pi(z,(-\infty,\mathrm{d}]) P(\mathrm{d}\omega \mid X(0) = u) =$$

$$\int_A g(t, u, \mathrm{d}z)\pi(z,(-\infty,\mathrm{d}]) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_{\mathrm{d}+}^{\infty} \left[\int_A g(t-s, y, \mathrm{d}z)\pi(z,(-\infty,\mathrm{d}])\right] \cdot q_\mathrm{d}^{*n}(\mathrm{d}s, u, \mathrm{d}y).$$

§4　两个典型模型

4.1.　经典保险风险模型

设$\{N_t;t\geqslant 0\}$是具有速率$\mu>0$的Poisson过程. $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$是与$\{N_t;t\geqslant 0\}$独立的$i.i.$d随机变量序列,具有分布函数$G(x)$,其中$G(0)=0,m=\int_R x\mathrm{d}G(x)$有限.令

$$S_t=\sum_{n=1}^{N_t}Y_n,\quad t\geqslant 0.$$

$$x_t=u+ct-S_t,\quad t\geqslant 0. \tag{1}$$

称$\{x_t;t\geqslant 0\}$为经典保险风险模型,其中,$u>0$为保险公司的初始资产,$c>0$是不发生索赔时期保险公司的收益率,τ_{d}(按(3.1)定义)称为d水平的破产时刻.

显然,Y_n表示第n次索赔的额度,S_t表示$[0,t)$内索赔的总额.令τ_n表示Piosson过程$\{N_t\}$的第n次发生时刻($\tau_0=0$).

定理1　按(1)定义的$\{x_t,t\geqslant 0\}$是逐段决定保险风险模型,在$[\tau_n,\tau_{n+1})$上单调增加($\forall n\geqslant 0$).因此,定理3.1,定理3.2和定理3.3均成立,其中

$$h(t,x,A)=\delta_A(x+ct)\mathrm{e}^{-\mu t},$$

$$g(t,x,A)=\mu\int_0^t\delta_A(x+cs)\mathrm{e}^{-\mu s}\mathrm{d}s,$$

$$\pi(x,A)=G(x-A).$$

$\forall \mathrm{d}<x$还有

$h_{\mathrm{d}}(t,x,(\mathrm{d},\infty))=$

$P(X(t)>\mathrm{d},X(s)>\mathrm{d},0\leqslant s<t<\tau_1\mid X(0)=x)=\mathrm{e}^{-\mu t}.$

$h_{\mathrm{d}}(\lambda,x,(\mathrm{d},\infty))=\dfrac{1}{\lambda+\mu}g_{\mathrm{d}}(t,x,(-\infty,y])=$

$$P(X(\tau_1 - 0) \leqslant y, X(s) > d, 0 \leqslant s < \tau_1 \leqslant t \mid X(0) = x) =$$
$$P(x + c\tau_1 \leqslant y, \tau_1 \leqslant t \mid X(0) = x) =$$
$$1 - e^{-\mu(t \wedge \frac{y-x}{c})}, \quad y \geqslant x.$$
$$q_d(t, x, (-\infty, y)) =$$
$$\int_x^{x+ct} g_d(t, x, dz)\pi(z, (-\infty, y)) =$$
$$\int_x^{x+ct} d(1 - e^{-\mu\frac{z-x}{c}})G((z - y, \infty)) =$$
$$\int_0^t \mu e^{-\mu z}G((x + cz - y, \infty))dz =$$
$$\int_0^t \mu e^{-\mu z}(1 - G(x - y + cz))dz$$
$$q_d(\lambda, x, (-\infty, y)) =$$
$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}dq_d(t, x, (-\infty, y)) =$$
$$\int_0^\infty \mu e^{-(\lambda+\mu)t}(1 - G(x - y + ct))dt.$$

4.2. 随机扰动保险模型

设$\{N_t; t \geqslant 0\}$, $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ 和$\{S_t, t \geqslant 0\}$ 与经典保险模型相同，又设$\{B_t; t \geqslant 0\}$ 是与$\{N_t; t \geqslant 0\}$ 和$\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ 独立的标准 Brown 运动($B_0 = 0$).令

$$x_t = u + ct + B_t - S_t, \tag{2}$$

称$\{x_t; t \geqslant 0\}$ 为带随机扰动的保险模型.$\{\tau_n\}$ 仍表示 Poisson 过程$\{N_t\}$ 的发生时刻序列.

定理2 按(2)定义的$\{x_t, t \geqslant 0\}$ 是保险风险模型,因此,定理3.1和推论3.1成立,其中

$$h(t, x, A) = P(X(t) \in A, t < \tau_1 \mid X(0) = x) =$$
$$P(x + ct + B_t \in A) \cdot P(\tau_1 > t) =$$

$$e^{-\mu t}\cdot\int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2}(y-x-ct)^2} dy.$$

$$g(t,x,A) = P(X(\tau_1-0)\in A, \tau_1 \leqslant t \mid X(0)=x) =$$

$$P(x + c\tau_1 + B_{\tau_1} \in A, \tau_1 \leqslant t \mid X(0)=x) =$$

$$\int_0^t \left[\int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{1}{2}(y-x-cs)^2} dy\right] \mu e^{-\mu s} ds.$$

$\forall x > \mathrm{d}$,

$$h_{\mathrm{d}}(t,x,A) = P(X(s) > \mathrm{d}, X(t) \in$$

$$A, 0 \leqslant s < t < \tau_1 \mid X(0)=x) =$$

$$P(x + cs + B_s > \mathrm{d}, 0 \leqslant s < t, x + ct + B_t \in A)\cdot$$

$$P(t < \tau_1) =$$

$$e^{-\mu t} P(x + cs + B_s > \mathrm{d}, 0 \leqslant s < t, x + ct + B_t \in A)$$

$$g_{\mathrm{d}}(t,x,A) = P(X(s) > \mathrm{d}, 0 \leqslant s < \tau_1, X(\tau_1 - 0) \in$$

$$A, \tau_1 \leqslant t \mid X(0)=x) =$$

$$P(x + cs + B_s > \mathrm{d}, 0 \leqslant s < \tau_1, x +$$

$$c\tau_1 + B_{\tau_1} \in A, \tau_1 \leqslant t \mid X(0)=x) =$$

$$\int_0^t P(x + cl + B_l > \mathrm{d}, 0 \leqslant l < s, x + cs +$$

$$B_s \in A)\mu e^{-\mu s} ds = \int_0^t h_{\mathrm{d}}(s,x,A)\mu ds.$$

$$q_{\mathrm{d}}(t,x,(-\infty,y)) =$$

$$\int_{\mathrm{d}+}^{\infty} g_{\mathrm{d}}(t,x,\mathrm{d}z)\pi(z,(-\infty,y)) =$$

$$\int_{\mathrm{d}+}^{\infty}\int_0^t h_{\mathrm{d}}(s,x,\mathrm{d}z) G((z-y,\infty)) ds =$$

$$\mu\int_0^t\int_{\mathrm{d}+}^{\infty} [1 - G(z-y)] h_{\mathrm{d}}(s,x,\mathrm{d}z) ds.$$

§5　补充与注记

本章结果属于刘再明、侯振挺[1].

第8篇

应用之四:排队论

26 排队论

§1 输入过程(独立同分布情形)的分布和各阶矩

排队论中涉及到的第一个随机过程就是(顾客的)输入过程，输入过程各式各样，但最引人瞩目的一般独立输入过程，即各个顾客的到达时间间隔相互独立，相同分布的情形．此分布的分布函数记为 $G(t)$，在 $[0,t]$ 内到达的顾客数目记为 $N(t)$．当 $G(t)$ 为负指数分布时，$N(t)$ 为特殊的齐次可列马尔可夫过程——普哇松过程，也只有 $G(t)$ 是负指数分布时，$N(t)$ 才是马氏过程．在一般情形下 $N(t)$ 是一个半马氏过程．本章的目的是利用作者在半马尔可夫过程方面的结果，分别给出 $N(t)$ 概率分布的明显表达式及 $N(t)$ 的各阶矩的计算方法．令

$$P_{ij}(t) = P(N(t) = j \mid N(0) = i). \tag{1}$$

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{ij}(t)\mathrm{d}t. \tag{2}$$

$$\hat{G}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t)\mathrm{d}t. \tag{3}$$

定理 1

$$\hat{P}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0, & j < i; \\ \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}\hat{G}(\lambda), & j = i; \\ \dfrac{1}{\lambda}\hat{G}^{j-i}(\lambda) - \dfrac{1}{\lambda}\hat{G}^{j-i+1}(\lambda), & j > i. \end{cases} \tag{4}$$

从而

$$P_{ij}(t)=\begin{cases}0, & j<i;\\ 1-G(t), & j=i;\\ \hat{G}^{(j-i)}(t)-\hat{G}^{(j-i+1)}(t), & j>i.\end{cases} \tag{5}$$

其中 $\hat{G}^{(n)}(t)$ 表示 $G(t)$ 的 n 重卷积.

证明 由于 $N(t)$ 是一个半马氏过程,所以,根据定理 13.2.2 知,$\{\hat{P}_{ij}(\lambda), j\in E\}$ 是半马氏过程的向前方程

$$x_j=\sum_{k\in E}x_k\frac{\hat{q}_{kj}(\lambda)h_j(\lambda)}{h_k(\lambda)}+h_{ij}(\lambda)\quad (j\in E) \tag{6}$$

的最小非负解,此时

$$\hat{q}_{ij}(\lambda)=\delta_{i+1j}\hat{G}(\lambda), \tag{7}$$

$$h_{ij}(\lambda)=\delta_{ij}\frac{1-\hat{G}(\lambda)}{\lambda}, \tag{8}$$

$$h_i(\lambda)=\frac{1-\hat{G}(\lambda)}{\lambda}. \tag{9}$$

于是向前方程(6)变成

$$x_j=\begin{cases}0, & j<i;\\ \dfrac{1-\hat{G}(\lambda)}{\lambda}, & j=i;\\ x_{j-1}\hat{G}(\lambda), & j>i.\end{cases} \tag{10}$$

解方程(10)立得定理 1.

下面举些例子.

1. $G(t)$ 服从 $\Gamma(q,r)$ – 分布($q>0, r>0$)

这时 $G(t)$ 的密度函数

$$f_{q,r}(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{q^r}{\Gamma(r)}t^{r-1}e^{-qt}, & t\geqslant 0.\end{cases} \tag{11}$$

其中 $\Gamma(r)=\int_0^\infty t^{r-1}e^{-t}dt$.于是

$$\hat{G}(\lambda)=\frac{q^r}{(\lambda+q)^r}. \tag{12}$$

由定理1立得

定理2 若 $G(t)$ 服从 $\Gamma(q,r)$ – 分布,则

$$\hat{p}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}0, & j<i;\\ \dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{q}{\lambda+q}\right)^{r}, & j=i;\\ \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{q}{\lambda+q}\right)^{r(j-i)}-\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{q}{\lambda+q}\right)^{r(j-i+1)}, & j>i.\end{cases} \tag{13}$$

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}0, & j<i;\\ 1-\displaystyle\int_0^t f_{q,r}(s)\mathrm{d}s, & j=i;\\ \displaystyle\int_0^t f_{q,r(j-i)}(s)\mathrm{d}s-\int_0^t f_{q,r(j-i+1)}(s)\mathrm{d}s, & j<i.\end{cases} \tag{14}$$

2. $G(t)$ 服从参数为 q 的 k – 阶爱尔朗分布

周知,当 r 为正整数 k 时,$\Gamma(q,k)$ – 分布就变成 k – 阶爱尔朗分布.于是由(13)和(14)得

定理3 若 $G(t)$ 服从参数为 q 的 k – 阶爱尔朗分布,则

$$\hat{p}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}0, & j<i;\\ \dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1}{\lambda+q}\right)^{k}, & j=i;\\ \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{q}{\lambda+q}\right)^{k(j-i)}-\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{q}{\lambda+q}\right)^{k(j-i+1)}, & j>i.\end{cases} \tag{15}$$

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}0, & j<i;\\ \mathrm{e}^{-qt}\displaystyle\sum_{s=0}^{k}\frac{(qt)^s}{s!}, & j=i;\\ \mathrm{e}^{-qt}\displaystyle\sum_{s=k(j-i)}^{k(j-i+1)}\frac{(qt)^s}{s!}, & j>i.\end{cases} \tag{16}$$

3. $G(t)$ 服从参数为 q 的负指数分布

周知,1 – 阶爱尔朗分布就是负指数分布,故由(15)和(16)立得.

定理4 若 $G(t)$ 服从参数为 q 的负指数分布,则

$$p(\lambda)=\begin{cases}0, & j<i;\\ \dfrac{1}{\lambda+q}, & j=i;\\ \dfrac{1}{\lambda+q}\left(\dfrac{q}{\lambda+q}\right)^{j-i}, & j>i\end{cases}\tag{17}$$

$$p(t)=\begin{cases}0, & j<i\\ e^{-qt}, & j=i;\\ e^{-qt}\dfrac{(qt)^{j-i}}{(j-i)!}, & j>i.\end{cases}\tag{18}$$

4. $G(t)$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布

这时 $G(t)$ 密度函数

$$f_n(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}t^{n/2-1}e^{-t/2}, & t\geqslant 0.\end{cases}\tag{19}$$

其中 n 为正整数,由于

$$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}t^{n/2-1}e^{-t/2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n/2}}{\Gamma(n/2)}t^{n/2-1}e^{-t/2}\tag{20}$$

故这时 $G(t)$ 服从参数为 $\Gamma(1/2,n/2)$ – 分布.于是有

定理 5 若 $G(t)$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布,则

$$\hat{p}_{ij}(t)=\begin{cases}0, & j<i;\\ \dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1/2}{\lambda(\lambda+1/2)}\right)^{n/2}, & j=i;\\ \dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1/2}{\lambda+1/2}\right)^{n(j-i)/2}-\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{1/2}{\lambda+1/2}\right)^{n(j-i+1)/2}, & j>i.\end{cases}\tag{21}$$

$$p_{ij}(t)=\begin{cases}0, & j<i;\\ 1-\displaystyle\int_0^t f_{1/2,n/2}(s)ds, & j=i;\\ \displaystyle\int_0^t f_{1/2,n(j-i)/2}(s)ds-\int_0^t f_{1/2,n(j-i+1)/2}(s)ds, & j>i.\end{cases}\tag{22}$$

5. $G(t)$ 服从 $[0,h]$ 上的均匀分布

这时 $G(t)$ 的密度函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0 \text{或} t>h;\\ 1/h, & t\in[0,h].\end{cases} \tag{23}$$

$$G'(\lambda)=\frac{1}{\lambda h}(1-e^{-\lambda h}). \tag{24}$$

故得

定理 6 若 $G(t)$ 服从$[0,h]$上的均匀分布,则

$$\hat{p}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}0, & j<i;\\ \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}(\frac{1-e^{-\lambda h}}{\lambda h}), & j=i;\\ \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}(\frac{1-e^{\lambda h}}{\lambda h})^{j-i}-\frac{1}{\lambda}(\frac{1-e^{\lambda h}}{\lambda h})^{j-i+1}; & j>i.\end{cases} \tag{25}$$

$$p_{ij}(t)=$$

$$\begin{cases}0, & j<i;\\ 1-\frac{1}{\lambda}(tI_{[0,\infty)}(t)-(t-h)I_{[h,\infty)}(t)), & j=i;\\ \frac{1}{(j-i)!h^{j-i}}\sum_{k=0}^{j-i}(-1)^k(t-kh)^{j-i}C_{j-i}^kI_{[kh,\infty)}(t)-\\ -\frac{1}{(j-i+1)!h^{j-i+1}}\sum_{k=0}^{j-i+1}(-1)^k(t-kh)^{j-i+1}C_{j-i+1}^kI_{[kh,\infty)}(t), & j>i.\end{cases} \tag{26}$$

以上我们讨论的都是连续情形,以下我们讨论离散情形.

以 θ 表示两个相邻顾客到达时间间隔,假定 θ 只取正整值.

6. $G(t)$ 服从一个离散分布

设

$$P(\theta=k)=a_k, k\geq 1, a_k\geq 0, \sum_{k=1}^{\infty}a_k=1. \tag{27}$$

从而

$$\hat{G}(x)=\sum_{k=1}a_k e^{-\lambda k}. \tag{28}$$

$$\hat{G}^s(x)=\sum_{k=s}^{\infty}e^{-\lambda k}(\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_s=k}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_s}).$$

故有

定理 7 若 $G(t)$ 服从离散分布(27),则

$$
p_{ij}(\lambda)=\begin{cases}0, & j<i;\\ \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}a_k e^{-\lambda k}, & j=i;\\ \frac{1}{\lambda}\sum_{k=j-i}^{\infty}e^{-\lambda k}\Big(\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{j-i}=k}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_{j-i}}\Big)- & \\ -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=j-i+1}^{\infty}e^{-\lambda k}\Big(\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{j-i+1}=k}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_{j-i+1}}\Big), & j>i.\end{cases}
$$

(29)

$$
p_{ij}(t)=\begin{cases}0, & j<i;\\ 1-\sum_{k=1}^{[t]}a_k, & j=i;\\ \sum_{k=j-i}^{[t]}\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_{j-i}=k}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}- & \\ \sum_{k=j-i+1}^{[t]}\sum_{k_1+\cdots+k_{j-i+1}=k}a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_{j-i+1}}, & j>i.\end{cases} \tag{30}
$$

7. $G(t)$ 服从几何分布

设

$$
a_k=pq^{k-1}, k\geqslant 1, p>0, q>0, p+q=1. \tag{31}
$$

于是由(29)和(30)得,

定理 8 若 $G(t)$ 服从几何分布(31),则

$$
\hat{p}_{ij}(\lambda)=\begin{cases}0, & j<i;\\ \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda k}pq^{k-1}, & j=i;\\ \frac{1}{\lambda}\sum_{k=j-i}^{\infty}e^{-\lambda k}C_{k-1}^{j-i-1}p^{j-i}q^{k-(j-i)}- & \\ \frac{1}{\lambda}\sum_{k=j-i+1}^{\infty}e^{-\lambda k}C_{k-1}^{j-i}p^{j-i+1}q^{k-(j-i)}, & j>i.\end{cases} \tag{32}
$$

$$
p_{ij}(t) = \begin{cases} 0, \quad j < i; \\ 1 - \sum\limits_{k=1}^{[t]} pq^{k-1}, \quad j = i; \\ \sum\limits_{k=j-i}^{[t]} C_{k-1}^{j-i-1} P^{j-i} q^{k-(j-i)} - \\ \sum\limits_{k=j-i+1}^{[t]} C_{k-1}^{j-i} p^{j-i+1} q^{k-(j-i+1)}, \quad j > i. \end{cases} \tag{33}
$$

8. $G(t)$ 服从普瓦松分布

设

$$
a_k = e^{-q} \frac{q^{k-1}}{(k-1)!}, \quad k \geqslant 1, q > 0. \tag{34}
$$

于是得,

定理 9 若 $G(t)$ 服从普瓦松分布(34),则

$$
\hat{P}(\lambda) =
$$

$$
\begin{cases} 0, \quad j < i; \\ \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-q}}{\lambda} \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k} \frac{q^{k-1}}{(k-1)!}, \quad j = i; \\ \frac{e^{-q(j-i)}}{\lambda} \sum\limits_{k=j-i}^{\infty} e^{-\lambda k} \frac{q^{k-(j-i)}}{(k-(j-i))!} (j-i)^{k-(j-i)} - \\ - \frac{e^{q(j-i+1)}}{\lambda} \sum\limits_{k=j-i+1}^{\infty} e^{-\lambda k} \frac{q^{k-(j-i+1)}}{(k-(j-i+1))!} (j-i+1)^{k-(j-i+1)}, \quad j > i. \end{cases} \tag{35}
$$

$$
P_{ij}(t) =
$$

$$
\begin{cases} 0, \quad j < i; \\ 1 - e^{-q} \sum\limits_{k=1}^{[t]} \frac{q^{k-1}}{(k-1)!}, \quad j = i; \\ e^{-q(j-i)} \sum\limits_{k=j-i}^{[t]} \frac{q^{k-(j-i)}}{(k-(j-i))!} (j-i)^{k-(j-i)} - \\ - e^{-q(j-i+1)} \sum\limits_{k=j-i+1}^{[t]} \frac{q^{k-(j-i+1)}}{(k-(j-i+1))!} (j-i+1)^{k-(j-i+1)}, \quad j > i. \end{cases} \tag{36}
$$

9. $G(t)$ 服从二项分布

设

$$a_k = C_{m-1}^{k-1} p^{k-1} q^{m-k}, \quad k = 1,2,\cdots,m. \tag{37}$$

定理 10 若 $G(t)$ 服从分布(37),则

$$\hat{p}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0, \quad j < i; \\ \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=1}^{m} \mathrm{e}^{-\lambda k} C_{m-1}^{k-1} p^{k-1} q^{m-k}, \quad j = i; \\ \dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=j-i}^{m(j-i)} \mathrm{e}^{-\lambda k} C_{(m-1)(j-i)}^{k-(j-i)} p^{k-(j-i)} q^{m(j-i)-k} - \\ -\dfrac{1}{\lambda}\sum\limits_{k=j-i+1}^{m(j-i+1)} \mathrm{e}^{-\lambda k} C_{(m-1)(j-i+1)}^{k-(j-i+1)} p^{k-(j-i+1)} q^{m(j-i)-k}, \quad j > i. \end{cases} \tag{38}$$

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} 0, \quad j < i; \\ 1 - \sum\limits_{k=1}^{[t]\wedge m} C_{m-1}^{k-1} p^{k-1} q^{m-k}, \quad j = i; \\ \sum\limits_{k=j-i}^{[t]\wedge m(j-i)} C_{(m-1)(j-i)}^{k-(j-i)} p^{k-(j-i)} q^{m(j-i)-k} - \\ -\sum\limits_{k=j-i+1}^{[t]\wedge m(j-i+1)} C_{(m-1)(j-i+1)}^{k-(j-i+1)} p^{k-(j-i+1)} q^{m(j-i+1)-k}, \quad j > i. \end{cases} \tag{39}$$

证明 由(37)得

$$\hat{G}(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{e}^{-\lambda k} C_{m-1}^{k-1} p^{k-1} q^{m-k} = \mathrm{e}^{-\lambda}(p\mathrm{e}^{-\lambda} + q)^{m-1},$$

$$\hat{G}^s(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda s}(p\mathrm{e}^{-\lambda} + q)^{(m-1)s} =$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda s}\sum_{k=0}^{(m-1)s} \mathrm{e}^{-\lambda k} C_{(m-1)s}^{k} p^k q^{(m-1)s-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{(m-1)s} \mathrm{e}^{-\lambda(s+k)} C_{(m-1)s}^{k} p^k q^{(m-1)s-k} =$$

$$\sum_{r=s}^{ms} \mathrm{e}^{-\lambda r} C_{(m-1)s}^{r-s} p^{r-s} q^{ms-r} = \sum_{k=s}^{ms} \mathrm{e}^{-\lambda k} C_{(m-1)s}^{k-s} p^{k-s} q^{ms-k}. \tag{40}$$

由(40)立得我们的定理.

10. $G(t)$ 服从在 m 个整点 $\{1,2,\cdots,m\}$ 上的均匀分布

设

$$a_k = \frac{1}{m}, \quad k = 1,2,\cdots,m. \tag{41}$$

易证

定理 11 若 $G(t)$ 服从均匀分布(41),则

$$\hat{p}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0, & j < i; \\ \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda m}\sum_{k=1}^{m} e^{-\lambda k}, & j = i; \\ \dfrac{1}{\lambda m^{j-i}}\sum_{k=j-i}^{m(j-i)} e^{-\lambda k} v(m,j-i,k) - \\ \quad \dfrac{1}{\lambda m^{j-i+1}}\sum_{k=j-i+1}^{m(j-i+1)} e^{-\lambda k} v(m,j-i+1,k), & j > i. \end{cases} \tag{42}$$

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} 0, & j < i; \\ 1 - \dfrac{[t] \wedge m}{m}, & j = i; \\ \dfrac{1}{m^{j-i}}\sum_{k=j-i}^{[t]\wedge m(j-i)} v(m,j-i,k) - \\ \quad \dfrac{1}{m^{j-i+1}}\sum_{k=j-i+1}^{[t]\wedge m(j-i+1)} v(m,j-i+1,k), & j > i. \end{cases} \tag{43}$$

其中

$$v(m,s,k) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_s = k \\ 1 \leqslant k_r \leqslant m (1 \leqslant r < s)}} 1 \tag{44}$$

可由下列递推公式唯一决定:

$$v(m,1,k) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant k \leqslant m; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{45}$$

$$v(m,s,k) = \sum_{l=1}^{m} v(m,s-1,k-l). \tag{46}$$

令

$$M(t) = \mathbf{E}(N(t) \mid N(0) = 0); \tag{47}$$

$$M_i(t) = \mathbf{E}(N(t) \mid N(0) = i), \quad i = 0,1,\cdots \tag{48}$$

$$M^{(p)}(t) = \mathbf{E}(N(t)^p \mid N(0) = 0), \quad p = 1,2,\cdots \tag{49}$$

$$M_i^{(p)}(t) = \mathbf{E}((N(t)^p \mid N(0) = i), \quad i = 0,1,\cdots,p = 1,2,\cdots \tag{50}$$

于是

$$M_0^{(1)}(t) = M^{(1)}(t) = M_0(t) = M(t). \tag{51}$$

定理 12 $M(t) < +\infty$,且 $M(t)$ 是方程

$$M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-s)\mathrm{d}G(s) \tag{52}$$

的唯一解.于是有

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{G}^{(n)}(t). \tag{53}$$

证明 对(52)两端取拉氏变换得

$$\hat{M}(\lambda) = \hat{M}(\lambda)\hat{G}(\lambda), \tag{54}$$

所以

$$\hat{M}(\lambda) = \frac{1}{1-\hat{G}(\lambda)}. \tag{55}$$

于是,由逆拉氏变换的唯一性立得方程(52)的解的唯一性.由过程在 τ_1 的马氏性并注意到 $M_1(t) = 1 + M(t)$ 立得

$$\begin{aligned}
&M(t) = \int_0^t M_1(t-s)\mathrm{d}G(s) = \\
&\int_0^t M_1(t-s)\mathrm{d}G(s) = \int_0^t (1 + M(t-s)\mathrm{d}G(s) = \\
&\int_0^t \mathrm{d}G(s) + \int_0^t M(t-s)\mathrm{d}G(s) = \\
&G(t) + \int_0^t M(t-s)\mathrm{d}G(s).
\end{aligned} \tag{56}$$

故 $M(t)$ 满足方程(52).于是由零初始迭代法立得此证.

定理 13 $M^{(p)}(t) < +\infty$,且 $M^{(p)}(t)$ 是方程

$$\begin{aligned}
&M^{(p)}(t) = \\
&\sum_{l=0}^{p-1} C_p^l M^{(l)}(t-s)\mathrm{d}G(s) + \int_0^p M^{(p)}(t-s)\mathrm{d}G(s)
\end{aligned} \tag{57}$$

的唯一解.

证明　唯一性.由逆拉氏变换的唯一性立得(57)解的唯一性.

由

$$M_1^{(p)}(t) = \mathbf{E}((N(t))^p \mid N(0) = 1) =$$

$$\mathbf{E}((1 + N(t))^p \mid N(0) = 0) = \sum_{l=0}^{p} C_p^l M^{(l)}(t), \qquad (58)$$

及过程在 τ_1 的马氏性得

$$M^{(p)}(t) = \int_0^t M_1^{(p)}(t - s)\mathrm{d}G(s) =$$

$$\int_0^t \sum_{l=0}^{p} C_p^l M^{(l)}(t - s)\mathrm{d}G(s) =$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} C_p^l \int_0^t M^{(l)}(t - s)\mathrm{d}G(s) + \int_0^t M^{(p)}(t - s)\mathrm{d}G(s). \qquad (59)$$

故 $M^{(p)}(t)$ 满足方程(57).至此,定理得证.

定理 14　若 $k \geqslant 1$,则 $M_i^{(p)}(t) < +\infty$,且

$$M_i^{(p)}(t) = \sum_{l=0}^{p} C_p^l i^{p-l} M^{(l)}(t). \qquad (60)$$

证明

$$M_i^{(p)}(t) = \mathbf{E}(((N(t))^p \mid N(0) = i) =$$

$$\mathbf{E}((i + N(t))^p \mid N(0) = 0) =$$

$$\mathbf{E}(\sum_{l=0}^{p} C_p^l i^{p-l}(N(t))^l \mid N(0) = 0) =$$

$$\sum_{l=0}^{p} C_p^l i^{p-l}\mathbf{E}(N(t))^{(l)} \mid N(0) = 0) = \sum_{l=0}^{p} C_p^l i^{p-l} M^{(l)}(t). \qquad (61)$$

利用上述三个定理,可以把上面所研究的各个随机过程的分布的各阶矩计算出来.此处不赘.

§2 输入过程的分布(成批到达情形)

在 §1 中对顾客到达时间间隔相互独立同分布的情形,研究了输入过程 $N(t)$,给出了 $N(t)$ 的概率分布及各阶矩的计算方法的明显表达式,并举了一些有意义的特殊例子,以示所得结果的应用.本文把 §1 中的"在每个顾客的到达点(时刻)上只有一个顾客到达"的假定放宽为"在每个顾客的到达点上到达的顾客数目是一个随机变量,且这些随机变量相互独立且具有相同的分布.在新的假定下给出了输入过程 $N(t)$ 的概率分布及其拉氏变换的明显表达式.

设顾客到达时刻 $t_1,t_2,\cdots$ 之间的间隔 $\tau_i = t_{i+1} - t_i(i = 0,1,2,\cdots,t_0 \equiv 0)$ 是独立同分布的随机变量,其分布函数记为 $G(t)$,即

$$P(\tau_i \leqslant t) \equiv G(t),\quad i = 0,1,2,\cdots \tag{1}$$

但在每一个到达时刻不一定只来一个顾客,而可能是来一批顾客,其数目是一个随机变量.设第 $i(i = 0,1\cdots)$ 批到达顾客数目 x_i,诸 x_i 相互独立,且具有相同的分布,且与诸 $\tau_i(i = 0,1,\cdots)$ 相互独立.令

$$P(x_i = k) = f_k \quad (k - 1,2,\cdots), \tag{2}$$

于是

$$f_k \geqslant 0,\quad \sum_{k=1}^{\infty} f_k = 1. \tag{3}$$

以 $N(t)$ 表示在$[0,t)$ 内到达的顾客数.令

$$p_{ij}(t) = P(N(t) = j \mid N(0) = i), \tag{4}$$

$$\hat{p}_{ij}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p_{ij}(t)\mathrm{d}t, \tag{5}$$

$$\hat{G}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\mathrm{d}G(t), \tag{6}$$

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k, \tag{7}$$

$$v_i(\lambda, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{p}_{ik}(\lambda) z^k. \tag{8}$$

定理 1

$$v_i(\lambda, z) = \frac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda(1 - \hat{G}(\lambda) F(z))} z^i \quad (|z| < 1). \tag{9}$$

证明 显然 $N(t)$ 是一个半马氏过程,所以 $\{\hat{p}_{ij}(\lambda), j = 0, 1, \cdots\}$ 是向前方程

$$x_j = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \frac{\hat{q}_{kj}(\lambda) h_j(\lambda)}{h_k(\lambda)} + h_{ij}(\lambda), \quad (j = 0, 1, \cdots) \tag{10}$$

的最小非负解,其中

$$\hat{q}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0, & j \leqslant i; \\ \hat{G}(\lambda) f_{j-i}, & j > i. \end{cases} \tag{11}$$

$$h_{ij}(\lambda) = \delta_{ij} \frac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda}, \tag{12}$$

$$h_i(\lambda) = \frac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda}. \tag{13}$$

于是向前方程变成

$$x_j = \sum_{k=0}^{j-1} x_k \hat{G}(\lambda) f_{j-k} + \delta_{ij} \frac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda}, \tag{14}$$

故

$$\hat{p}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0, & j < i; \\ \hat{p}_{0,j-i}(\lambda), & j \geqslant i. \end{cases} \tag{15}$$

由此只需对 $i = 0$ 证明(9) 成立即可,即只需证

$$v_0(\lambda, z) = \frac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda(1 - \hat{G}(\lambda) F(z))} \tag{16}$$

成立,易由(14) 得

$$\hat{p}_{0j}(\lambda) = \sum_{k=0}^{j-1} \hat{p}_{0k}(\lambda) \hat{G}(\lambda) f_{j-k} + h_{0j}(\lambda) \quad (j = 0, 1, \cdots), \tag{17}$$

从而

$$
\begin{aligned}
v_0(\lambda, z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{p}_{oj}(\lambda) z^j = \\
&\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \hat{p}_{ok}(\lambda) z^k \hat{G}(\lambda) f_{j-k} z^{j-k} + h_{oo}(\lambda) = \\
&\hat{G}(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}_{ok}(\lambda) z^k \sum_{j=k+1}^{\infty} f_{j-k} z^{j-k} + h_{oo}(\lambda) = \\
&\hat{G}(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}_{ok}(\lambda) z^k \sum_{j=1}^{\infty} f_j z^j + \frac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda} = \\
&\hat{G}(\lambda) v_0(\lambda, z) F(z) + \frac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

由(18) 立得(16),至此定理的证明遂告完成.

定理 2

$$
\hat{p}_{ij}(\lambda) = \begin{cases} 0, & j < i; \\ \dfrac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda}, & j = i; \\ \dfrac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=0}^{j-1} \Big(\sum_{l_1 + \cdots + l_k = j-i} f_{l_1} f_{l_2} \cdots f_{l_k} \Big) \hat{G}^k(\lambda), & j > i. \end{cases} \tag{19}
$$

证明 显然只需对 $i = 0$ 进行证明即可.由(16) 得

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \hat{p}_{oj}(\lambda) z^j &= \frac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}^k(\lambda) F^k(z) = \\
&\frac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{G}^k(\lambda) \sum_{j=k}^{\infty} \Big(\sum_{l_1 + \cdots + l_k = j} f_{l_1} f_{l_2} \cdots f_{l_k} \Big) z^j = \\
&\frac{1 - \hat{G}(\lambda)}{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{j} \Big) \hat{G}^k(\lambda) \sum_{l_1 + \cdots + l_k = j} f_{l_1} f_{l_2} \cdots f_{l_k} \Big) z^j.
\end{aligned} \tag{20}
$$

由(20) 立得定理 2.

以 $G^{(i)}(t)$ 表示 $G(t)$ 的 i 重卷积,则有

定理 3

$$
p_{ij}(t) =
$$

$$\begin{cases} 0, & j < i; \\ 1 - G(t), & j = i; \\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l_1+\cdots+l_k=j-i} f_{l_1}f_{l_2}\cdots f_{l_k}\right)\left(G^{(k)}(t) - G^{(k+1)}(t)\right), & j > i. \end{cases} \tag{21}$$

证明　由定理 2 立得我们的定理.

§3　GI/G/1 排队系统的等待时间

本节讨论 GI/G/1 系统的等待时间. 等待时间的研究是排队论中非常重要的问题. M. H. A. Davis 用补充变量办法来讨论此问题并在输入为 Poisson 过程时, 得到了等待时间过程为马尔可夫过程. 在本节中我们用马尔可夫骨架过程理论, 不用补充变量法来解决此问题, 相对来说既直观又简单, 并在输入较 Poisson 过程广泛的一类过程情况下, 证明了等待时间过程也是马尔可夫过程.

所谓 *GI*/*G*/1 排队系统是指

(i) 顾客在时刻 $\tau_1, \tau_2, \cdots$, 陆续到来, 到达时刻的间隔 $\theta_m = \tau_{m+1} - \tau_m$ ($m = 0, 1, \cdots, \tau_0 = 0$) 是相互独立, 相同分布的随机变量. 其分布函数为 $A(x)$, 即

$$P(\theta_m \leqslant x) = G(x). \tag{1}$$

(ii) 各顾客的服务时间 $V_1, V_2, \cdots$, 之间及与 $\{\theta_m\}$ 之间均相互独立, 并且各 V_m 均有相同分布

$$P(V_m \leqslant x) = B(x). \tag{2}$$

(iii) 有一服务台, 顾客到达后排成一队, 按到达次序接受服务.

令 $W(t)$ 为 t 时刻顾客到达的等待时间(包括对它的服务时间, 见图 3). 显然, $W(t)$ 为一逐段决定马尔可夫骨架过程, 顾客到达时序列 $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \cdots$, 是其骨架序列. 于是有

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(t - \tau_n, x(\tau_n)) I_{[\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]}, \quad 0 \leqslant t < +\infty, \tag{3}$$

其中

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} x - t, & 0 \leqslant t \leqslant x; \\ 0, & t > x. \end{cases} \tag{4}$$

令

$$h(t,x,A) = P(W(t) \in A, t < \tau_1 \mid W(0) = x), \tag{5}$$

$$q(t,x,A) = P(x(\tau_1) \in A, \tau_1 < t \mid W(0) = x). \tag{6}$$

设 $\mathscr{E}$ 表示 R_+ 的 Borel σ – 域

引理 1 $\forall t \geqslant 0, A \in \mathscr{E}$，则

$$h(t,x,A) = (1 - G(t)) I_{[\varphi(x,t) \in A]}. \tag{7}$$

$$q(t,x,A) = \int_0^t \int_{A-\varphi(x,t)} \mathrm{d}B(Z) \mathrm{d}G(s). \tag{8}$$

其中

$$A - \varphi(x,t) = (Z - \varphi(x,t) : Z \in A).$$

证明

$$h(t,x,A) = P(W(t) \in A, t < \tau_1 \mid W(0) = x) =$$
$$P(\varphi(x,t) \in A, t < \tau_1 \mid W(0) = x) =$$
$$P(\varphi(x,t) \in A \mid W(0) = x) \cdot P(t < \tau_1 \mid W(0) = x) =$$
$$I_{[\varphi(x,t) \in A]} \cdot P(\tau_1 > t) = I_{[\varphi(x,t) \in A]} \cdot (1 - A(t)),$$
$$q(t,x,A) = P(W(\tau_1) \in A, \tau_1 \leqslant t \mid W(0) = x) =$$
$$\int_0^t P(W(s) \in A, \tau_1 \in \mathrm{d}s \mid W(0) = x) =$$
$$\int_0^t P(\varphi(x,s) + V_1 \in A) \mathrm{d}G(s) =$$
$$\int_0^t P(V_1 \in A - \varphi(x,s)) \mathrm{d}G(s) =$$
$$\int_0^t \int_{A-\varphi(x,s)} \mathrm{d}B(E) \mathrm{d}G(s).$$

令

$$p(t,x,A) = P(W(t) \in A \mid W(0) = x), \quad t \in R, A \in \mathscr{E}. \tag{9}$$

由向后方程立得

定理 1 $(p(t,x,A): x \in R_+, t \in R_+, A \in \mathscr{E})$ 是方程

$$f(x,t) = \int_0^{+\infty} \int_{(0,t]} f(y,t-u) q(x,\mathrm{d}u,\mathrm{d}y) + h(t,x,A) \tag{10}$$

的最小非负解.

由定理 9.1.5 立得.

定理 2 当且仅当,相邻两个顾客到达时间间隔 θ_n 服从负指数分布,即当且仅当 $GI/G/1$ 是 $M/G/1$ 时 $W(t)$ 才是马尔可夫过程.

§4 M/G/1 和 GI/M/N 排队系统的队长

由于最简单流的无后效性,在50年代,Kendell D.G 首先指出,对于 M/G/1 排队系统的队长 $L(t)$,在一系列顾客的离开时刻 τ_n,观察 $L(t)$,则 $L(\tau_n)(n = 0,1,\cdots)$ 构成一个马尔可夫链,他研究了这个马尔可夫链,并得到圆满的结果.但实际上,每个 τ_n 有更强的性质;$L(t)$ 在 τ_n 具有(时齐)马尔可夫性.在 50 年代后期,Tahacs Lajos[1] 不自觉的利用上述性质,求出了 $L(t)$ 的概率分布的拉氏变换的母函数的明显表达式.对于 GI/M/N 排队论系统 Kendell D.G 有类似的结果.60 年代,吴方、徐光辉对 GI/M/N 排队系统进行了研究,给出了队长 $L(t)$ 的概率分布的拉氏变换的母函数的明显表达式.

现在看来,M/G/1,GI/M/N 都是典型的马尔可夫骨架过程.本节就是利用我们建立的马尔可夫骨架过程理论给出 M/G/1 系统的队长 $L(t)$ 的向前方程,进而算出 $L(t)$ 的概率分布的拉氏变换递推计算公式,也顺便给出 $L(t)$ 的概率分布的拉氏变换的母函数的有别于 Takacs 的明显表达式.关于 GI/M/N 排队系统的队长 $L(t)$,

我们只说明一点：徐光辉[2，第四章 §3 的公式(56)]就是我们现在定义的 $L(t)$ 的向后方程，但在推导这一公式时，书中说是利用全概率公式，而应说是"利用全概率公式和顾客到达时刻 τ_n 的马尔可夫性".

所谓 M/G/1 排队系统，是指满足如下三条的随机服务系统.

(i) 输入是参数为 q 的最简单流；

(ii) 各顾客的服务时间 $v_1, v_2, \cdots$ 之间以及它们与输入之间均相互独立，并且各 v_i 具有相同的分布

$$P(v_i \leqslant x) = B(x). \tag{1}$$

(iii) 有一个服务台，顾客到达时，若服务台空闲，就立即开始服务；否则就排入队伍末尾等待，并按到达次序逐个接受服务. 顾客在服务完毕后就离开系统，同时队首顾客(如果此时有顾客等待的话)立即接受服务.

用 $L(t)$ 表示 t 时刻的队长，即正在排队的和被服务的顾客的总数，令 $\tau_0 = 0, \tau_n$，为第 n 个被服务的顾客离开队伍的时刻. 由条件(i)和(ii)及(iii)可知，$L(t)$ 是一个以 $\{\tau_n\}$ 为其骨架序列的齐次马尔可夫骨架过程.

由侯振挺、刘再明、邹捷中[1]知，$L(t)$ 是以 $\{\tau_n\}$ 为骨架序列的 (H, Q) 过程，为了陈述定理，我们首先引入下面的符号，令：

$$p(t,i,j) = p(L(t) = j \mid L(0) = i), \tag{2}$$

$$p_\lambda(i,j) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t,i,j) dt, \quad \lambda > 0, \tag{3}$$

$$h(t,i,j) = P(L(t) = j, \tau_1 > t \mid L(0) = i), \tag{4}$$

$$h_\lambda(i,j) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(t,i,j) dt, \quad \lambda > 0, \tag{5}$$

$$q(t,i,j) = P(L(\tau_1) = j, \tau_1 \leqslant t \mid L(0) = i), \tag{6}$$

$$q_\lambda(i,j) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dq(t,i,j). \tag{7}$$

显然有

$$h(t,0,0) = e^{-qt}, \tag{8}$$

$$h(t,0,j)=$$

$$\int_0^t q\mathrm{e}^{-qs}\frac{(q(t-s))^j}{j!}\mathrm{e}^{-q(t-s)}(1-B(t-s))\mathrm{d}s,\quad j\neq 0,\quad (9)$$

$$h(t,i,j)=\frac{(qt)^{j-i}}{(j-i)!}\mathrm{e}^{-qt}(1-B(t)),\quad j=i,i\neq 0,\quad (10)$$

$$h(t,i,j)=0,\quad j<i,i\neq 0,\quad (11)$$

$$q(t,0,j)=\int_0^t(1-\mathrm{e}^{-q(t-s)})\frac{(qs)^j}{j!}\mathrm{d}B(s),\quad (12)$$

$$q(t,i,j)=\int_0^t\frac{(qs)^{j-i+1}}{(j-i+1)!}\mathrm{e}^{-qs}\mathrm{d}B(s),\quad j\geqslant i-1,\quad (13)$$

$$q(t,i,j)=0,\quad j<i-1.\quad (14)$$

由(8) ~ (14),可把 $h_\lambda(i,j),q_\lambda(i,j)$ 计算出来.令

$$h_\lambda(k)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+q)t}\frac{(qt)^k}{k!}(1-B(t))\mathrm{d}t,\quad k\geqslant 0,\quad (15)$$

易知

$$h_\lambda(i,j)=h_\lambda(j-i),\quad j\geqslant i\neq 0.\quad (16)$$

令

$$H=(h_\lambda(i,j),i\geqslant 0,j\geqslant 0).\quad (17)$$

于是

$$H=\begin{bmatrix} h_\lambda(0,0) & h_\lambda(0,1) & h_\lambda(0,2) & h_\lambda(0,3) & \cdots \\ 0 & h_\lambda(0) & h_\lambda(1) & h_\lambda(2) & \cdots \\ 0 & 0 & h_\lambda(0) & h_\lambda(1) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & h_\lambda(0) & \cdots \\ \cdots\cdots \end{bmatrix}.\quad (18)$$

显然 $h_\lambda(0,0),h_\lambda(0)$ 均不为 0,从而 H 为可逆矩阵,且其逆仍为上三角形

$$H^{-1}=(\tilde{h}_\lambda(i,j),i\geqslant 0,j\geqslant 0).\quad (19)$$

由 $HH^{-1}=\mathbf{E}$($\mathbf{E}$ 为单位矩阵),我们有

$$\tilde{h}_\lambda(i,j)=0,\quad j<i\quad (20)$$

及

$$\begin{cases} \bar{h}_\lambda(i,j)h_\lambda(0) = 1, \\ \sum_{k=0}^{j} \bar{h}_\lambda(i-k,i)h_\lambda(j-k) = 0, \quad 0 < j < i, \\ \sum_{k=0}^{i} h_\lambda(0,k)\bar{h}_\lambda(k,i) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

由(21) 可把 $\bar{h}_\lambda(i,j)$ 计算出来,且有

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{h}_\lambda(0,0) & \bar{h}_\lambda(0,1) & \bar{h}_\lambda(0,2) & \cdots \\ 0 & \bar{h}_\lambda(0) & \bar{h}_\lambda(1) & \cdots \\ 0 & 0 & \bar{h}_\lambda(0) & \cdots \\ \cdots\cdots & & & \end{bmatrix}. \tag{22}$$

令

$$H^{-1}QH = \hat{Q} = (\hat{q}_\lambda(i,j), i \geqslant 0, j \geqslant 0). \tag{23}$$

由(23) 可把 $\hat{Q}$ 计算出来,且有 $\hat{q}_\lambda(i,j) \geqslant 0$ 和

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{q}_\lambda(0,0) & \hat{q}_\lambda(0,1) & \hat{q}_\lambda(0,2) & \hat{q}_\lambda(0,3) & \cdots \\ \hat{q}_\lambda(1,0) & \hat{q}_\lambda(1,1) & \hat{q}_\lambda(1,2) & \hat{q}_\lambda(1,3) & \cdots \\ 0 & \hat{q}_\lambda(0) & \hat{q}_\lambda(1) & \hat{q}_\lambda(2) & \cdots \\ 0 & 0 & \hat{q}_\lambda(0) & \hat{q}_\lambda(1) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \hat{q}_\lambda(0) & \cdots \end{bmatrix}. \tag{24}$$

这样我们就得到了向前方程

$$P_\lambda = P_\lambda \hat{Q} + H, \tag{25}$$

即

$$P_\lambda(i,0) = P_\lambda(i,0)\hat{q}_\lambda(0,0) + P_\lambda(i,1)\hat{q}_\lambda(1,0) + h_\lambda(i,0) \tag{26}$$

$$P_\lambda(i,j) = P_\lambda(i,0)\hat{q}_\lambda(0,j) + P_\lambda(i,1)\hat{q}_\lambda(1,j) + \sum_{k=2}^{j+1} P_\lambda(i,k)\hat{q}_\lambda(j-k+1) + h_\lambda(i,j), \quad j > 0. \tag{27}$$

令

$$P_{(\lambda,z)}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P_\lambda(i,j)z^j. \tag{28}$$

$$h_{(i)}(\lambda, z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_{\lambda}(i,j) z^{j}. \tag{29}$$

$$\hat{q}^{(k)}_{(\lambda,z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{q}(k,j) z^{j}, \quad k = 0,1. \tag{30}$$

$$\hat{q}_{(\lambda,z)} = \sum_{j=0}^{\infty} q_{\lambda}(j) z^{j}. \tag{31}$$

定理 1

$$P_{(\lambda,z)}(i) = \frac{z h_{(\lambda,z)}(i) + P_{\lambda}(i,0)(z\hat{q}_{(\lambda,z)}(0) - \hat{q}_{(\lambda,z)})}{z - \hat{q}_{(\lambda,z)}} + \frac{z P_{\lambda}(i,1)(\hat{q}_{(\lambda,z)}(1) - \hat{q}_{(\lambda,z)})}{z - \hat{q}_{(\lambda,z)}}. \tag{32}$$

其中

$$P_{\lambda}(i,0) = \frac{\frac{1}{\lambda} q_{\lambda}(1,0)[1 - \sum_{j=0}^{\infty}(q_{\lambda}(j) + \lambda h_{\lambda}(i,j))] - h_{\lambda}(i,0)\sum_{j=0}^{\infty}[q_{\lambda}(1,j) - q_{\lambda}(j)]}{\sum_{j=0}^{\infty}[q_{\lambda}(1,0)(q_{\lambda}(0,j) - q_{\lambda}(j)) + (1 - q_{\lambda}(0,0)(q_{\lambda}(1,j) - q_{\lambda}(j))]}. \tag{33}$$

$$P_{\lambda}(i,1) = \frac{\frac{1}{\lambda}(1 - q_{\lambda}(0,0))[1 - \sum_{j=0}^{\infty}(q_{\lambda}(j) + \lambda h_{\lambda}(i,j))] - h_{\lambda}(i,0)\sum_{j=0}^{\infty}(q_{\lambda}(0,j) - q_{\lambda}(j))}{\sum_{j=0}^{\infty}[q_{\lambda}(1,0)(q_{\lambda}(0,j) - q_{\lambda}(j)) + (1 - q_{\lambda}(0,0)(q_{\lambda}(1,j) - q_{\lambda}(j))]}. \tag{34}$$

证明 由(26)和(27)得

$$P_{(\lambda,z)}(i) = z h_{(\lambda,z)}(i) + P_{\lambda}(i,0)(z\hat{q}^{(0)}_{(\lambda,z)} - \hat{q}_{(\lambda,z)}) + P_{\lambda}(i,1)(\hat{q}^{(1)}_{(\lambda,z)} - q(_{(\lambda,z)}) + \frac{\hat{q}_{(\lambda,z)}}{z} P_{(\lambda,z)}(i). \tag{35}$$

从而,立得(32).

由(26)和

$$P_{(\lambda,1)}(i) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} P(t,i,j) dt = \frac{1}{\lambda}, \tag{36}$$

立得(33)和(34),定理得证.

由(26),(27)及定理1立得.

定理2 对任意的 $i = 0,1,2,\cdots$,队长的概率分布的拉氏变换 $P_\lambda(i,j)$ 可由(3.3),(3.4)及下面的递推关系式唯一决定:

$$P_\lambda(i,j+1) =$$

$$\frac{1}{\hat{q}_\lambda(0)}\Big[P_\lambda(i,j) - P_\lambda(i,0)\hat{q}_\lambda(0,j) - P_\lambda(i,1)\hat{q}_\lambda(1,j) -$$

$$h_\lambda(j-i) - \sum_{k=2}^{j} P_\lambda(i,k)\hat{q}_\lambda(j-k+1)\Big]. \qquad (37)$$

由定理9.1.5立得.

定理3 当且仅当,$M/G/1$ 和 $GI/M/N$ 分别是 $M/M/1$ 和 $M/M/N$ 时,$L(t)$ 才是马尔可夫过程.

§5 在排队网络中的应用注记

排队网络作为计算机系统、通讯网络及制造系统等的一般模型,得到越来越多的学者的重视,成为当今最活跃的研究分支之一.

排队网络最重要的课题之一是系统的稳定性质.

假定我们所研究的网络有 J 个单服务员服务台共提供 K 项服务($J \leqslant K$),且每个服务项目有且仅有唯一服务台提供服务.如果至少有一个服务台提供两项以上服务,则称此排队网络为**多项服务排队网络**(multiclass queueing networks).若允许到达网络的顾客,在有限时间内接受完部分项目服务后离开网络,则称此多项服务排队网络为**多项服务开排队网络**(open multiclass queueing networks).

决定排队网络系统演化主要有三个要素:1)顾客到达的(概率)规律;2)每项服务所需的服务时间分布;3)当顾客接受完某项服务后即转移到其他服务项目的(概率)规律.其次是服务规则

(Service law). 常见的服务规则如: 先到先服务(FIFO, first - in - first - out); 后到先服务(LIFO, last - in - first - out); 固定顺序优先权服务(SBP, static buffer priority); 共享服务(HLPS, head - of - the - line processor sharing) 等.

刻画排队网络系统的最重要的性态指标为队长. 令

$Z_k(t)$ = 时刻 t 等待或正在接受第 k 项服务的顾客数, $k = 1, 2, \cdots, K$(即包括网络外部到达的, 又包括网络内部转来的). 一种重要的稳定性概念是, 对每个 k 存在 $\pi_k \in \bar{R}_+$, 使得

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t Z_k(s)\mathrm{d}s = \pi_k\right\} = 1.$$

周知, $Z(t) \triangleq (Z_1(t), Z_2(t), \cdots, Z_k(t))$ 一般不是马氏过程, 甚至不是马氏骨架过程. 研究上述稳定性的一个基本方法是, 通过引入适当的补充变量, 重建相应的马尔可夫过程模型 $X = \{X(t)\}$. 这时只需验证 X 的正 Harris 常返性(positive Harris recurrence), 便蕴含了排队网络系统的稳定性(参见 Dai, J.G. On positive Harris recurrence of multiclass queueing networks: A unified approach via fluid limit models. Annals of Applied probability 5, 49 - 77(1995)).

为简单起见, 我们仅考虑固定顺序优先权(SBP) 与共享(HLPS) 两种服务规则.

引入变量

$$U(t) = (U_k(t), k = 1,2,\cdots,K),$$
$$V(t) = (V_k(t), k = 1,2,\cdots,K).$$

其中, $U_k(t)$ 表示外部到达第 k 项服务的下一顾客的在时刻 t 的剩余时间(the residual external interarrival time); $V_k(t)$ 表示正在接受第 k 项服务的顾客的剩余服务时间(the residual service time for the leading job of class k).

令 τ_k 为第 k 个队长(向量) 改变的时刻, 亦即第 k 个外部顾客到达或某项服务结束的时刻. 显然, 在任意两个这样的相邻时刻之间, $Z(t), U(t), V(t)$ 按决定性系统演化, 而且当且仅当在这样的

时刻$(Z(t),U(t),V(t))$发生跳转移.令

$$X(t) = (Z(t),U(t),V(t)).$$

假设 $X(t)$ 是右连续过程,容易得,X 为取值于 $E = Z_+^J \times R^{2J}$ 的齐次逐段决定马氏骨架过程(PDP).由 PDP 成为强马氏过程(PDMP)的充要条件,即得 X 为逐段决定马氏过程(PDMP).于是我们有如下定理

定理 1　过程 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 为逐段决定马氏过程.

注 1　由上述定理,对 $X(t)$ 我们可用逐决定马氏过程理论和研究方法加以深入研究.这要比用一般马氏过程理论和方法研究要简单得多.

注 2　与 Dai(1995)的命题比较,这里无需引入补充变量 $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_k)$,它表示正在接受服务顾客的共享服务时间比例.

注 3　另一种补充变量的方式为,$U_k(t)$ 表示至时刻 t 最后一顾客到达网络的时间,$V_k(t)$ 表示时刻 t 正在接受第 k 次服务的顾客已接受的服务时间.这时定理 1 仍成立.这种补充变量方法得到马氏过程 $X(t)$ 的适应性与系统本身的适应性同步,而第一种方法显然是不同步的.

§6　补充与注记

§1 ~ §4 由侯振挺和袁成桂撰写,§5 由刘国欣撰写.

第 9 篇

预备知识

27 基本知识

§1 Polish 空间与单调类定理

Polish空间是概率论中经常用到的一类拓扑空间. 这是因为这类空间足够广泛且具良好的性质.

定义 1 设 E 为一可分拓扑空间. 如果在 E 上存在与其拓扑相适应的距离 d, 使 (E,d) 为一可分完备距离空间, 则称 E 为 Polish空间.

这里称距离空间是**完备的**, 如果空间中的基本列皆收敛. 注意, 完备性概念不是拓扑概念: 一个完备距离空间可以改赋以一等价距离变成非完备的.

定理 1 Polish 空间的任一开(闭) 子空间仍为 Polish 空间.

证明 设 E 为Polish空间. 由于 E 的每个子空间都是可分的, 只需证明其任意开(闭) 子空间可赋予完备距离.

设 d 为 E 的一完备距离. 如果 F 为 E 的闭子空间, 则 d 在 F 上的限制 d_F 即为 F 的完备距离.

设 U 为 E 的任一开子空间. 不妨设 $U \neq E$. 则

$$d_0(x,y) := d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x,U^C)} - \frac{1}{d(y,U^C)} \right|, \qquad (1)$$

定义一 U 上的距离. 由三角不等式知

$$| d(x,U^C) - d(y,U^C) | \leqslant d(x,y).$$

故 $d(x,U^C)$ 是关于 x 的连续函数. 因此, 任一 U 中的序列 (x_n) 按

d 收敛于 $x \in U$ 的充分必要条件为 $d_0(x_n, x) \to 0(n \to \infty)$. 此即说明 d_0 与 U 中拓扑相适应. 往证 (U, d_0) 为完备的. 设 (x_n) 为 (U, d_0) 中的 Cauchy 列. 由(1)式, 它亦为 (E, d) 中的 Cauchy 列. 于是存在 $x \in E$ 使得 $d(x_n, x) \to 0(n \to \infty)$. 我们说 $x \in U$, 否则必有 $\lim_n d(x_n, U^C) = 0$, 从而

$$\limsup_{m,n} d_0(x_m, x_n) = +\infty.$$

这与 (x_n) 为 (U, d_0) 中 Cauchy 列矛盾. 这就证明了定理.

定理 2 设 $E_1, E_2, \cdots$ 为 Polish 空间的有限或可数序列, 则其乘积空间 $\Pi_n E_n$ 为 Polish 空间.

证明 设 $E_n \neq \varnothing (n = 1,2,\cdots)$(否则 $\Pi_n E_n = \varnothing$). $\forall n$, 令 d_n 为 E_n 的完备距离. 不妨设对任意 $x_n, y_n \in E_n, d_n(x_n, y_n) \leq 1(n = 1,2,\cdots)$(否则可用 $d'_n := d_n \wedge 1$ 取代之). 对任意 $x, y \in \Pi_n E_n, x = (x_1, x_2, \cdots), y = (y_1, y_2, \cdots)$, 令

$$d(x, y) := \sum_n \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

容易验证, d 是与 $\Pi_n E_n$ 上乘积拓扑相适应的完备距离. 其次, 对每个 n, 选 E_n 的可数基 $\mathscr{U}_n$. 于是, $\Pi_n E_n$ 中形如

$$U_1 \times \cdots \times U_N \times E_{N+1} \times E_{N+2} \times \cdots; U_n \in \mathscr{U}_n,$$

$n = 1,2,\cdots,N; N = 1,2,\cdots$ 的子集的全体构成 $\Pi_n E_n$ 中的可数基. 从而, $(\Pi_n E_n, d)$ 是可分的.

定理 3 设 E 为一 Polish 空间, F 为 E 的一子空间, 则 F 为 Polish 空间, 当且仅当 F 是 G_δ- 集. 这里 G 表示 E 的开子集全体.

证明 设 (U_n) 为 E 的开集列, $Y = \bigcap_n U_n$. 由定理 2 及 3, 每个 U_n 及 $\Pi_n U_n$ 为 Polish 空间. 令

$$\Delta = \{(u_n) \in \prod_n U_n : u_j = u_k, \forall j, k\}.$$

则 Δ 作为 $\Pi_n U_n$ 的闭子集也是 Polish 空间. 注意到 Y 与 Δ 同胚($\forall y \in Y, y \leftrightarrow (y, y, \cdot) \in \Delta$), Y 亦为 Polish 空间.

反过来, 设 E 的子空间 Y 为 Polish 空间. d, d_0 分别为 E, Y 的

完备距离.对每个 n 令 V_n 为全体 E 的如下开子集 W 的并: $W \cap Y$ 非空且关于 d_0 的直径不超过 $1/n$.往证

$$Y = \bar{Y} \cap (\bigcap_n V_n). \tag{2}$$

注意到 d 与 d_0 在 Y 上导出同一拓扑,$Y \subset Y \cap (\bigcap_n V_n)$ 显然.假设 $x \in Y \cap (\bigcap_n V_n)$.因为 $x \in \bigcap_n V_n$,可选 x 的一列开邻域 W_n 满足 $W_n \cap Y$ 非空且关于 d_0 的直径不超过 $1/n$.不妨设 $W_n \downarrow$ 且关于 d 的直径亦不超过 $1/n$(否则,可用 x 的更小的开邻域替代,而且 $x \in \bar{Y}$ 保证 $W_n \cap Y$ 仍然不空).由 Y 关于 d_0 完备,存在唯一的 $y \in Y$ 使得 $y \in W_n \cap Y$ 在 Y 中的闭包.由于对每个 $n, x, y \in \bar{W}_n$,故 $d(x,y) \leqslant 1/n, n = 1,2,\cdots$.所以,$x = y \in Y$.(2) 式得证.又因为每个 E 的闭子集都是 E 的 G_δ- 型集.这就证明了定理.

作为上述命题的简单应用,离散空间,R,R^d 及其闭子集、开子集都是 Polish 空间.

今后我们讨论的过程一般取值空间为 Polish 空间.这不仅因为 Polish 空间上述良好的性质.重要的是应用问题中的逐段决定过程的状态空间一般为 $\mathbf{R}^d$ 中的 G_δ- 型集.其次,我们有如下一般的 Doob 可测性定理,其中 $\mathscr{B}(E)$ 为 E 上的 Borel σ – 域.

定理4 设 f 是 Ω 到一可测空间 $(F,\mathscr{F})$ 中的映射,φ 为 Ω 到一 Polish 空间 $(\mathbf{E},\mathscr{B}(E))$ 中的映射.为要 φ 是 $\sigma(f)$ – 可测的.必须且只需存在 $(F,\mathscr{F})$ 到 $(E,\mathscr{B}(E))$ 上的可测映射 h,使得 $\varphi = h \cdot f$.

证明 充分性显然,往证必要性.

我们可以设 E 已经定义了一种距离 d,使 (E,d) 为一完备可分距离空间.首先假设 φ 取可列值: $b_1, b_2, \cdots$.则 $\varphi^{-1}(b_i) \in \sigma(f)$.于是在 $\mathscr{F}$ 中存在一个集 B_i(可能不是唯一确定的),使得 $\varphi^{-1}(b_i) = f^{-1}(B_i)$.不妨假设序列 $B_1, B_2, \cdots$ 是互不相交的(如若必要可用 $B_1, B_2 \setminus B_1, B_3 \setminus (B_1 \cup B_2), \cdots$ 代替 $B_1, B_2, B_3, \cdots$).我们定义 $(F,\mathscr{F})$ 到 $(E,\mathscr{B}(E))$ 上的映射 h:在 B_i 上取值 b_i,而在余集 $F - \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$ 上取 $h \equiv$ 常值($\in F$).这个映射 h 即为要求.

对任意的 φ,存在从 $(\Omega,\sigma(f))$ 到 $(E,\mathscr{B}(E))$ 并取可列值的可

测映射列 φ_n，φ_n 以 φ 为极限．例如，对每个正数 n，取 E 的一个划分 $B_{n,1}, B_{n,2}, \cdots$，它们是互不相交且直径 $\leqslant 2^{-n}$ 的非空 Borel 集，在 $B_{n,j}$ 中取一点 $b_{n,j}$ 并在 Ω 上定义 φ_n，使 φ_n 在 $\varphi^{-1}(B_{n,j})$ 上取值 $b_{n,j}$．则由上一段所证，存在一个从 $(F, \mathscr{F})$ 到 $(E, \mathscr{B}(E))$ 的可测函数 h_n 使 $\varphi_n = h_n(f)$．并由此推知序列 $\{h_n\}$ 在 f 的值域上是收敛的．既然 $\{h_n\}$ 的收敛集合在 $\mathscr{F}$ 中，于是，当我们在 $\{h_n\}$ 的发散点集上重新定为 $h_n \equiv$ 常值，则序列 $\{h_n\}$ 在整个空间 F 上收敛于一个函数 h．此 h 即为所求．

定义 2 令 Ω 为一集合，$\mathscr{C}$ 为 Ω 的一子集类，称 $\mathscr{C}$ 为 π – 类，如果 $A, B \in \mathscr{C} \Rightarrow AB \in \mathscr{C}$．称 $\mathscr{C}$ 为 **λ – 类**，如果

(i) $\Omega \in \mathscr{C}$;

(ii) $A, B \in \mathscr{C}, A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathscr{C}$;

(iii) $A_n \in \mathscr{C}, A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathscr{C}$.

称 $\mathscr{C}$ 为**单调类**，如果 $A_n \in \mathscr{C}, A_n \uparrow A$ 或 $A_n \downarrow A \Rightarrow A \in \mathscr{C}$.

显然，如果 $\mathscr{C}$ 同时为 π – 类和 λ – 类，或同时为域和单调类，则 $\mathscr{C}$ 为 σ – 域．

单调类定理有几种形式．我们首先给出**集合形式的单调类定理**．

定理 5 设 $\mathscr{C}, \mathscr{F}$ 为 Ω 的两个子集类，且 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$.

(1) 若 $\mathscr{F}$ 为 λ – 类，$\mathscr{C}$ 为 π – 类，则 $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$.

(2) 若 $\mathscr{F}$ 为单调类，$\mathscr{C}$ 为域，则 $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}$.

证明 (1) 一切包含 $\mathscr{C}$ 的 λ – 类之交 $\mathscr{F}'$ 仍是 λ – 类（称为 $\mathscr{C}$ 产生的 λ – 类）．令

$$\mathscr{F}_1 = \{B \in \mathscr{F}' : \forall A \in \mathscr{C}, B \cap A \in \mathscr{F}'\}.$$

显然，$\mathscr{F}_1$ 是 λ – 类，且 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}_1$，故 $\mathscr{F}' = \mathscr{F}_1$．令

$$\mathscr{F}_2 = \{B \in \mathscr{F}' : \forall A \in \mathscr{F}', B \cap A \in \mathscr{F}'\}.$$

显然，$\mathscr{F}_2$ 是 λ – 类，且 $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}_2$，故 $\mathscr{F}' = \mathscr{F}_2$．这表明 $\mathscr{F}'$ 是 π – 类，于是 $\mathscr{F}'$ 是 σ – 域，我们有 $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$.

(2) 一切包含 $\mathscr{C}$ 的单调类之交 $\mathscr{F}'$ 仍是单调类（称为 $\mathscr{C}$ 产生的

单调类). 与(1)的证明类似,可证$\mathscr{F}'$是π-类. 令

$$\mathscr{F}''=\{B\in\mathscr{F}': B^c\in\mathscr{F}'\}.$$

则$\mathscr{F}''$是单调类,且$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}''$,故$\mathscr{F}''=\mathscr{F}'$. 这表明$\mathscr{F}'$是域,于是$\mathscr{F}'$是$\sigma$-域. 我们有$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$.

下面来叙述函数形式的单调类定理.

定理 6 令$\mathscr{C}$为集合Ω上的一π-类,$\mathscr{H}$为Ω上的实值函数的线性空间. 如果$\mathscr{H}$满足下列条件:

(i) $1\in\mathscr{H}$;

(ii) $f_n\in\mathscr{H}, 0\leqslant f_n\uparrow f$, f有限(相应地,有界)$\Rightarrow f\in\mathscr{H}$;

(iii) $A\in\mathscr{C}\Rightarrow I_A\in\mathscr{H}$.

则$\mathscr{H}$应包含Ω上的一切$\sigma(\mathscr{C})$-可测的实值(相应地,有界)函数.

证明 令$\mathscr{F}=\{A\subset\Omega: I_A\in\mathscr{H}\}$,则易知$\mathscr{F}$为$\lambda$-类. 依假定,$\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$,故由定理5,$\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$.

设ξ为一$\sigma(\mathscr{C})$-可测实值(相应地,有界)函数. 令

$$\xi_n=\sum_{k=0}^{n2^n}\frac{k}{2^n}I_{[k/2^n\leqslant\xi<(k+1)/2^n]},$$

则$\xi_n\in\mathscr{H}, 0\leqslant\xi_n\uparrow\xi^+$. 故由条件(ii),$\xi^+\in\mathscr{H}$. 同理,$\xi^-\in\mathscr{H}$. 从而$\xi=\xi^+-\xi^-\in\mathscr{H}$.

在本节最后,我们介绍随机变量非空族的本质上确界概念.

定义 3 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为一概率空间,$\mathscr{H}$为随机变量的非空族,称随机变量η为$\mathscr{H}$的**本质上确界**,如果η满足下列条件:

(i) 对一切$\xi\in\mathscr{H}$,有$\xi\leqslant\eta$ a.s.;

(ii) 设η'为一随机变量,使得对一切$\xi\in\mathscr{H}$,有$\xi\leqslant\eta'$ a.s. 则有$\eta\leqslant\eta'$ a.s.

容易看出:若$\mathscr{H}$的本质上确界存在,则必唯一(今后我们总不计a.s.相等的两个随机变量的差别),我们用$\operatorname{ess\,sup}_{\xi\in\mathscr{H}}\xi$或$\operatorname{ess\,sup}\mathscr{H}$表示之.

在上述(i)及(ii)中将不等号反向,就得到本质下确界的定

义. $\mathscr{H}$的本质下确界记为 $\text{ess}\inf_{\xi\in\mathscr{H}}\xi$ 或 $\text{ess}\inf\mathscr{H}$.

定理7 令 $\mathscr{H}$ 为随机变量的非空族，则 $\mathscr{H}$ 的本质上(下)确界存在，且有 $\mathscr{H}$ 中的至多可列个元素(ξ_n)，使得

$$\text{ess}\sup\mathscr{H} = \bigvee_n \xi_n (\text{ess}\inf\mathscr{H} = \bigwedge_n \xi_n).$$

若进一步，$\mathscr{H}$ 对取有限上(下)端运算封闭，则(ξ_n)可取为一单调增(单调减)序列.

证明 我们只讨论本质上确界，第二个结论不待证. 为证第一个结论，不妨设 $\mathscr{H}$ 中的元素一致有界，否则我们可以考虑随机变量族 $\mathscr{H} = \{\arctan\xi : \xi \in \mathscr{H}\}$. 此外，显然可进一步假定 $\mathscr{H}$ 对取有限上端运算封闭. 这时，令$(\xi_n)\subset\mathscr{H}$ 为单调增序列，使得

$$\lim_n E[\xi_n] = \sup_{\xi\in\mathscr{H}} E[\xi_n].$$

令 $\eta = \bigvee_n \xi_n$，往证 η 为 $\mathscr{H}$ 的本质上确界. 为此只需验证定义 3 中的两个条件. 条件(ii)显然成立. 故只需证条件(i)成立. 设 $\xi\in\mathscr{H}$，令 $\xi'_n = \xi_n \vee \xi$，则$(\xi'_n)\subset\mathscr{H}$，$(\xi'_n)$单调增，且 $\lim\xi'_n = \eta\vee\xi$. 我们有

$$E[\eta\vee\xi] = \lim_n E(\xi'_n) \leqslant \sup_{\xi\in\mathscr{H}} E(\xi) = E[\eta].$$

由于 $\eta\vee\xi \geqslant \eta$，上式表明 $\eta\vee\xi = \eta$ a.s.，此即 $\eta\geqslant\xi$ a.s. 条件(i)得证.

§2 最小非负解理论

这一节我们讨论一类方程的最小非负解理论，它是研究逐段决定马尔可夫骨架过程的基本工具之一. 我们考虑如下方程

$$x_i = \sum_{k\in E} c_{ik}x_k + b_i, \quad i\in E, \tag{1}$$

$$x_i(t) = \sum_{k\in E}\int_0^t c_{ik}(s)x_k(s)\mathrm{d}s + b_i(t), t\geqslant 0, \quad i\in E, \tag{2}$$

$$f(x) = \int_E U(x,\mathrm{d}y)f(y) + g(x), \quad x\in E, \tag{3}$$

$$\varphi(A) = \int_E \varphi(\mathrm{d}x)U(x,A) + V(A), \quad A \in \mathscr{E}, \tag{4}$$

其中,在前两个方程中,E 是可数集,c_{ij} 与 b_i,$c_{ij}(t)$ 与 $b_i(t)$ 是非负的,在后两个方程中,$(E,\mathscr{E})$ 为可测空间,U 是非负可测核,$g \in \mathscr{E}_+$ 而 V 为$(\mathbf{E},\mathscr{E})$ 上测度.

设 E 是任意一非空集.记 $\mathscr{H}$ 为从 E 到 $\bar{\mathrm{R}}_+$ 的映射集.$\mathscr{H}$ 包含常数 1,且对非负线性组合及单增极限封闭,这里 $\mathscr{H}$ 中的序关系"$\geqslant$"按逐点定义.例如,$f \geqslant 0$ 意即 $f(x) \geqslant 0$ 对所有 $x \in E$ 成立.显然,$\mathscr{H}$ 是一凸锥.我们称 $A:\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ 为一**锥映射**,若 $A0 = 0$ 且

$$A(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 Af_1 + c_2 Af_2,$$

对所有 $c_1, c_2 \geqslant 0$ 及 $f_1, f_2 \in \mathscr{H}$ 成立.记 $\mathscr{A}$ 为满足如下条件的锥映射的集:

$$\mathscr{H} \in f_n \uparrow f \Rightarrow Af_n \uparrow Af. \tag{5}$$

此外,我们约定:$c/\infty = 0$,当 $c > 0$ 时,$c \times \infty = \infty$;当 $c \geqslant 0$ 时,$c + \infty = \infty$ 且 $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0$.

定义 1 设 $A \in \mathscr{A}$ 且 $g \in \mathscr{H}$.我们称 f^* 为方程

$$f(x) = (Af)(x) + g(x), x \in E \tag{6}$$

的**最小非负解**(简称**最小解**),如果 f^* 满足(6) 式且对(6) 式的任意解 $\tilde{f} \in \mathscr{H}$,我们有

$$\tilde{f}(x) \geqslant f^*(x), \quad x \in E. \tag{7}$$

这一性质称为 f^* 的**最小性**.

为了简便记号,常常略去变量 x.

定理 1 方程(6) 的最小解总是存在而且唯一的.进一步地,最小解可由如下步骤得到:令

$$f^{(0)} = 0, f^{(n+1)} = Af^{(n)} + g, \quad n \geqslant 0. \tag{8}$$

则 $f^{(n)} \uparrow f^*$ $(n \to \infty)$.

证明 显然,$\mathscr{H} \in f^{(n)} \uparrow$,因此此极限存在.由(5) 式,

$$f^* = \lim_{n\to\infty} f^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} Af^{(n)} + g = Af^* + g,$$

因此 f^* 是一解.假设 $\tilde{f} \in \mathscr{H}$ 为另一解.则 $\tilde{f} \geqslant f^{(0)} \equiv 0$.进而,若

$\tilde{f} \geq f^{(n)}$,则 $\tilde{f} = A\tilde{f} + g \geq Af^{(n)} + g = f^{(n+1)}$.所以,$\tilde{f} \geq f^{(n)}$ 对所有 $n \geq 0$ 成立.因此 $\tilde{f} \geq f^*$.最后,若两个解均具有最小性,则必相同.

我们称(8)式给出的迭代法为**第一逐步逼近法**.

定义 2　方程(6)称为齐次的,若 $g = 0$.

推论 1　齐次方程的最小解等于0.

下面我们比较不同方程最小解的序关系.设 $\tilde{A}, A \in \mathscr{A}$,我们记 $\tilde{A} \geq A$ 若对每个 $f \in \mathscr{H}$,$\tilde{A}f \geq Af$.

定义 3　设 $\tilde{A}, A \in \mathscr{A}$,且 $\tilde{g}, g \in \mathscr{H}$ 满足

$$\tilde{A} \geq A, \tilde{g} \geq g.$$

则我们称

$$\tilde{f} \geq \tilde{A}\tilde{f} + \tilde{g}, \quad \tilde{f} \in \mathscr{H} \tag{9}$$

为方程(6)的**控制方程**(或**优方程**).

定理 2　(比较定理)设 f^* 是方程(6)的最小解.则对方程(9)的任一解 $\tilde{f}$,我们有 $\tilde{f} \geq f^*$.

证明　用归纳法易证 $\tilde{f} \geq f^{(n)}$ 对所有 n 成立.于是由第一逐步逼近法即得结论.

由定理1,对每个 $A \in \mathscr{A}$,我们可定义从 $\mathscr{H}$ 到自身的映射 m_A 如下:

$$m_A(g) = f^*.$$

则我们有如下有趣结果:

定理 3　m_A 是一锥映射.对 $\{A_n\} \subset \mathscr{A}$,$A_n \uparrow A$ 及 $(g_n) \subset \mathscr{H}$,$g_n \uparrow g$,我们有 $A \in \mathscr{A}$,$g \in \mathscr{H}$ 且 $m_{A_n} g_n \uparrow m_A g$.

证明　第一个结论由归纳法得到.另一方面,由比较定理我们有 $f_n^* := m_{A_n} g_n \uparrow$ 且

$$f_n^* = A_n f_n^* + g_n.$$

令 $\tilde{f}^* = \lim_{n\to\infty} f_n^*$.则

$$A\tilde{f}^* \xleftarrow{n\to\infty} Af_n^* \geq A_n f_n^* \geq A_n f_m^* \xrightarrow{n\to\infty} Af_m^* \to A\tilde{f}^*,$$

所以 $\tilde{f}^*$ 为方程(6)的一解.因此,由最小性 $\tilde{f}^* \geq f^*$.注意到 $f^* =$

$m_A g \geqslant m_{A_n} g_n = f_n^*$ 对所有 n 成立，由保序性，$f^* \geqslant \tilde{f}^*$. 所以

$$f^* = \tilde{f}^* = \lim_{n\to\infty} m_{A_n} g_n .$$

推论 2 设 G 为一可数集，$\{a_s : s \in G\} \subset \bar{\mathrm{R}}_+$，则

$$m_A\left(\sum_{s\in G} a_s g_s\right) = \sum_{s\in G} a_s m_A g_s$$

证明 当 G 有限时，由定理 3 的第一个结果及归纳法立得. 一般情况下，结论由定理 3 的第二个结果得到.

下面结果是最小解的**第二逐步逼近法**. 它的证明类似于第一逐步逼近法，略去.

定理 4 设 $(g_n)_{n\geqslant 1} \in \mathscr{H}$. 定义

$$\tilde{f}^{(1)} = g_1, \tilde{f}^{(n+1)} = A\tilde{f}^{(n)} + g_{n+1}, n \geqslant 1.$$

若 $g_n \uparrow g$（相应地，$\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g$），则 $\tilde{f}^{(n)} \uparrow m_A g = f^*$（相应地，$m_A g = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}^{(n)}$）. 特别地，若令

$$\tilde{f}^{(n)} = g, \tilde{f}^{(n+1)} = A\tilde{f}^{(n)},$$

则 $m_A g = f^* = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}^{(n)}$.

定理 5 设 $\tilde{f}$ 为方程(6)式的一非负解使得 $\tilde{f} \leqslant pf^*$ 的某常数 $p \geqslant 1$ 成立，则 $\tilde{f} = f^*$. 进而，对任一初始的 $\tilde{f}^{(0)} : 0 \leqslant \tilde{f}^{(0)} \leqslant pf^*$，令 $\tilde{f}^{(n+1)} = A\tilde{f}^{(n)} + g\,(n \geqslant 0)$，我们有 $\tilde{f}^{(n)} \to f^*\,(n \to \infty)$.

证明 由(8)式及归纳法，我们有

$$\tilde{f}^{(n)} \geqslant f^{(n)}, \quad n \geqslant 0, \tag{10}$$

$$pf^* \geqslant \tilde{f}^{(n)} + (p-1)f^{(n)}, \quad n \geqslant 0. \tag{11}$$

当 $f^*(x) = \infty$ 时，(10)式蕴含 $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}^{(n)}(x) = \infty = f^*(x)$；当 $f^*(x) < \infty$ 时，(10)及(11)式蕴含

$$f^*(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \tilde{f}^{(n)}(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \tilde{f}^{(n)}(x) \leqslant f^*(x).$$

我们仍有 $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}^{(n)}(x) = f^*(x)$. 于是，我们证明了定理的第二个结论.

往证第一个结论. 设 $0 \leqslant \tilde{f} \leqslant pf^*$. 令 $\tilde{f}^{(0)} = \tilde{f}$ 及 $\tilde{f}^{(n+1)} =$

$Af^{(n)} + g\ (n > 0)$. 则由刚刚证明的结论有 $\lim\limits_{n\to\infty} f^{(n)} = f^*$. 但 $\tilde{f}$ 满足方程,故对每个 $n > 0$ 有 $\tilde{f}^{(n)} = \tilde{f}$,所以 $\tilde{f} = f^*$.

定理 6

$$0 \leqslant \inf_{x\in E} f^*(x) \leqslant \sup_{x\in E} f^*(x) < \infty,$$

则齐次方程

$$f = Af, \quad f \in \mathscr{H} \tag{12}$$

的唯一非负有界解为零.

证明 设 $\tilde{f}$ 为(6)的非负有界解. 则存在 $c < \infty$ 使得

$$c \geqslant \sup_x \tilde{f}(x) \geqslant \sup_x f^*(x) \geqslant \inf_x f^*(x).$$

因此

$$0 \leqslant \tilde{f} \leqslant c\frac{f^*}{\inf_x f^*(x)} = \left(\frac{c}{\sup_x f^*(x)}\right) f^*.$$

因此由定理 5, $\tilde{f} = f^*$.

其次,对方程(12)的任一非负有界解 $\tilde{f}$,因为 $\tilde{f} + f^*$ 为方程(6)的一非负解,由上段证明,$\tilde{f} + f^* = f^*$. 这就证明了 $\tilde{f} = 0$.

在叙述下面结果之前,先引入一些记号. 对给定的 $(E,\mathscr{E})$ 上的核 $K(x,\mathrm{d}y)$(未必非负),我们令

$$Kf(x) = \int_E K(x,\mathrm{d}y)f(y), \quad x \in E, f \in \mathscr{E},$$

$$fK(A) = f(x)K(x,A), \quad A \in \mathscr{E},$$

$$\varphi K(A) = \int_E \varphi(\mathrm{d}x)K(x,A), \quad A \in \mathscr{E}, \varphi \in \mathscr{L}_+.$$

注意,对函数 f 及测度 φ, $f\varphi$ 给出一个核,而 φf 给出一个常数. 当然,为了使上述记号有意义,对核 K 或函数类加上某些限制是必要的. 需要注意的是,我们所考虑的这些算子是在弱意义下,亦即,这些方程、不等式、函数与测度的极限以及核均是逐点意义下.

现在,我们转而研究方程(3)和(4). 此时,推论 2 可作如下推广:

定理 7 设 U 及 T 为 $(E,\mathscr{E})$ 上的二非负可测核.

(1) 对每个 $A \in \mathscr{E}$,记方程

$$f = Uf + T(\cdot, A), \quad f \in \mathscr{E}_+$$

的最小解为 $P(\cdot, A)$. 则对每个 $g \in \mathscr{E}_+$, $\int_E P(\cdot, \mathrm{d}y)g(y)$ 为方程

$$f = Uf + Tg, \quad f \in \mathscr{E}_+$$

的最小解.

(2) 对每个 $x \in E$, 记方程

$$\varphi = \varphi U + T(x, \cdot)$$

的最小解为 $Q(x, \cdot)$, 则对每个测度 v, vQ 是方程

$$\varphi = \varphi U + vT$$

的最小解.

证明 因为(1) 与(2) 的证明类似, 这里只证(1). 设

$$P(\cdot, A)^{(0)} = T(\cdot, A), \quad A \in \mathscr{E},$$

$$P(\cdot, A)^{(n+1)} = UP(\cdot, A)^{(n)} + T(\cdot, A), \quad A \in \mathscr{E}, n \geq 0. \tag{13}$$

则由定理 1 有

$$P(\cdot, A)^{(n)} \uparrow P(\cdot, A), \quad n \to \infty, A \in \mathscr{E}.$$

由归纳法及(13), 我们看到, 对每个 $n > 0$ 及 $x \in E$, $P(x, A)^{(n)}$ 为 $\mathscr{E}$ 上的一测度. 进而, 对每个 $n > 0$, 及 $g \in \mathscr{E}_+$,

$$P^{(0)}g = Tg, P^{(n+1)}g = UP^{(n)}g + Tg.$$

现在固定 $g \in \mathscr{E}_+$, 令

$$f^{(0)} = Tg, f^{(n+1)} = Uf^{(n)} + Tg, \quad n \geq 0.$$

显然有 $f^{(0)} = P^{(0)}g$. 假设 $f^{(n)} = P^{(n)}g$. 则

$$f^{(n+1)} = Uf^{(n)} + Tg = UP^{(n)}g + Tg = P^{(n+1)}g.$$

因此 $f^{(n)} = P^{(n)}g$ 对所有 $n \geq 0$ 成立. 现在令 $n \to \infty$ 由定理 1 即得结论.

下面结果称作**局部化定理**.

定理 8 设 U 为非负可测核, f^* 为方程

$$f(x) = \int_E U(x, \mathrm{d}y)f(y) + g(x), \quad x \in E \tag{14}$$

的最小解. 其次, 设 $G \subset E$, $\{f^*(x), x \in G$ (相应地, $x \in E$)$\}$ 为方

程

$$f(x)=\int_G U(x,\mathrm{d}y)f(y)+\int_{G^c}U(x,\mathrm{d}y)f^*(y)+g(x),$$

$$x\in G(\text{相应地},x\in E)\qquad(15)$$

的最小解.则

$$\bar{f}^*(x)=f^*(x),\quad x\in G(\text{相应地},x\in E).$$

证明 因为$(f^*(x):x\in G)$是方程(14)的解,所以也是方程(15)的解.由最小性有

$$\bar{f}^*(x)\leqslant f^*(x),\quad x\in G.$$

另一方面,由 f^* 的第一逐步逼近框架,有

$$f^{(0)}(x)=0\leqslant\bar{f}^*(x),\quad x\in G.$$

假设

$$f^{(n)}(x)\leqslant\bar{f}^*(x),\quad x\in G.$$

则

$$f^{(n+1)}(x)=\int_E U(x,\mathrm{d}y)f^{(n)}(y)+g(x)=$$

$$\int_G U(x,\mathrm{d}y)f^{(n)}(y)+\int_{G^c}U(x,\mathrm{d}y)f^{(n)}(y)+g(x)\leqslant$$

$$\int_G U(x,\mathrm{d}y)\bar{f}^*(y)+\int_{G^c}U(x,\mathrm{d}y)f^*(y)+g(x)=$$

$$f^*(x),\quad x\in G.$$

所以,当 $n\to\infty$ 时,

$$f^*(x)\uparrow f^{(n)}(x)\leqslant f^*(x),\quad x\in G.$$

§3 过程与停时

设$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间,$\boldsymbol{F}=(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant0}$为其上的子 σ - 域流.对一切$0\leqslant s<t,\mathscr{F}_s\subset\mathscr{F}_t$,令$\mathscr{F}_\infty=\bigvee_{t\geqslant0}\mathscr{F}_t$及

$$\mathscr{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s,\quad t\geqslant0,$$

$$\mathscr{F}_{t-}=\bigvee_{s<t}\mathscr{F}_s=\sigma(\bigcup_{s<t}\mathscr{F}_s),\quad t>0.$$

自然地定义$\mathscr{F}_{0-}=\mathscr{F}_0,\mathscr{F}_{\infty-}=\mathscr{F}_\infty$.一个流$F$称为**右连续的**,如果对每个$t\geqslant 0,\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$.显然,流$F_+=(\mathscr{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$是右连续流.

取值于Polish空间$(\mathbf{E},\mathscr{B}(E))$的随机过程$X=(X_t)_{t\geqslant 0}$称为$F$ - **适应的**,如果对每个$t\geqslant 0,X_t$为$\mathscr{F}_t$-可测的.令

$$F^0(X)=(\mathscr{F}_t^0(X))_{t\geqslant 0},\mathscr{F}_t^0(X)=\sigma(X_s,s\leqslant t),t\geqslant 0.$$

$F^0(X)$称为X的**自然流**.显然,X总是$F^0(X)$ - 适应的.如果X是$\mathbf{F}$ - 适应的,则对每个$t\geqslant 0,\mathscr{F}_t^0(X)\subset\mathscr{F}_t$.

随机过程X称为**可测过程**,如果作为(ω,t)的函数$X_t(\omega)$为$\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$ - 可测;称X为**循序(可测)过程**,如果对一切$t\in\mathrm{R}_+$,X限于$\Omega\times[0,t]$为$\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}([0,t])$ - 可测.显然,循序过程为可测且适应的,但逆命题一般不成立.

定理1 右连续(左连续)适应过程为循序过程.

证明 设$X=(X_t)$为右连续适应过程.对每个给定的$t\geqslant 0$,定义$\Omega\times[0,t]$上的一列过程$X^{(n)}$如下:

$$X_s^{(n)}(\omega)=$$

$$X_0(\omega)I_{[s=0]}+\sum_{k=1}^{2^n}X_{kt/2^n}(\omega)I_{[(k-1)t/2^n<s\leqslant kt/2^n]},$$

$s\in[0,t]$.则$X^{(n)},n\geqslant 1$,为$\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}([0,t])$ - 可测,且在$\Omega\times[0,t]$上有$\lim_{n\to\infty}X_s^{(n)}(\omega)=X_s(\omega)$.故限于$\Omega\times[0,t]$,$X$为$\mathscr{F}_t\times\mathscr{B}([0,t])$ - 可测,这表明X为循序过程.X为左连续情形证明类似.

$(\Omega,\mathscr{F})$上$\overline{\mathrm{R}}_+$值随机变量T称为F - **停时**,若对每个$t\geqslant 0$,$[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t$.设$T$为一停时.令

$$\mathscr{F}_T=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\forall t\in R_+,A[T\leqslant t]\in\mathscr{F}_t\},$$

$$\mathscr{F}_{T-}=\mathscr{F}_0\vee\sigma\{A[t<T]:A\in\mathscr{F}_t,t\in\mathrm{R}_+\}.$$

则$\mathscr{F}_T,\mathscr{F}_{T-}$均为$\sigma$ - 域.$\mathscr{F}_T$称为T - **前σ - 域**,$\mathscr{F}_{T-}$称为**严格T - 前σ - 域**.

定理2 设(X_t)为一循序过程,则对一切停时T,$X_TI_{[T<\infty]}$为

$\mathscr{F}_T$- 可测.

证明 由于对每个 $t \geqslant 0, T \wedge t \in \mathscr{F}_t$,故 $X_{T\wedge t}$ 作为$(\Omega,\mathscr{F}_t)$到$(\Omega \times [0,t],\mathscr{F}_t \times \mathscr{B}([0,t]))$中的可测映射:$\omega \to (\omega, T(\omega) \wedge t)$及$(\Omega \times [0,t],\mathscr{F}_t \times \mathscr{B}([0,t]))$到$(E,\mathscr{B}(E))$中的可测映射:$(\omega,s) \to X_s(\omega)$的复合,为$\mathscr{F}_t$- 可测的.

设 $A \in \mathscr{B}(E)$,则对任何 $t \geqslant 0$,

$[X_T I_{[T<\infty]} \in A][T \leqslant t] = [X_{T\wedge t} \in A][T \leqslant t] \in \mathscr{F}_t$,

又 $X_T I_{[T<\infty]} = \lim\limits_{n\to\infty} X_{T\wedge n} I_{[T\leqslant n]}$,从而 $X_T I_{[T<\infty]} \in \mathscr{F}_\infty$,故$[X_T I_{[T<\infty]} \in A] \in \mathscr{F}_T$.即 $X_T I_{[T<\infty]}$ 为 $\mathscr{F}_T$- 可测.

设 U, V 为 Ω 上两个 $\overline{\mathrm{R}}_+$ 值函数,且 $U \leqslant V$.定义

$[\![U,V]\!] = \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathrm{R}_+ : U(\omega) \leqslant t \leqslant V(\omega)\}$,

$[\![U,V [\![= \{(\omega,t) \in \Omega \times \mathrm{R}_+ : U(\omega) \leqslant t < V(\omega)\}$,…

注意,当 $V = +\infty$ 时,$[\![U,+\infty]\!] = [\![U,+\infty [\![$.若 U 及 V 是随机变量,则称$[\![U,V]\!]$,$[\![U,V [\![$,… 为**随机区间**.$[\![V]\!]$定义为$[\![V,V]\!]$,称为 V 的**图**.

定义 1 $\Omega \times \mathrm{R}_+$ 上的全体右连左极适应过程产生的 σ - 域称为**可选 σ - 域**,记为$\mathscr{O}$.$\Omega \times \mathrm{R}_+$ 上全体左连续适应过程产生的 σ - 域称为**可料 σ - 域**,记为$\mathscr{P}$.随机过程称为**可选的(可料的)**,如果它是$\mathscr{O}(\mathscr{P})$ - 可测的.

由定理 1 可知,可选过程与可料过程都为循序过程.

若 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 为一右连左极适应过程,则左极限过程 $X_- = (X_{t-})_{t\geqslant 0}$ 为可料过程.

定理 3 停时全体记为$\mathscr{T}$,则 $\mathscr{O} = \sigma\{[\![T,\infty [\![: T \in \mathscr{T}\}$

证明 令 $\mathscr{C} = \{[\![T,\infty [\![: T \in \mathscr{T}\}$.易见 $\mathscr{C} \subset \mathscr{O}$,有 $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{O}$,只需证 $\mathscr{O} \subset \sigma(\mathscr{C})$.

设(X_t)为右连左极适应过程.往证(X_t)为 $\sigma(\mathscr{C})$ - 可测.给定 $\varepsilon > 0$,令 $T_0^\varepsilon = 0$,并归纳定义$(T_n^\varepsilon)_{n\geqslant 1}$如下:

$T_{n+1}^\varepsilon = \inf\{t : t > T_n^\varepsilon(\omega), |X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_t(\omega)| \geqslant \varepsilon$

$$\text{或} \mid X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_{t-}(\omega) \mid \geqslant \varepsilon\}. \tag{1}$$

我们用归纳法证明一切 T_n^ε 为停时. 注意,(1) 右边集合是 R_+ 中对右极限封闭的集,从而对任何 $s \in R_+$,我们有

$$[T_{n+1}^\varepsilon = s] \subset [T_n^\varepsilon < s]([\mid X_{T_n^\varepsilon} - X_s \mid \geqslant \varepsilon] \cup [\mid X_{T_n^\varepsilon} - X_{s-} \mid \geqslant \varepsilon]) \subset [T_{n+1}^\varepsilon \leqslant s]. \tag{2}$$

由于

$$\bigcup_{s\leqslant t}[T_{n+1}^\varepsilon = s] = \bigcup_{s\leqslant t}[T_{n+1}^\varepsilon \leqslant s] = [T_{n+1}^\varepsilon \leqslant t],$$

由(2)得

$$[T_{n+1}^\varepsilon \leqslant t] = \bigcup_{s\leqslant t}\{[T_n^\varepsilon < s](\mid X_{T_n^\varepsilon} - X_s \mid \geqslant \varepsilon) \cup [\mid X_{T_n^\varepsilon} - X_{s-} \mid \geqslant \varepsilon]\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{r\in Q_t}\{[T_n^\varepsilon < r][\mid X_{T_n^\varepsilon} - X_r \mid > \varepsilon(1 - \frac{1}{m})]\},$$

其中 $Q_t = (Q \cap [0,t]) \cup \{t\}$. 假定 T_n^ε 为停时,由上式得 $[T_{n+1}^\varepsilon \leqslant t] \in \mathscr{F}_t$,从而 T_{n+1}^ε 也是停时.

显然 (T_n^ε) 单调增,且当 $T_{n+1}^\varepsilon(\omega) < \infty$ 时, $T_{n+1}^\varepsilon(\omega) > T_n^\varepsilon(\omega)$,此外 $\mid X_{T_{n+1}^\varepsilon} - X_{T_n^\varepsilon-}(\omega) \mid \geqslant \varepsilon$ 或 $\mid X_{T_{n+1}^\varepsilon}(\omega) - X_{T_n^\varepsilon}(\omega) \mid \geqslant \varepsilon$. 由于 $X(\omega)$ 在 $(0,\infty)$ 上左极限存在且有穷,故 $(T_n^\varepsilon(\omega))_{n\geqslant 1}$ 没有有穷聚点,从而 $T_n^\varepsilon(\omega) \uparrow +\infty$. 令

$$X^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} X_{T_n^\varepsilon} I_{[\![T_n^\varepsilon, T_{n+1}^\varepsilon [\![}.$$

由于对一切 $t \in [T_n^\varepsilon(\omega), T_{n+1}^\varepsilon(\omega))$, $\mid X_{T_n^\varepsilon(\omega)}(\omega) - X_t \mid < \varepsilon$,故对一切 $(\omega, t) \in \Omega \times R_+$,有 $\mid X_t^\varepsilon(\omega) - X_t(\omega) \mid < \varepsilon$,从而

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} X_t^\varepsilon(\omega) = X_t(\omega).$$

但易证 $X_{T_n^\varepsilon} I_{[\![T_n^\varepsilon, T_{n+1}^\varepsilon [\![}$ 为 $\sigma(\mathscr{C})$ - 可测(用 $\mathscr{F}_{T_n^\varepsilon}$- 可测简单函数逼近 $X_{T_n^\varepsilon}$),故 X^ε 为 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测. 从而 X 也 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测.

定理 4 令

$$\mathscr{C}_1 = \{A \times \{0\}: A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{A \times (s,t]: 0 < s < t, s,t \in Q_+, A \in \bigcup_{r<s}\mathscr{F}_r\},$$

$\mathscr{C}_2 = \{A \times \{0\} : A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{A \times [s,t) : 0 < s < t,$
$s,t \in Q_+, A \in \bigcup_{r<s}\mathscr{F}_r\}$

$\mathscr{C}_3 = \{A \times \{0\} : A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{]\!]S,\infty[\![: S \in \mathscr{T}\},$

则 $\sigma(\mathscr{C}_1) = \sigma(\mathscr{C}_2) = \sigma(\mathscr{C}_3) = \mathscr{P} \subset \mathscr{O}$.

证明 首先，$\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{P}$是显然的，故$\sigma(\mathscr{C}_1) \subset \mathscr{P}$. 另一方面，对每个左连续适应过程$(X_t)$，令

$$X_t^{(n)} = X_0 I_{[t=0]} + \sum_{k=0}^{\infty} X_{k/2^n} I_{]k/2^n < t \leq (k+1)/2^n]},$$

则$\lim_{n\to\infty} X_t^{(n)} = X_t$. 易见，对每个 $n \geq 1$，$(X_t^{(n)})$ 为 $\sigma(\mathscr{C}_1)$-可测，故(X_t)亦然，$\mathscr{P} \subset \sigma(\mathscr{C}_1)$，从而$\sigma(\mathscr{C}_1) = \mathscr{P}$.

其次，设 $A \in \mathscr{F}_r, r < s$，则有

$$A \times (s,t] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty} A \times [s + \frac{t-s}{n}, t + \frac{1}{m}),$$

$$A \times [s,t) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty} A \times (r + (1 - \frac{1}{n})(s-r), t - \frac{t-s}{n}].$$

这表明，$\mathscr{C}_1 \subset \sigma(\mathscr{C}_2)$，$\mathscr{C}_2 \subset \sigma(\mathscr{C}_1)$，故有$\sigma(\mathscr{C}_2) = \sigma(\mathscr{C}_1) = \mathscr{P}$.

我们有$\sigma(\mathscr{C}_3) \subset \mathscr{P}$，$\mathscr{C}_1 \subset \sigma(\mathscr{C}_3)$，$(A \times (s,t] =]\!]s_A, t_A]\!]$，$0 < s < t$，$A \in \bigcup_{r<s}\mathscr{F}_r)$，故有$\sigma(\mathscr{C}_3) = \mathscr{P}$. 最后，由于$\mathscr{C}_3$中元素为可选集，故$\mathscr{P} \subset \mathscr{O}$.

推论1 设 T 为一停时，在$[T < \infty]$上定义$f(\omega) = (\omega, T(\omega))$，则

$$f^{-1}(\mathscr{O}) = \mathscr{F}_T \cap [T, \infty],$$
$$f^{-1}(\mathscr{P}) = \mathscr{F}_{T-} \cap [T, \infty].$$

证明 我们只证第二式，第一式的证明类似. 设 $A \in \mathscr{F}_0$，则 $f^{-1}(A \times \{0\}) = A[T = 0] \in \mathscr{F}_{T-} \cap [T < \infty]$. 设 $S \in \mathscr{T}$，则

$$f^{-1}(]\!]S,\infty[\![) = [S < T < \infty] \in \mathscr{F}_{T-} \cap [T < \infty].$$

由定理3 $f^{-1}(\mathscr{P}) \subset \mathscr{F}_{T-} \cap [T < \infty]$. 反之，设 $A \in \mathscr{F}_0$，

则 $A[T<\infty]=f^{-1}(A\times \mathbf{R}_+)\in f^{-1}(\mathscr{P})$. 设 $A\in \mathscr{F}_t$,则

$$(A[t<T])[T<\infty]=f^{-1}(A\times(t,\infty))\in f^{-1}(\mathscr{P}).$$

因此,$\mathscr{F}_{T-}\cap[T<\infty]\subset f^{-1}(\mathscr{P})$,这就完成了证明.

推论 2 (1) 设 T 为一停时,则对任一可选过程 (X_t), $X_T I_{[T<\infty]}\in \mathscr{F}_T$. 反之,若实值随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_T$,则存在一可选过程, (X_t),使得 $\xi I_{[T<\infty]}=X_T I_{[T<\infty]}$.

(2) 设 T 为一宽停时,则对任一可选过程 (X_t), $X_T I_{[T<\infty]}\in \mathscr{F}_{T-}$. 反之,若实值随机变量 $\xi\in\mathscr{F}_{T-}$,则存在一可料过程, (X_t),使得 $\xi I_{[T<\infty]}=X_T I_{[T<\infty]}$.

证明 在 $[T<\infty]$ 上令 $f(\omega)=(\omega,T(\omega))$,则对任何过程 (X_t),限于 $[T<\infty]$, $X_T I_{[T<\infty]}$ 为 X 与 f 复合所得. 由推论 1 及 Doob 可测性定理即得欲证之结论.

上述结果不依赖于可测空间上赋予的概率测度. 以下设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{P})$ 为一给定概率空间.

一个流 $F=(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 称为**完备的**,如果 $\mathscr{F}_0$ 包含一切 P - 零概集. 若流 $F=(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 既完备又右连续,则称 $F=(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 满足**通常条件**.

定义 2 $\Omega\times\mathbf{R}_+$ 的一个集 A 叫做**不足道集**(关于概率测度 P),如果 A 在 Ω 上的投影 $\pi(A)$ 是 P - 零概集(不要求 $\pi(A)\in\mathscr{F}$,但要求 $\pi(A)\in\mathscr{F}^P$). 一个过程 X 叫做**不足道过程**,如果集合 $\{(\omega,t):X_t(\omega)\neq 0\}$ 为不足道集.

两个过程 $X=(X_t)$, $Y=(Y_t)$ 称为 **P - 无区别**(记为 $X=Y$),如果 $\{(\omega,t):X_t(\omega)\neq Y_t(\omega)\}$ 为 P - 不足道集,我们将两个无区别过程视为同一过程.

定理 5 设 $(\mathscr{F}_t)$ 完备,则一切不足道可测过程为可料过程.

证明 设 X 为一不足道可测过程, $A=\{\omega:\exists\, t\in\mathbf{R}_+$ 使得 $X_t\neq 0\}$,则 $P(A)=0$,且 $A\in\mathscr{F}_0$. 令

$$\mathscr{C}=\{C\times[t,\infty):C\in\mathscr{F},t\in\mathbf{R}_+\}.$$

易见，$\mathscr{C}$为一 π - 类，且 $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{F}\times\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$. 另一方面，令

$$\mathscr{H} = \{Y \in \mathscr{F}\times\mathscr{B}(\mathrm{R}_+): YI_{A\times\mathrm{R}_+}\ \text{为可料过程}\},$$

则对一切 $H \in \mathscr{C}$, $I_H \in \mathscr{H}$. 由单调类定理，$\mathscr{H}$即为 $\mathscr{F}\times\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$ - 可测过程全体. 特别地，$X = XI_{A\times\mathrm{R}_+}$ 为可料过程.

推论 3 设$(\mathscr{F}_t)$完备. 令 X 与 Y 为两个无区别的可测过程. 若 X 可选(可料)，则 Y 亦然.

证明 注意到 $Y = XI_{[X=Y]} + YI_{[X\neq Y]}$. 且 $I_{[X\neq Y]}$ 与 $I_{[X=Y]}$ 均为可料过程，即得欲证之结论.

定理 6 设$(\mathscr{F}_t)$完备. 则一切右连续适应过程为可选过程.

证明 设 X 为一右连续适应过程. 对任何 $\varepsilon > 0$，以 $\mathscr{A}$ 记满足下列条件的停时 S 的全体：存在一可选过程 $Y^{(S)}$，使得

$$\{(\omega,t): t \in [0,S(\omega)), |X_t(\omega) - Y_t^{(S)}(\omega)| \geqslant \varepsilon\}$$

为不足道集. 易见，$\mathscr{A}$ 非空(因为 $0 \in \mathscr{A}$)，且有下列性质：

(1) $S, T \in \mathscr{A} \Rightarrow S \vee T \in \mathscr{A}$;

(2) $S_n \in \mathscr{A}, n = 1,2,\cdots, S_n \uparrow S \Rightarrow S \in \mathscr{A}$;

(3) $S \in \mathscr{A}$, T 为一停时，$T = S$.a.s.$\Rightarrow T \in \mathscr{A}$.

由定理 5 存在 $T \in \mathscr{A}$，使得 $T = \text{ess sup}\mathscr{A}$. 往证 $T = +\infty$, a.s. 令

$$A = \{(\omega,t): t > T(\omega), |X_t(\omega) - X_{T(\omega)}(\omega)| \geqslant \varepsilon\}.$$

A 为循序集. 令 U 为 A 的初遇，由 X 的右连续性，有$[\![V]\!] \subset A$. 因此，U 为停时. 令

$$Y^{(U)} = Y^{(T)} I_{[\![0,T[\![} + X_T I_{[\![T,U[\![}.$$

则 $U \in \mathscr{A}$，且 $U \geqslant T$，从而 $U = T$.a.s.. 另一方面，仍由 X 的右连续性，在$[U < \infty]$上有 $T < U$. 这表明 $T = U = +\infty$ a.s. 由 $\mathscr{A}$的性质(iii)，$+\infty \in \mathscr{A}$. 令 $X^\varepsilon = Y^{(+\infty)}$，则 X^ε 为可选过程，且$\{(\omega, t): |X_t(\omega) - X_t^\varepsilon(\omega)| \geqslant \varepsilon\}$ 为不足道集. 取 $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$，令

$$\bar{Y} = \liminf_{n\to\infty} X^{\varepsilon_n}, \qquad Y = \bar{Y} I_{[|\bar{Y}|<\infty]}.$$

则 Y 为可选过程，且 X 与 Y 无区别，由推论 3，X 可选.

§ 4 离散型流

定义 1 假设

(i) $(\mathscr{G}_n)_{n\geq 0}$ 为一离散参数流，$\mathscr{G}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty}\mathscr{G}_n$；

(ii) τ 为非负随机变量，$(\tau_n)_{n\geq 0}$ 为一列严格增加的非负随机变量（即对任意 $n \geq 0, \tau_n < \infty \Rightarrow \tau_n < \tau_{n+1}$），且 $\tau_0 = 0, \tau_n \uparrow \tau$；

(iii) 对任意 $n \geq 1, \tau_n$ 为 $\mathscr{G}_n$ - 可测.

令

$$\mathscr{F}_t = \bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leq t < \tau_{n+1}]) \cup (\mathscr{G}_\infty \cap [\tau \leq t]) =$$
$$\{(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n[\tau_n \leq t < \tau_{n+1}]) \cup (A_\infty \cap [\tau \leq t]):$$
$$A_n \in \mathscr{G}_n, n \geq 0, A_\infty \in \mathscr{G}_\infty\}.$$

我们称 $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ 为**离散型流**.

定理 1 (1) $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)$ 为一右连续流.

(2) $\forall n \geq 1, \tau_n$ 为 $\boldsymbol{F}$ - 停时.

(3) 若 $\mathscr{G}'_n = \mathscr{G}_n \vee \mathscr{N}, \mathscr{F}'_t = \bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathscr{G}'_n \cap [\tau_n \leq t < \tau_{n+1}]) \cup (\mathscr{G}'_\infty \cap [\tau \leq t])$ 其中 $\mathscr{N}$ 为 P - 零概集全体产生的 σ - 域，则 $\boldsymbol{F}' = (\mathscr{F}'_t)$ 为 $\mathscr{F}$ 的通常化.

证明 令 $s < t, A \in \mathscr{F}_s$ 及

$$A = (\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k[\tau_k \leq s < \tau_{k+1}]) \cup A_\infty[\tau \leq s],$$

其中，$A_k \in \mathscr{G}_k, A_\infty \in \mathscr{G}_\infty$，则

$$A[\tau_n \leq t < \tau_{n+1}] = \{\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k[\tau_k \leq s < \tau_{k+1}] \cup$$
$$(A_n[\tau_n \leq s])\} \cap [\tau_n \leq t < \tau_{n+1}] \in$$
$$\mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leq t < \tau_{n+1}],$$
$$A[\tau \leq t] =$$
$$\{(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k[\tau_k \leq s < \tau_{k+1}]) \cup A_\infty[\tau \leq s]\} \cap$$
$$[\tau \leq t] \in \mathscr{G}_\infty \cap [\tau \leq t].$$

因此，$A \in \mathscr{F}_t$.从而$\mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_t$.往证$\mathscr{F}_t = \bigcap_n \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}}$.设$h$为$(\bigcap \mathscr{F}_{t+\frac{1}{n}})$－可测，则对一切$n \geqslant 1$.

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(n)} I_{[\tau_k \leqslant t+\frac{1}{n} < \tau_{k+1}]} + h_{\infty}^{(n)} I_{[\tau \leqslant t+\frac{1}{n}]},$$

$h_k^{(n)} \in \mathscr{G}_k, h_{\infty}^{(n)} \in \mathscr{G}_{\infty}$.令$h_k = \limsup_{n \to \infty} h_k^{(n)}$.对每个$\omega \in [\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]$，存在正整数$n_{\omega}$使得

$$n > n_{\omega} \Rightarrow \tau_k \leqslant t + \frac{1}{n} < \tau_{k+1} \Rightarrow h(\omega) =$$
$$h_k^{(n)}(\omega) = h_k(\omega).$$

显然，$h_k \in \mathscr{G}_k$.类似地，对$\omega \in [\tau \leqslant t], h(\omega) = h_{\infty}^{(n)}(\omega) = h_{\infty}(\omega), h_{\infty} \in \mathscr{G}_{\infty}$.故

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} h_k I_{[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]} + h_{\infty} I_{[\tau \leqslant t]} \in \mathscr{F}_t.$$

这表明$\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$.

对一切$n \geqslant 1, t \geqslant 0$，有

$$[\tau_n \leqslant t] =$$
$$(\bigcup_{k=n}^{\infty} [\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]) \cup [\tau \leqslant t] \in \mathscr{F}_t,$$

所以τ_n为停时.

第三个结论是显然的.

定理 2 为要$\mathscr{F}_{\infty} = \mathscr{G}_{\infty}$，必须且只需对每个$n \geqslant 0$，有

$$\mathscr{G}_n \cap [\tau_{n+1} = \infty] = \mathscr{G}_{\infty} \cap [\tau_{n+1} = \infty]. \tag{1}$$

证明 令$\mathscr{F}_{\infty} = \bigvee_{t \geqslant 0}^{\infty} \mathscr{F}_t, \mathscr{G}_{\infty} = \bigvee_{n \geqslant 0}^{\infty} \mathscr{G}_n$，易见$\mathscr{F}_{\infty} \subset \mathscr{G}_{\infty}$.

充分性.设$A \in \mathscr{G}_n$.则对每个$t \geqslant 0$有

$$A[\tau_n \leqslant t] = (\bigcup_{k=n}^{\infty} A[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]) \cup$$
$$(A[\tau \leqslant t]) \in \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}_{\infty}.$$

(我们顺便得到$\mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_{\tau_n}$).；因此，$A[\tau_n < \infty] \in \mathscr{F}_{\infty}$.另一方面，

$$A[\tau_n = \infty] = \bigcup_{k=1}^{n} A[\tau_{k-1} < \infty, \tau_k = \infty]. \tag{2}$$

由(1)，$A[\tau_k = \infty] = A_{k-1}[\tau_k = \infty], A_{k-1} \in \mathscr{G}_{k-1}$，已证$A_{k-1}[\tau_{k-1} <$

$\infty] \in \mathscr{F}_\infty$,故

$$A[\tau_{k-1} < \infty, \tau_k = \infty] = A_{k-1}[\tau_{k-1} < \infty][\tau_k = \infty] \in \mathscr{F}_\infty.$$

由(2)有 $A[\tau_n = \infty] \in \mathscr{F}_\infty$,从而 $A \in \mathscr{F}_\infty, \mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_\infty, \mathscr{G}_\infty \subset \mathscr{F}_\infty$.

必要性.对 $t \geqslant 0$ 及 $A \in \mathscr{F}_t$,有

$$A[\tau_{n+1} = \infty] = \{(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}]) \cup (A_n[\tau_n \leqslant t])\}[\tau_{n+1} = \infty], A_k \in \mathscr{G}_k.$$

故

$$A[\tau_{n+1} = \infty] \in \mathscr{G}_n \cap [\tau_{n+1} = \infty],$$

即

$$\mathscr{F}_t \cap [\tau_{n+1} = \infty] \subset \mathscr{G}_n \cap [\tau_{n+1} = \infty],$$

从而

$$\mathscr{G}_\infty \cap [\tau_{n+1} = \infty] = \mathscr{F}_\infty \cap [\tau_{n+1} = \infty] \subset \mathscr{G}_n \cap [\tau_{n+1} = \infty],$$

这表明(1)成立.

推论 1 (1) 对每个 $n, \mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_{\tau_n}$. (2)$\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_\infty$.

证明 (1) 由定理证明得到. (2) 由 $\mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_{\tau_n} \subset \mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{G}_\infty$ 立得.

定理 3 为要 $T \geqslant 0$ 为一停时,必须且只需对每个 $n \geqslant 0$, $\exists R_n \in \mathscr{G}_n$ 使得

$$T_{[T<\tau_{n+1}]} = (R_n)_{[R_n<\tau_{n+1}]}, \tag{3}$$

或等价地,下列任一条件成立:

$$T < \tau_{n+1} \Rightarrow R_n = T \text{ 和 } T \geqslant \tau_{n+1} \Rightarrow R_n \geqslant \tau_{n+1}, \tag{4}$$

$$R_n < \tau_{n+1} \Rightarrow T = R_n \text{ 和 } R_n \geqslant \tau_{n+1} \Rightarrow T \geqslant \tau_{n+1}, \tag{5}$$

$$T < \tau_{n+1} \Leftrightarrow R_n < \tau_{n+1} \Rightarrow T = R_n, \tag{6}$$

$$T \wedge \tau_{n+1} = R_n \wedge \tau_{n+1}. \tag{7}$$

证明 容易直接验证(3) ~ (7)之间的等价性.

充分性.对一切 $t \geqslant 0$,有

$$[T \leqslant t] = \{\bigcup_{n=0}^{\infty}([T \leqslant t][\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}])\} \cup$$
$$([T \leqslant t][\tau \leqslant t]) =$$
$$\{\bigcup_{n=0}^{\infty}([R_n \leqslant t][\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}])\} \cup$$
$$([T \leqslant t][\tau \leqslant t]),$$

这是因为在$[\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]$上

$$T \leqslant t \Rightarrow T < \tau_{n+1} \Rightarrow T = R_n,$$

以及

$$R_n \leqslant t \Rightarrow R_n < \tau_{n+1} \Rightarrow R_n = T.$$

由于$[R_n \leqslant t] \in \mathscr{G}_n$,我们有

$$[T \leqslant t] \in \mathscr{F}_\infty \subset \mathscr{G}_\infty.$$

故 T 为停时.

必要性.对一切 $n \geqslant 0, t \geqslant 0$ 及 $A \in \mathscr{F}_t$,有

$$A[t < \tau_{n+1}] =$$
$$\bigcup_{k=0}^{n} A_k[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}] \in \mathscr{G}_n \cap [t < \tau_{n+1}], \tag{8}$$

其中 $A_k \in \mathscr{G}_k, k = 0,1,\cdots,n$.令 $F_r = [r < \tau_{n+1}], r \in Q_+$.由(8)存在 $G_r \in \mathscr{G}_n$,使得

$$[T < r]F_r = G_r F_r. \tag{9}$$

无妨设$(G_r, r \in Q_+)$单调增.事实上,当 $r' < r$ 时,有 $F_{r'} \supset F_r$,且

$$G_{r'}F_r = G_{r'}F_{r'}F_r = [T < r']F_{r'}F_r =$$
$$[T < r']F_r \subset [T < r]F_r = G_r F_r.$$

故

$$[T < r]F_r = (\bigcup_{r' \leqslant r} G_{r'})F_r.$$

如必要,可用 $\bigcup_{r' \leqslant r} G_{r'}$ 代替 G_r.现在定义

$$R_n(\omega) = \inf\{r \in Q_+ : \omega \in G_r\}.$$

显然,$R_n \geqslant 0$,对 $t > 0$,$[R_n < t] = \bigcup_{r < t} G_r \in \mathscr{G}_n$,从而 $R_n \in \mathscr{G}_n$.

往征(6)成立. 若(6)不成立, $T(\omega)$ 与 $R_n(\omega)$ 中必有一个小于 $\tau_{n+1}(\omega)$ 且 $T(\omega) \neq R_n(\omega)$. 这时我们可取 $t < \tau_{n+1}(\omega)$, 使 $T(\omega) > t > R_n(\omega)$ 或 $R_n(\omega) > t > T(\omega)$. 在前一情形, 取 $r \in \mathrm{Q}_+$ 使得 $r < t$ 及 $\omega \in G_r$, 则 $\omega \notin [T < r]F_r$, 但 $\omega \in G_rF_r$. 这与(9)矛盾. 在后一情形, 取 $r \in \mathrm{Q}_+$ 使得 $T(\omega) < r < t$ 及 $\omega \notin G_r$, 则 $\omega \notin G_rF_r$, 但 $\omega \in [T < r]F_r$. 这也与(9)矛盾. 总之, (6)式必须成立.

定理 4 (1) 为要实值过程 $X = (X_t, t < \tau)$ 为可选过程, 必须且只需对每个 $n \geqslant 0$ 存在过程 $X^{(n)} \in \mathscr{G}_n \times \mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$ 及 $X^{(\infty)} \in \mathscr{G}_\infty \times \mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$, 使得

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)} I_{[\![\tau_n, \tau_{n+1}[\![} + X^{(\infty)} I_{[\![\tau, \infty[\![}. \tag{10}$$

(2) 为要实值过程 $X = (X_t, t < \tau)$ 为可料过程, 必须且只需对每个 $n \geqslant 0$ 存在过程 $X^{(n)} \in \mathscr{G}_n \times \mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$ 及 $X^{(\infty)} \in \mathscr{G}_\infty \times \mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$, 使得

$$X = X_0 I_{[\![0]\!]} + \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)} I_{]\!]\tau_n, \tau_{n+1}]\!]} + X^{(\infty)} I_{[\![\tau, \infty[\![}. \tag{11}$$

证明 由于 $\mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_{\tau_n}$, 充分性显然往证必要性.

(1) 由单调类定理, 只需对 $X = I_{[\![T, \infty[\![}$ 证明 1), 其中 T 为一停时. 设 $R_n \in \mathscr{G}_n$, $n \geqslant 0$. 满足定理 3 的(4)式. 令

$$X^{(n)} = I_{[\![R_n, \infty[\![},$$

则 $X^{(n)} \in \mathscr{G}_n \times \mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$, 且在 $[\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]$ 上, $T \leqslant t \Leftrightarrow R_n \leqslant t$ 即

$$X I_{[\![\tau_n, \tau_{n+1}[\![} = X^{(n)} I_{[\![\tau_n, \tau_{n+1}[\![}.$$

最后, 再注意到 $\mathscr{F}_\infty \subset \mathscr{G}_\infty$, 即得(10).

(2) 由单调类定理, 只需对 $X = I_{[\![0, T]\!]}$ 证明 2), 其中 T 为一停时. 现在令

$$X^{(n)} = I_{[\![0, R_n]\!]}.$$

同样地, 我们有 $X^{(n)} \in \mathscr{G}_n \times \mathscr{B}(\mathrm{R}_+)$, 且在 $[\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]$ 上, $T <$

$t \Leftrightarrow R_n < t$(例如 $T < t \Rightarrow T < t \leqslant \tau_{n+1} \Rightarrow T = R_n < t$),即

$$XI_{[\![\tau_n, \tau_{n+1}[\![} = X^{(n)} I_{[\![\tau_n, \tau_{n+1}[\![}.$$

最后,再注意到 $\mathscr{F}_\infty \subset \mathscr{G}_\infty$,即得(11)式.

定理 5 设 T 为一停时,则对每个 $n \geqslant 0$,有

$$\mathscr{F}_T \cap [\tau_n \leqslant T < \tau_{n+1}] = \mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leqslant T < \tau_{n+1}], \quad (12)$$

$$\mathscr{F}_T \cap [\tau \leqslant T] = \mathscr{G}_\infty \cap [\tau \leqslant T]. \quad (13)$$

证明 由于 $\mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_{\tau_n}$,我们有 $\mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leqslant T] \subset \mathscr{F}_T$,且

$$\mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leqslant T < \tau_{n+1}] \subset \mathscr{F}_T \cap [\tau_n \leqslant T < \tau_{n+1}].$$

另一方面,若 $A \in \mathscr{F}_T$ 则有可选过程

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)} I_{[\![\tau_n, \tau_{n+1}[\![} + X^{(\infty)} I_{[\![\tau, \infty[\![},$$

使得

$$I_{A[T<\infty]} = X_T I_{[T<\infty]},$$

$X^{(n)} \in \mathscr{G}_n \times \mathscr{B}(\mathbf{R}_+)$.在$[\tau_n \leqslant T < \tau_{n+1}]$上,有 $I_A = X_T^{(n)} = X_{R_n}^{(n)}$,于是

$$A[\tau_n \leqslant T < \tau_{n+1}] = [X_{R_n}^{(n)} = 1][\tau_n \leqslant T \leqslant \tau_{n+1}], \quad (14)$$

其中 $R_n \in \mathscr{G}_n$ 如定理3中所确定.由于$[X_{R_n}^{(n)} = 1] \in \mathscr{G}_n$,由(14)式知

$$\mathscr{F}_T \cap [\tau_n \leqslant T < \tau_{n+1}] \subset \mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leqslant T < \tau_{n+1}].$$

因此(12)式成立.类似可证(13)式成立.

推论 2 (1) 对每个 $n \geqslant 0$,$\mathscr{F}_{\tau_n} = \mathscr{G}_n$ 必须且只需

$$\mathscr{G}_n \cap [\tau_n = \tau] = \mathscr{G}_\infty \cap [\tau_n = \tau].$$

(2) 如果对每个 $n \geqslant 0$,$\mathscr{F}_{\tau_n} = \mathscr{G}_n$,则

$$\mathscr{F}_{\tau_n -} = \mathscr{G}_{n-1} \vee \sigma(\tau_n), \quad n \geqslant 1.$$

证明 (1) 对每个 $n \geqslant 0$,有

$$\mathscr{F}_{\tau_n} \cap [\tau_n < \tau] = \mathscr{F}_{\tau_n} \cap [\tau_n \leqslant \tau_n < \tau_{n+1}] =$$

$$\mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leqslant \tau_n < \tau_{n+1}] =$$

$$\mathscr{G}_n \cap [\tau_n < \tau]\mathscr{F}_{\tau_n} \cap [\tau_n = \tau] =$$
$$\mathscr{F}_{\tau_n} \cap [\tau \leqslant \tau_n] =$$
$$\mathscr{G}_\infty \cap [\tau \leqslant \tau_n] = \mathscr{G}_\infty \cap [\tau_n = \tau],$$

所以$\mathscr{F}_{\tau_n} = (\mathscr{G}_n \cap [\tau_n < \tau]) \cup (\mathscr{G}_\infty \cap [\tau_n = \tau])$.这就证明了(1)成立.

(2) 对每个 $n \geqslant 1, \tau_{n-1} < \tau \Rightarrow \tau_{n-1} < \tau_n$,故$\mathscr{F}_{\tau_{n-1}} \subset \mathscr{F}_{\tau_n -}$,且$\mathscr{G}_{n-1} \vee \sigma(\tau_n) \subset \mathscr{F}_{\tau_n -}$.另一方面,设 $A \in \mathscr{F}_t$ 则

$$A[t < \tau_n] = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k[\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}], A_k \in \mathscr{G}_k, 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

所以,$A[t < \tau_n] \in \mathscr{G}_{n-1} \vee \sigma(\tau_n)$.从而$\mathscr{F}_{\tau_n -} \subset \mathscr{G}_{n-1} \vee \sigma(\tau_n)$.

§5 补充与注记

Polish 空间的内容采用 Cohn[1] 的方式叙述,但一般的 Doob 可测性定理取自于 Doob[1].§1 的其余内容来自何声武、汪嘉冈和严加安[1].

最小非负解理论的系统叙述最早见于侯振挺和郭青峰[1].§2 采用了陈木法[2]的方式.后者适于状态非可数无限的情形.这里只是针对本书后续章节的需要作了取舍.

§3 的内容全部取材于何声武、汪嘉冈和严加安[1].内容取舍的原则是后续章节的需要.

离散型流理论亦主要来自于何声武、汪嘉冈和严加安[1].我们对离散型流的定义作了些微改动,因而相关结果的表述亦有所不同.改动离散型流定义的目的是为了适于一般跳跃过程理论的讨论.这里,若 $\tau = \infty$ a.e 即回到何声武、汪嘉冈和严加安[1]所论情形.

28 跳跃过程的鞅表示

§1 跳跃过程的定义及性质

定义 1 定义于样本空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$而取值于 Polish 空间$(E,\mathscr{E})$的随机过程$X=(X(t,\omega),0\leqslant t<\tau(\omega))$称为**跳跃过程**，若其轨道为$[0,\tau)$上的右连左极的阶梯函数且在$[0,\tau(\omega))$的每个有限闭子区间上至多只含有限多个跳跃，即$X$可表示为

$$X=X_0I_{[\![0,\tau_1[\![}+\sum_{n=1}^{\infty}X_nI_{[\![\tau_n,\tau_{n+1}[\![},0\leqslant t<\tau, \tag{1}$$

其中，

(i) $\tau_n\uparrow\tau$;

(ii) 对每个$n\geqslant0,\tau_n<\infty\Rightarrow\tau_n<\tau_{n+1}$(约定:$\tau_0=0$);

(iii) 对每个$n\geqslant1,X_n\neq X_{n-1}\Leftrightarrow\tau_n<\infty$.

事实上，对$n\geqslant1,\tau_n$是X的第n个跳跃时:

$$\tau_n=\inf\{t>\tau_{n-1}:X_t\neq X_{\tau_{n-1}}\},\quad n\geqslant1.$$

按通常的办法，通过状态空间E添加一个孤立点Δ，使过程X在整个R_+上都有定义:

$$X_t(\omega)=\Delta,\quad t\geqslant\tau(\omega). \tag{2}$$

回忆自然流$\boldsymbol{F}^0(X)=(\mathscr{F}_t^0(X))_{t\geqslant0}$的定义为

$$\mathscr{F}_t^0(X)=\sigma(X_s,s\leqslant t)=\sigma(X_{s\wedge t},s\geqslant0),t\geqslant0.$$

我们有

定理 1 (1) $\boldsymbol{F}^0(X)$ 为离散型流且对任意的 $t \geq 0$,

$$\mathscr{F}_t(X) =$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}(\mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}]) \cup (\mathscr{G}_\infty \cap [\tau \leqslant t]),$$

其中,$\mathscr{G}_0 = \sigma(X_0)$,$\mathscr{G}_n = \sigma(X_0, \tau_1, \cdots, \tau_n, X_1, \cdots, X_n)(n \geqslant 1)$,$\mathscr{G}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty}\mathscr{G}_n$.

(2) $\boldsymbol{F}^0(X)$ 为右连续流,$\tau_n, n = 1,2,\cdots$ 及 τ 为 $\boldsymbol{F}^0(X)$ - 停时.

(3) 对每个 $n \geqslant 0$,

$$\mathscr{F}^0_{\tau_n}(X) = \mathscr{G}_n;$$

$$\mathscr{F}^0_{\tau_n-} = \mathscr{G}_{n-1} \vee \sigma(\tau_n) = \sigma(X_0, \tau_1, \cdots, \tau_n; X_1, \cdots, X_{n-1}).$$

(4) 对每个 $\boldsymbol{F}^0(X)$ 停时 T,

$$\mathscr{F}^0_T = \sigma(X_{s\wedge T}, s \in \mathrm{R}_+) =$$

$$(\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leqslant T < \tau_{n+1}]) \cup (\mathscr{G}_\infty \cap [\tau \leqslant T]).$$

证明 (1) 因为在$[\tau_n \leqslant T < \tau_{n+1}]$上,对所有 $s \geqslant 0$ 有 $X_{s\wedge t} = X_{s\wedge\tau_n}$,由自然流的定义,对每个 $n \geqslant 0$,我们有

$$\mathscr{F}^0_t(X) \cap [\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}] =$$

$$\sigma(X_{s\wedge t}, s \geqslant 0) \cap [\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}] =$$

$$\sigma(X_{s\wedge\tau_n}, s \geqslant 0) \cap [\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}].$$

显然,对每个 $n \geqslant 0$,有

$$\sigma(X_{s\wedge\tau_n}, s \geqslant 0) = \sigma(X_0, \tau_1, \cdots, \tau_n; X_1, \cdots, X_n).$$

因此,对每个 $n \geqslant 0$,有

$$\mathscr{F}^0_t(X) \cap [\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}] =$$

$$\mathscr{G}_n \cap [\tau_n \leqslant t < \tau_{n+1}];$$

其次,因为在$[\tau \leqslant t]$上,由(1),(2)两式,有 $X_s = X_{s\wedge\tau}$ 对任意$s \geqslant 0$成立.故有

$$\sigma(X_{s\wedge\tau}, s \geqslant 0) = \sigma(X_0, \tau_1, \tau_2, \cdots; X_1, X_2, \cdots) =$$

$$\bigvee_{n=0}^{\infty}\mathscr{G}_n = \mathscr{G}_\infty.$$

所以

$$\mathscr{F}_t^0(X) \cap [\tau \leqslant t] = \sigma(X_{s \wedge t}, s \geqslant 0) \cap [\tau \leqslant t] =$$
$$\sigma(X_{s \wedge \tau}, s \geqslant 0) \cap [\tau \leqslant t] = \mathscr{G}_\infty \cap [\tau \leqslant t].$$

这便证明了 $\boldsymbol{F}^0(X)$ 为离散型流.

(2) 由(1)及定理27.4.1的(1),(2)即得 $\boldsymbol{F}^0(X)$ 为右连续流,且 $\tau_n, n = 1,2,\cdots$ 为 $\boldsymbol{F}^0(X)$ - 停时.再由 $\tau_n \uparrow \tau(n \to \infty)$ 知 τ 亦为 $\boldsymbol{F}^0(X)$ - 停时.

(3) 注意到定义1中的条件(ii)和(iii): $X_n \neq X_{n-1} \Leftrightarrow \tau_n < \tau$ 及(2)式,对每个 $n \geqslant 0$,我们有

$$\mathscr{G}_n \cap [\tau_n = \tau] = \mathscr{G}_\infty \cap [\tau_n = \tau],$$

因为在 $[\tau_n = \tau]$ 上 $X_m = X_n, \tau_m = \tau_n(m \geqslant n)$.从而由推论27.4.2的(1),(2)即得结论.

(4) 因为,对任 $G \in \mathscr{E}, A := (X_{s \wedge T} \in G)$,有 $A \cap (T \leqslant t) \in \mathscr{F}_t^0(X), A \in \mathscr{F}_T^0(X)$.故

$$\sigma(X_{s \wedge T}, s \in R_+) \subset \mathscr{F}_T^0(X) \tag{3}$$

反过来,先设 T 取可列值 $0 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots \leqslant \infty$.则,对任 $A \in \mathscr{F}_T^0(X)$,有

$$A = \bigcup_i A_i, A_i = A \cap [T = a_i] \in$$
$$\mathscr{F}_{a_i}^0(X) = \sigma(X_s, s \leqslant a_i), \quad i = 1,2,\cdots,$$

亦即

$$\mathscr{F}_T^0(X) \cap [T = a_i] \subset \sigma(X_s, s \leqslant a_i) \cap [T = a_i].$$

而

$$\sigma(X_s, s \leqslant a_i) \cap [T = a_i] =$$
$$\sigma(X_{s \wedge T}, s \in \mathrm{R}_+) \cap [T = a_i],$$

所以

$$\mathscr{F}_T^0(X) \subset \sigma(X_{s \wedge T}, s \in R_+). \tag{4}$$

综合(3),(4)两式即得结论当 T 取可列值时成立.一般地,令

$$T_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^k} I_{[(i-1)2^{-k} \leqslant T < i2^{-k}]} + \infty I_{[T=\infty]},$$

则 T_k 是可列值的，且 $T_k \downarrow T$. 因此，$\mathscr{F}_T^0(X) \subset \mathscr{F}_{T_k}^0(X)$. 由前面所证，$\mathscr{F}_{T_k}^0(X) = \sigma(X_{s \wedge T_k}, s \in R_+)$. 令

$$\Omega_k = \{\omega \in \Omega; X_{T+\delta}(\omega) = X_T(\omega), \delta \in [0, 2^{-k}]\}$$

显然，$\Omega_k \uparrow \Omega$(因为 X 为右连左极阶梯函数). 我们有

$$\mathscr{F}_{T_k}^0(X) \cap \Omega_k = \sigma(X_{s \wedge T}, s \in R_+) \cap \Omega_k,$$

所以

$$\mathscr{F}_T^0(X) \cap \Omega_k \subset \sigma(X_{s \wedge T}, s \in R_+) \cap \Omega_k,$$

由 k 的任意性，立得

$$\mathscr{F}_T^0(X) \subset \sigma(X_{s \wedge T}, s \in R_+). \tag{5}$$

综合(3)，(5) 两式立得第一等式. 第二等式由定理 27.4.5 立得.

推论 1 如果我们令 $Y_k = (\tau_1, \cdots, \tau_k; X_0, X_1, \cdots, X_k), k \geq 1$. 及 $Y_0 = X_0$. 则对每个 $\boldsymbol{F}^0(X)$ - 停时 T，存在一列函数 $s_1, s_2, \cdots$:

$$s_k : \mathrm{R}_+^{k-1} \times E^k \to \mathrm{R}_+ \ (k = 1, 2, \cdots),$$

使得

$$TI_{[T \leq \tau_1]} = (s_1(Y_0) \wedge \tau_1) I_{[T \leq \tau_1]};$$

对 $k = 2, 3, \cdots$,

$$TI_{[\tau_{k-1} < T \leq \tau_k]} = ((\tau_{k-1} + s_k(Y_{k-1})) \wedge \tau_k) I_{[\tau_{k-1} < T \leq \tau_k]}.$$

证明 由定理 27.4.3，对每个 $\boldsymbol{F}^0(X)$ - 停时 T，存在 $R_n \in \mathscr{G}_n, n \geq 0$，使得

$$TI_{[T < \tau_{n+1}]} = R_n I_{[R_n < \tau_{n+1}]}.$$

注意到 $\mathscr{G}_n = \sigma(X_0, \tau_1, \cdots, \tau_n; X_1, \cdots, X_n)$ $(n \geq 1)$, $\mathscr{G}_0 = \sigma(X_0)$，而$(E, \mathscr{E})$ 及$(\mathrm{R}_+^{k-1} \times E^k, \mathscr{B}(\mathrm{R}_+^{k-1}) \times \mathscr{E}^k)$ $(k \geq 1)$ 为 Polish 空间，由定理 27.1.4 存在可测函数

$$s'_k : (\mathrm{R}_+^{k-1} \times E^k, \mathscr{B}(\mathrm{R}_+^{k-1}) \times \mathscr{E}^k) \to (\mathrm{R}_+, \mathscr{B}(\mathrm{R}_+)) \quad (k \geq 1),$$

使得

$$TI_{[T < \tau_{n+1}]} = s'_n(Y_n) I_{[R_n < \tau_{n+1}]}.$$

或等价地，存在可测函数 $s_k:(R_+^{k-1}\times E^k,\mathscr{B}(R_+^{k-1})\times\mathscr{E}^k)\to(R_+,\mathscr{B}(R_+))(k\geqslant 1)$，使得

$$TI_{[T\leqslant\tau_1]}=[s_1(Y_0)\wedge\tau_1];$$

$$TI_{[\tau_{k-1}<T\leqslant\tau_k]}=((\tau_{k-1}+s_k(Y_{k-1}))\wedge\tau_k)I_{[\tau_{k-1}<T\leqslant\tau_k]},$$

对 $k=2,3,\cdots$，成立.

定理 2 如果过程 $Y=(Y(t,\omega),t\in R_+)$ 为关于 $F_0(X)$ 的可料过程且为零初值一致可积鞅，则 $Y(t,\omega)=0$ a.s. 对所有 $t\geqslant 0$ 成立.

证明 关于停时 $s\wedge\tau_1,t\wedge\tau_1(s\leqslant t)$，应用 Doob 可选定理，有

$$Y(s\wedge\tau_1,\omega)=E(Y(t\wedge\tau_1,\omega)\mid\mathscr{F}_{s\wedge\tau_1})\text{a.s.}$$

而 Y 是可料的，由定理 27.4.4 知，

$$Y=Y_0I_{[\![0]\!]}+\sum_{n=0}^{\infty}Y^{(n)}I_{]\!]\tau_n,\tau_{n+1}]\!]}+Y^{(\infty)}I_{]\!]\tau,\infty]\!]},$$

其中 $Y_0\in\mathscr{G}_0,Y^{(n)}\in\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(R_+)$. 于是，存在一决定性（亦即非随机）函数 $\varphi_1(x,t)$，使得在 $(\tau_1\geqslant t)$ 上有 $Y(t,\omega)=\varphi_1(X_0,t)$. 如果记 $F(X_0,t)=P(\tau_1>t\mid X_0)$，则

$$E[Y(t\wedge\tau_1,\omega)\mid\mathscr{F}_{s\wedge\tau_1}]=$$

$$\varphi_1(X_0,\tau_1)I_{[\tau_1\leqslant s]}+(\frac{F(X_0,t)}{F(X_0,s)}\varphi_1(X_0,t)-$$

$$\frac{1}{F(X_0,s)}\int_{(s,t]}\varphi_1(X_0,u)\mathrm{d}F(X_0,u))I_{[\tau_1>s]}.$$

因此，在 $[\tau_1>s]$ 上，有

$$\varphi_1(X_0,s)=\frac{F(X_0,t)}{F(X_0,s)}\varphi_1(X_0,t)-$$

$$\frac{1}{F(X_0,s)}\int_{(s,t]}\varphi_1(X_0,u)\mathrm{d}F(X_0,u).$$

令 $z(t)=\varphi_1(X_0,t)F(X_0,t),\mathrm{d}G_{X_0}(t)=\mathrm{d}F(X_0,t)/F(X_0,t)$. 则上式等价于

$$z(t) - z(s) = \int_{(s,t]} z(u)\mathrm{d}G_{X_0}(u), z(0) = 0,$$

其中 $G_{X_0}(u)$ 在任何区间 $[0,t](t < c(X_0) := \inf\{t: F(X_0,t) = 0\})$ 上有有界变差. 由 Elliott[1] 的引理13.4知, 上面积分方程的唯一(局部有界)解是 $z(t) = 0$. 因此 $\varphi_1(X_0,t) = 0, 0 \leqslant t < c$. 如果 $c < \infty$ 且 $F(X_0, c-) = 0$, 则因为 $F(X_0,t) = 0, t \geqslant c$, 有 $\varphi_1(X_0, t) = 0$ 对所有 $t \geqslant 0$ 成立; 如果 $c < \infty$ 且 $P(\tau_1 = c \mid X_0) = F(X_0, c-) > 0$, 则关于 $0, \tau_1$ 应用 Doob 停时定理, 并注意到 $\varphi_1(X_0,t) = 0, t < c$, 我们有 $0 = E[\varphi_1(X_0,\tau_1)I(\tau_1 = c) \mid X_0] = \varphi_1(X_0, c)F(X_0, c-)$. 因此 $\varphi_1(c, X_0) = 0$, 综上也就证明了 $Y^{(0)} = \varphi_1 \equiv 0$. 同样地, 我们可用归纳法证明, 在 $[\![\tau_k, \tau_{k+1}[\![$ 上有 $Y^{(k)} = 0, k = 0, 1, \cdots, \infty$.

§2 单跳跃过程及其鞅

为了分析跳跃过程的鞅, 我们先来详细研究单跳跃情形. 一般跳跃过程可分解为单跳跃过程的和.

单跳跃过程是指形如

$$X = X_0 I_{[\![0,\tau_1[\![} + X_1 I_{[\![\tau_1,\infty[\![}$$

的过程. 由于 $(E, \mathscr{E})$ 为 Polish 空间, 不妨假定存在 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上一族概率测度 $P_x, x \in E$ 满足: 对任意的 $A \in \mathscr{F}^0_\infty$, $x \to P_x(A)$ 为 $\mathscr{E}$-可测的; 对任意的 $x \in E$,

$$P_x(A) = P(A \mid X_0 = x), \quad A \in \mathscr{F}^0_\infty.$$

(参见严加安[1]). 对 $(E, \mathscr{E})$ 上的概率测度 μ, 我们定义 $(\Omega, \mathscr{F}^0_\infty)$ 上的概率测度 P_μ:

$$P_\mu(\cdot) = \int_E P_x(\cdot)\mu(\mathrm{d}x).$$

再令 $\mathscr{F}^\mu_t$ 为 $\mathscr{F}^0_t$ 关于测度 P_μ 的完备化. 定义流 $\boldsymbol{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$:

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\mu \in \mathcal{P}(E)} \mathcal{F}_t^{\mu}, \quad t \geqslant 0,$$

其中,$\mathcal{P}(\mathbf{E})$ 为$(\mathbf{E},\mathscr{E})$上概率测度的集合.令

$$F(x,t) := P_x(\tau_1 > t), \quad c(x) := \inf\{t : F(x,t) = 0\}.$$

因此,$P_x(\tau_1 \leqslant c(x)) = 1$.我们分如下三种情况讨论:

情形 1:$c(x) = \infty$;

情形 2:$c(x) < \infty$ 且 $F(x,c-) = 0$;

情形 3:$c(x) < \infty$ 且 $F(x,c-) > 0$.

这里 $F(x,c-)$ 记 $F(x,t)$ 在 $t = c$ 的左极限:$F(x,c-) = \lim\limits_{t \uparrow c} F(x,t)$.

现在我们再考察 F - 适应一致可积鞅.我们知道任一 F - 适应一致可积鞅 $M = (M_t, t \in R_+)$ 有如下形式:

$$M_t = E[M_\infty \mid \mathcal{F}_t], \quad t \in R_+$$

其中 M_∞ 为可积 $\mathcal{F}_\infty$- 可测随机变量.注意到这时 $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_1 =: \sigma(X_0, \tau_1, X_1)$.于是,由定理 27.1.4 知,存在可测函数 h 满足 $M_\infty = h(X_0, \tau_1, X_1)$ 且

$$E \mid h(X_0, \tau_1, X_1) \mid < \infty.$$

由条件期望的定义,一致可积鞅 M_t 有如下具体表达式

$$M_t = E[h(X_0, \tau_1, X_1) \mid \mathcal{F}_t] = \tag{1}$$

$$I_{\{t \geqslant \tau_1\}} h(X_0, \tau_1, X_1) + I_{\{t < \tau_1\}} \frac{1}{F(X_0, t)} \times$$

$$\int_{[0,t] \times E} h(X_0, s, x) G(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \tag{2}$$

其中,$G(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = P(\tau_1 \in \mathrm{d}t, X_1 \in \mathrm{d}x \mid X_0)$ 为(τ_1, X_1)关于 X_0 的条件分布.

一个过程(M_t)称为 F - **局部鞅**,如果存在 F - 停时增列 $T_n \uparrow \infty$ a.s.使得对每个 n,$M_t^{T_n} := M_{t \wedge T_n}$ 是一致可积鞅.而(T_n)称为**局部化停时列**.

我们称一个数列(s_n)为**尾定的**,如果存在 n_0 使得当 $n \geqslant n_0$ 时,$s_n = s_{n_0}$.称$(E,\mathscr{E})$上的可测函数列(s_n)**具性质(P)**,若

(i) $0 \leqslant s_n(x) \uparrow c(x), \quad x \in E$;

(ii) 对每个 $x \in (x: F(x, c(x)-) > 0)$,序列$(s_n(x))_{n \geqslant 1}$是尾定的.

定理 1 设 $M = (M_t)t_{n \geqslant 0}$ 是一 F - 局部鞅.则

(1) $M_t = M_{t \wedge \tau_1}$ a.s..

(2) 存在$(E, \mathscr{E})$上具性质(P)的可测函数列$(s_n)_{n \geqslant 1}$使得$(M_{t \wedge s_n(X_0)})(n \geqslant 1)$为一致可积鞅.

证明 (1) 注意到(1)式,任何一致可积鞅 M 满足:$M_t = M_{t \wedge \tau_1}$ a.s.因此,如果$(T_n)_{n \geqslant 1}$为局部化停时列.则

$$M_t = \lim_{n \to \infty} M_{t \wedge T_n} = \lim_{n \to \infty} M_{t \wedge T_n \wedge \tau_1} = M_{t \wedge \tau_1} \text{ a.s.}.$$

(2) 设$(T_n)_{n \geqslant 1}$为 F - 局部鞅 M 的局部化停时列.若 $T_k \geqslant \tau_1$,对某 k 成立,则由(1)有

$$M_{t \wedge T_k} = M_{t \wedge T_k \wedge \tau_1} = M_{t \wedge \tau_1} = M_t \text{ a.s.},$$

因而,M 为一致可积鞅.假设对所有 $k \geqslant 1$ 有 $P(T_k < \tau_1) > 0$.由推论 1.1 存在$(E, \mathscr{E})$上可测函数列$(s_n)_{n \geqslant 1}$,使得

$$T_k \wedge \tau_1 = s'_k(X_0) \wedge \tau_1, s'_k(X_0) \wedge c(X_0) \uparrow c(X_0),$$

因为 $T_k \uparrow \infty$.令

$A = (F(X_0, c(X_0)-) > 0: s'_n(X_0) < c(X_0) < \infty, \forall n \geqslant 1)$.若 $P(A) > 0$,则 $P(A[\tau_1 = c(X_0)]) > 0$,且在 $A[\tau_1 = c(X_0)]$上,$T_k = s'_k(X_0)$对所有 k 成立.注意到 $T_n \uparrow \infty$ a.s.,我们有 $P(A) = 0$. 从而,$s_n(X_0) := s'_n(X_0) \wedge c(X_0) \uparrow c(X_0)$, P - a.s. 且在$(F(X_0, c(X_0)-) > 0, c(X_0) < \infty)$上$(s_n(X_0))_{n \geqslant 1}$是尾定的.又由 1) 有

$$M_{t \wedge T_k} = M_{t \wedge T_k \wedge \tau_1} = M_{t \wedge s'_k(X_0) \wedge \tau_1 \wedge c(X_0)} = M_{t \wedge s_k(X_0) \wedge \tau_1} = M_{t \wedge s_k(X_0)}, P - \text{a.s.}$$

因此$(M_{t \wedge s_k(X_0)})$对所有 k 为一致可积鞅.

推论 1 (1) 在情形 1 和 2, M 关于 P_x 是$[0, c(x))$上的鞅(x

$\in E$).

(2) 在情形 3, M 关于 P_x 是一致可积鞅($x \in E$).

证明 (1) 注意到定理的(2)及 $P_x(s_n(X_0) = s_n(x), n \geqslant 1) = 1$ 知($M_{t\wedge\tau_1\wedge s_n(x)}$) 关于 P_x 为一致可积鞅. 再由 $s_n(x) \uparrow c(x)$ 即得(1).

(2) 在情形 3, 进一步由($s_n(x)$)是尾定的有, ($M_{t\wedge c(x)}$) 关于 P_x 为一致可积鞅. 再由定理的(1),

$$M_t = M_{t\wedge\tau_1} = M_{t\wedge\tau_1\wedge c(x)} = M_{t\wedge c(x)}, P_x - \text{a.s.}.$$

所以, M 关于 P_x 是一致可积鞅($x \in E$).

现在, 我们引入与跳跃过程 X 相关的点过程族. 设 $A \in \mathscr{E}$. 对任 $t \geqslant 0$, 令

$$p(t,A) := I_{(t\geqslant\tau_1)} I_{(X_1\in A)},$$

$$\tilde{p}(t,A) := -\int_{(0,\tau_1\wedge t]} \frac{\mathrm{d}F^A(X_0,s)}{F(X_0,s-)},$$

$$q(t,A) := p(t,A) - \tilde{p}(t,A).$$

其中 $F^A(X_0,s) = P(\tau_1 > s, X_1 \in A \mid X_0)$.

定理 2 对每个 $A \in \mathscr{E}$, $\tilde{p}(t,A)$ 是唯一的可料过程使得过程 $t \to q(t,A)$ 是一个 F - 鞅.

证明 由定理 27.4.6, $\tilde{p}(t,A)$ 显然是可料过程. 取 $s < t$, 注意到当 $s \geqslant \tau_1$ 时, $p(t,A) - p(s,A) = 0$, 直接计算得,

$$\mathbf{E}(p(t,A) - p(s,A) \mid \mathscr{F}_s) =$$

$$I_{[s<\tau_1]} \frac{1}{F(X_0,s)}(F^A(X_0,s) - F^A(X_0,t)).$$

另一方面,

$$E[\tilde{p}(t,A) - \tilde{p}(s,A) \mid \mathscr{F}_s] =$$

$$I_{[s<\tau_1]}\Big\{-\frac{F(X_0,t)}{F(X_0,s)}\int_{(s,t]}\frac{1}{F(X_0,u-)}\mathrm{d}F^A(X_0,u) +$$

$$\frac{1}{F(X_0,s)}\int_{(s,t]}\int_{(s,r]}\frac{1}{F(X_0,u-)}\mathrm{d}F^A(X_0,u)\mathrm{d}F^A(X_0,r)\Big\}.$$

交换大括号内积分顺序, 上式右端第二项为

$$\frac{1}{F(X_0,s)}\int_{(s,t]}\frac{1}{F(X_0,u-)}\int_{[u,t]}\mathrm{d}F(X_0,r)\mathrm{d}F^A(X_0,u)=$$

$$\frac{1}{F(X_0,s)}\int_{(s,t]}\frac{1}{F(X_0,u-)}(F(X_0,t)-$$

$$F(X_0,u-))\mathrm{d}F^A(X_0,u)=$$

$$\frac{F(X_0,t)}{F(X_0,s)}\int_{(s,t]}\frac{1}{F(X_0,u-)}\mathrm{d}F^A(X_0,u)+$$

$$\frac{1}{F(X_0,s)}(F^A(X_0,t)-F^A(X_0,s)).$$

因此,

$$\mathbf{E}[\tilde{p}(t,A)-\tilde{p}(s,A)\mid\mathscr{F}_s]=\mathbf{E}[p(t,A)-p(s,A)\mid\mathscr{F}_s].$$

这便证明了 $q(t,A)=p(t,A)-\tilde{p}(t,A)$ 是鞅. 再由定理 2.1.4 知,使 $q(t,A)$ 成为鞅的可料过程是唯一的.

我们称 $\tilde{p}(t,A)$ 为 $p(t,A)$ 的**可料对偶投影**(或**补偿子**).

现在我们来定义关于鞅类 $q(t,A)$ 的**随机积分**. 首先,令

$$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})=(\Omega\times\mathrm{R}_+\times E,\mathscr{G}_0\times\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)\times\mathscr{E}).$$

定义由 $p(t,A)$ 生成的随机测度

$$\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x):=\delta_{(\tau_1,X_1)}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)I_{[\tau_1<\infty]},$$

亦见

$$\mu([0,t]\times A)=\delta_{(\tau_1,X_1)}([0,t]\times A)=p(t,A).$$

对任意可测函数 $g:(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})\to(\mathrm{R},\mathscr{B}(\mathrm{R}))$,定义

$$\int_{\mathrm{R}_+\times E}g\mathrm{d}\mu:=\int_{\mathrm{R}_+\times E}g(t,x)\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=g(\tau_1,X_1)$$

(约定,$g(\infty,\cdot)=g(\cdot,\Delta)=0$). 引入记号

$$\|g\|_{L_1(\mathrm{d}\mu)}:=$$

$$\mathbf{E}\int_{\mathrm{R}_+\times E}|g(t,x)|\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\mathbf{E}|g(\tau_1,X_1)|,$$

$$L_1(\mathrm{d}\mu)=\{g:(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})\to(\mathrm{R},\mathscr{B}(\mathrm{R})):\|g\|_{L_1(\mathrm{d}\mu)}<\infty\},$$

$$L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)=$$

$\{g: gI_{[t\le T_n]}\in L_1(\mathrm{d}\mu)$ 对某停时增列 $T_n\uparrow\infty$ a.s.成立$\}$.

类似地定义由 $p(t,A)$ 生成的随机测度 ν:

$$\nu([0,t]\times A):=$$
$$\int_{[0,t]\times A} I_{[s\le\tau_1]}\frac{1}{F(X_0,s-)}G(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x),$$

其中,$G(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=P(\tau_1\in\mathrm{d}t,X_1\in\mathrm{d}x\mid X_0)$ 为(τ_1,X_1)关于 $\mathscr{G}_0$ 的条件分布.易见,

$$\nu((0,t]\times A)=\bar{p}(t,A).$$

对可测函数 $g:(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})\to(\mathrm{R},\mathscr{B}(\mathrm{R}))$,

$$\int_{\mathrm{R}_+\times E} g\mathrm{d}\nu:=$$
$$\int_{\mathrm{R}_+\times E} g(s,x)I_{[s\le\tau_1]}\frac{1}{F(X_0,s-)}G(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

(同样约定:$g(\infty,\cdot)=g(\cdot,\Delta)=0$).记

$$\|g\|_{L_1(\mathrm{d}\nu)}:=\mathbf{E}\int_{\mathrm{R}_+\times E}|g(t,x)|\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x),$$

$$L_1(\mathrm{d}\nu)=$$
$$\{g:(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})\to(\mathrm{R},\mathscr{B}(\mathrm{R})):\|g\|_{L_1(\mathrm{d}\nu)}<\infty\},$$

$$L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\nu)=$$

$\{g: gI_{[t\le T_n]}\in L_1(\mathrm{d}\nu)$ 对某停时增列 $T_n\uparrow\infty$ a.s.成立$\}$.

同样地,可定义$\int_{R_+\times E} g\mathrm{d}G$, $\|g\|_{L_1(\mathrm{d}G)}$, $L_1(\mathrm{d}G)$ 及 $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}G)$.

定理3 $L_1(\mathrm{d}u)=L_1(\mathrm{d}\nu)=L_1(\mathrm{d}G)$; $L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)=L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\nu)=L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}G)$,而且对任可测函数 $g:(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})\to(\mathrm{R},\mathscr{B}(\mathrm{R}))$,

$$\|g\|_{L_1(\mu)}=\|g\|_{L_1(\nu)}=\|g\|_{L_1(\mathrm{d}G)}. \tag{2}$$

证明 我们只需证明(2)式成立,事实上

$$\|g\|_{L_1(\mathrm{d}\nu)}=\mathbf{E}[\mathbf{E}_{X_0}[\int_{\mathrm{R}_+\times E}|g(s,x)|I_{[s\le\tau_1]}\times$$
$$\frac{1}{F(X_0,s-)}G(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)]]=$$

$$- \mathbf{E}\int_{R_+\times E}\int_{R_+} I_{[s\leqslant t]} |g(s,x)| \times$$

$$\frac{1}{F(X_0,s-)}\mathrm{d}F(X_0,t)G(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) =$$

$$- \mathbf{E}\int_{R_+\times E} |g(s,x)| \frac{1}{F(X_0,s-)} \times$$

$$\int_{\bar{R}_+} I_{[s\leqslant t]}\mathrm{d}F(X_0,t)G(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) =$$

$$\mathbf{E}\int_{R_+\times E} |g(s,x)| G(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \| g \|_{L_1(\mathrm{d}G)}.$$

其次,

$$\| g \|_{L_1(\mathrm{d}G)} = \mathbf{E}\int_{R_+\times E} |g(s,x)| G(ds,dx) =$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}_{X_0} |g(\tau_1,X_1)|] =$$

$$\mathbf{E} |g(\tau_1,X_1)| = \| g \|_{L_1(\mathrm{d}\mu)}.$$

定理 4

$$L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}G) =$$
$$\{g:(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})\to(\mathrm{R},\mathscr{B}(\mathrm{R})):\text{存在}(E,\mathscr{E})\text{上的具性质(P)}$$
$$\text{的序列}(s_n)_{n\geqslant 1}\text{使得},gI_{[s\leqslant s_n(X_0)]}\in L_1(\mathrm{d}G)\}. \tag{3}$$

证明 设 $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}G)$. 令 $(T_n)_{n\geqslant 0}$ 为其局部化停时列. 类似于定理 1 的证明, 存在具性质(P)的可测函数列 $(s_n)_{n\geqslant 1}$, 使得

$$T_n \wedge \tau_1 = s_n(X_0) \wedge \tau_1, n \geqslant 1.$$

于是

$$\mathbf{E}\int_{R_+\times E} |g(s,x)| I_{[s\leqslant s_k(X_0)]}\mathrm{d}G =$$

$$\mathbf{E} |g(\tau_1,X_1)| I_{[\tau_1\leqslant s_k(X_0)]} =$$

$$\mathbf{E} |g(\tau_1,X_1)| I_{[\tau_1\leqslant T_k]} =$$

$$\mathbf{E} |g(\tau_1,X_1)| I_{[\tau_1\leqslant T_k\wedge\tau_1]} =$$

$$\mathbf{E} |g(\tau_1,X_1)| I_{[\tau_1\leqslant T_k]} =$$

$$\mathbf{E}\int_{R_+\times E} |g(s,x)| I_{[s\leqslant T_k]}\mathrm{d}G < \infty. \tag{4}$$

所以,g 属于(3) 式右端.

反过来,如果 g 属于(3) 式右端.我们定义停时列$(T_n)_{n>0}$:

$$T_k := \begin{cases} s_k(X_0), & 若\ c(X_0) = \infty; \\ s_k(X_0) + kI_{[\tau_1 \leqslant s_k(X_0)]}, & 若\ c(X_0) < \infty. \end{cases}$$

则 $T_k \uparrow \infty\ P-$a.s.且有 $T_n \wedge \tau_1 = s_n(X_0) \wedge \tau_1$.逆转上面(4) 式立得 $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}G)$.

对任 $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}G)$,我们来定义过程$(M_t^g)_{t\in R_+}$:

$$M_t^g := \int_{\mathrm{R}_+\times E} I_{[s\leqslant t]}g(s,x)\mathrm{d}(\mu-\nu) =$$

$$\int_{\mathrm{R}_+\times E} I_{[s\leqslant t]}g(s,x)\mathrm{d}\mu - \int_{\mathrm{R}_+\times E} I_{[s\leqslant t]}g(s,x)\mathrm{d}\nu.$$

由上式右端两积分的定义,进一步有

$$M_t^g = g(\tau_1, X_1)I_{[t\geqslant\tau_1]} +$$

$$\int_{[0,t\wedge\tau_1]\times E} g(s,x)\frac{1}{F(X_0,s-)}G(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x). \tag{5}$$

类似于定理 2,通过直接计算容易证明如下结果.

定理 5 对每个 $g \in L_1(\mathrm{d}\mu)$,$(M_t^g)_{t\geqslant 0}$ 是鞅.而对每个 $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$,$(M_t^g)_{t\geqslant 0}$ 是局部鞅.

现在我们再来考虑一致可积鞅(M_t).由(1)式,如果 $M_0 = 0$ a.s.,则由上式(注意到 $\tau_1 > 0$ a.s.)有

$$\int_{(0,\infty]\times E} h(X_0,s,x)\mathrm{d}G = 0,$$

等价地,

$$\int_{(0,t]\times E} h(X_0,s,x)\mathrm{d}G + \int_{(t,\infty]\times E} h(X_0,s,x)\mathrm{d}G = 0.$$

于是满足 $M_0 = 0$ a.s.的一致可积鞅(M_t)有如下形式:

$$M_t = I_{[t\geqslant\tau_1]}h(X_0,\tau_1,X_1) - I_{[t<\tau_1]}\frac{1}{F(X_0,t)}\int_{(0,t]\times E} h\mathrm{d}G. \tag{6}$$

我们的目的是寻求被积函数 g 使得 $M_t = M_t^g$ 对所有 t 成立. 为了考察 g 的形式,先来看一个特例.

例　取 $E = R$ 且设 $G(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$ 有密度 ψ,即

$$G(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x) = \psi(\omega,s,x)\mathrm{d}s\mathrm{d}x.$$

于是由(5)式,对 $g \in L_1(\mathrm{d}\mu)$ 有

$$M_t^g = I_{[t\geqslant\tau_1]}(g(\tau_1,X_1) - \int_0^{\tau_1}\int_R \frac{1}{F(X_0,s)}g(s,x)\psi(\omega,s,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s) + I_{[t<\tau_1]}\int_0^t\int_R \frac{1}{F(X_0,s)}g(s,x)\psi(s,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

如果 M_t 是一个鞅,即

$$M_t = I_{[t\geqslant\tau_1]}h(\tau_1,X_1) - I_{[t<\tau_1]}\frac{1}{F(X_0,t)}\int_{(0,t]\times R} h\mathrm{d}G.$$

则,欲使 $M_t = M_t^g$,必有 $I_{[t\geqslant\tau_1]}$ 的系数相同,即

$$h(t,x) = g(t,x) - \int_0^t\int_R \frac{1}{F(X_0,s)}g(s,x)\psi(s,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s. \tag{7}$$

定义 $\eta(t) = g(t,x) - h(t,x)$(注意,右端第二式表明它不依赖于 x)且令

$$f(s) = \int_R\psi(s,x)\mathrm{d}x, \gamma(s) = \int_R h(s,x)\psi(s,x)\mathrm{d}x.$$

则由(7)有

$$\eta(t) = \int_0^t\int_R \frac{1}{F(X_0,s)}(\eta(s) + h(s,x))\psi(s,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{f(s)}{F(X_0,s)}\eta(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{1}{F(X_0,s)}\gamma(s)\mathrm{d}s.$$

因此,$\eta(t)$ 满足线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\eta(t) =$$

$$\frac{f(t)}{F(X_0,t)}\eta(t)+\frac{1}{F(X_0,t)}\gamma(t),\ \eta(0)=0.$$

而这个方程有唯一解

$$\eta(t)=\int_0^t \exp\left(\int_s^t \frac{f(u)}{F(u)}\mathrm{d}u\right)\frac{1}{F(s)}\gamma(s)\mathrm{d}s=$$

$$\frac{1}{F(t)}\int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s.$$

其中后一等式来自这样的事实：$f(s)=-\dfrac{\mathrm{d}F(s)}{\mathrm{d}s}$.这表明

$$g(t,x)=$$

$$h(t,x)+\frac{1}{F(X_0,t)}\int_0^t\int_{\mathrm{R}} h(s,x)\psi(s,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

容易验证，对如此选择的 g 有 $M_t=M_t^g$.

一般地，我们有如下结果

定理 6 $M=(M_t)$ 为 F - 局部鞅且 $M_0=0$ 必须而且只需存在 $g\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$ 使得 $M_t=M_t^g$, $t\in\mathrm{R}_+$.

证明 我们已经证明了，对任意 $g\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$, M_t^g 是一局部鞅.反过来，假设 $M=(M_t)$ 为 F - 局部鞅且 $M_0=0$.由定理1的2)，存在 $(E,\mathscr{E})$ 上具性质(P)的可测函数列 $(s'_n)_{n\geq 1}$ 使得，$(M_{t\wedge s'_n(X_0)})(n\geq 1)$ 为一致可积鞅.令

$$s''_n(x):=\inf(t:F(x,t)<1/n),\quad n\geq 1;$$

$$s_n(x):=s'_n(x)\wedge s''_n,\quad n\geq 1.$$

容易验证，可测函数列 $(s_n)_{n\geq 1}$ 亦具性质(P)，且显然有 $(M_{t\wedge s_n(X_0)})_{t\geq 0}(n\geq 1)$ 为一致可积鞅.因此，对满足 $E\int |h| I_{[s\leq s_n(X_0)]}\mathrm{d}G<\infty(n\geq 1)$ 的某函数 h，(6)式成立.考虑由下式给出的函数 g：

$$g(t,z):=$$

$$h(t,z)+I_{[t<c(X_0)]}\frac{1}{F(t)}\int_{(0,t]\times E} h(s,x)G(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x).$$

我们可通过直接计算验证 $M_t = M_t^g$，且对任意 $n \geqslant 1$，

$$\int_{\mathrm{R}_+ \times E} |g| I_{[s \leqslant s_n(x_0)]} \mathrm{d}G \leqslant \int_{\mathrm{R}_+ \times E} |h| I_{[s \leqslant s_n(x_0)]} \mathrm{d}G +$$

$$\int \frac{1}{F(t)} I_{[t \leqslant s_n(x_0)]} \int_{[0,t] \times E} |h| \mathrm{d}G \mathrm{d}F(t) \leqslant$$

$$(1 + n) \int_{\mathrm{R}_+ \times E} |h| I_{[s \leqslant s_n(x)]} \mathrm{d}G.$$

注意到定理 4 及定理 3，便证明了 $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$.

注 1　当$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathscr{F}})$定义中的 $\mathscr{G}_0 = \sigma(X_0)$ 由有限多个随机变量生成的 σ - 域 $\mathscr{G}$ 取代，则只需作简明的相应修改，本节所有结果均成立，而且主要结果定理 6 的表达，除了被积函数 g 的明显修正外，没有变化.

§3　一般跳跃过程的局部鞅表示

对 §1 中定义的一般跳跃过程，我们定义相关的点过程族 $(p(t,A))_{t \geqslant 0, A \in \mathscr{E}}$：

$$p(t,A) = \sum_k I_{[t \geqslant \tau_k]} I_{[X_k \in A]}.$$

令

$$G_n(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) =$$
$$P(\tau_{n+1} \in \mathrm{d}t, X_{n+1} \in \mathrm{d}x \mid \mathscr{G}_n), \quad n \geqslant 0,$$
$$F_n(u) = G_n((u, +\infty], E), \quad n \geqslant 0.$$

又令

$$\tilde{p}(t,A) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{(\tau_k, \tau_{k+1}]} \frac{1}{F_k(u-)} G_k(\mathrm{d}u, A) +$$

$$\int_{(\tau_n, t]} \frac{1}{F_n(u-)} G_n(\mathrm{d}u, A), \quad \tau_n < t \leqslant \tau_{n+1};$$

$$\tilde{p}(t,A) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{(\tau_n,\tau_{n+1}]}\frac{1}{F_n(u-)}G_n(\mathrm{d}u,A),\quad \tau\leqslant t.$$

由定理 27.4.4 的 2) 知，$(\bar{p}(t,A))_{t\geq 0}$ 为可料过程.

定理 1 对任意的 $A\in\mathscr{E}$,令

$$q(t,A)=p(t,A)-\bar{p}(t,A),$$

则对每个固定的 n,A,过程 $q(t\wedge\tau_n,A)$ 为一鞅,亦称 $\bar{p}(t,A)$ 为 $p(t,A)$ 的可料对偶投影.

证明 类似于定理 2.2,可通过直接计算证明.

下面我们来定义关于鞅类 $q(t,A)$ 的随机积分.设

$$g(\omega,t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(\omega,t,x)I_{[\tau_n<t\leqslant\tau_{n+1}]},\tag{1}$$

其中,$g_n:(\widetilde{\Omega}_n,\widetilde{\mathscr{F}}_n)\to(\mathrm{R},\mathscr{B}(\mathrm{R}))$ 为可测函数,而

$$(\widetilde{\Omega}_n,\widetilde{\mathscr{F}}_n)=$$
$$(\Omega\times\mathrm{R}_+\times E,\mathscr{G}_n\times\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)\times\mathscr{E}))\quad(n\geqslant 0).$$

再由 27.4.6 知,对固定的 x,$(g(\omega,t,x))_{t\geqslant 0}$ 为可料过程.记由 $p(t,A)$ 及 $\bar{p}(t,A)$ 生成的随机测度分别为 μ 及 ν:

$$\mu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{(\tau_n,X_n)}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)I_{[\tau_n<\infty]},$$

$$\nu(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_n(t-)}G_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)I_{[\tau_n<t\leqslant\tau_{n+1}]}.$$

显然,μ,ν 满足:对任意的 $t\in\mathrm{R}_+,A\in\mathscr{E}$,

$$\mu((0,t]\times A)=p(t,A),\nu((0,t]\times A)=\bar{p}(t,A).$$

我们定义形如(1)式的被积函数 g 关于 μ,ν 的随机积分如下,

$$\int_{\mathrm{R}_+\times E}g\mathrm{d}\mu:=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}g(\omega,\tau_n,X_n)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\omega,\tau_n,X_n),$$

$$\int_{\mathrm{R}_+\times E}g\mathrm{d}\nu:=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\mathrm{R}_+\times E} g(\omega,t,x)\frac{1}{F_n(t-)}G_n(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)I_{\{\tau_n<t\leqslant\tau_{n+1}\}}.$$

$L_1(\mathrm{d}\mu)$、$L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$的定义与上节相同，除了局部化停时列 $T_n\uparrow\tau$ 而不是 ∞. 例如，$L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$ 为满足如下条件的可测函数 $g:(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})\to(R,\mathscr{B}(R))$ 的集合：

(i) 对任意的 $x\in E$，$g(\cdot,\cdot,x)$ 为可料过程；

(ii) 存在局部化停时列 $\{T_n\}$：$T_n\uparrow\tau$，使得对每个 n 有

$$\mathbf{E}\int_{\mathrm{R}_+\times E}|g|I_{[t\leqslant T_n]}\mathrm{d}\mu<\infty.$$

其中$(\tilde{\Omega},\tilde{\mathscr{F}})=(\Omega\times\mathrm{R}_+\times E,\mathscr{F}_\infty\times\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)\times\mathscr{E})$.

定义 1　称过程$(M_t)_{t\geqslant0}$ 为 τ－**前局部鞅**，如果存在局部化停时列 T_n：$T_n\uparrow\tau$，使得对每个 n，$M_{t\wedge T_n}$ 为一致可积鞅.

设$(M_t)_{t\geqslant0}$ 为一致可积鞅. 则 $M_t=E[M_\infty\mid\mathscr{F}_t](t\geqslant0)$ 对某 $M_\infty\in\mathscr{F}_\infty$ 成立. 由定理 1 知，$\mathscr{F}_\infty=\bigvee_n\mathscr{F}_{\tau_n}$。因此，

$$M_{\tau-}=\lim_{n\to\infty}M_{\tau_n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}[M_\infty\mid\mathscr{F}_{\tau_n}]=\mathbf{E}[M_\infty\mid\mathscr{F}_\infty]=M_\infty. \tag{2}$$

因此，对任何一致可积鞅$(M_t)_{t\geqslant0}$ 有：$M_t=M_{t\wedge\tau}$，$t\geqslant0$，且在 τ 处左连续.

定理 2　过程$(M_t)_{t\geqslant0}$ 为零初值 τ－前局部鞅的充分必要条件是对所有 $t\geqslant0$，$M_t=M_t^g$ 对某 $g\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}u)$ 成立，其中

$$M_t^g:=\int_{R_+\times E}I_{[s\leqslant t]}g(\omega,s,x)\mathrm{d}(\mu-\nu)=$$

$$\int_{R_+\times E}I_{[s\leqslant t]}g(\omega,s,x)\mathrm{d}\mu-$$

$$\int_{R_+\times E}I_{[s\leqslant t]}g(\omega,s,x)\mathrm{d}\nu,\quad t\geqslant0.$$

证明　先证充分性. 取 $T_n=\sigma_n\wedge\tau_n$，其中 σ_n 为 g 的局部化列，即对每个 n，$gI_{[t\leqslant T_n]}\in L_1(\mathrm{d}\mu)$. 通过直接计算可证，$(M_{t\wedge T_n}^g)_{t\geqslant0}$ 为鞅，

且 $M^{g}_{t\wedge T_n} = \mathbf{E}[M^{g}_{T_n} \mid \mathscr{F}_{t\wedge T_n}]$.因此,$(M^{g}_{t\wedge T_n})_{t\geq 0}$ 为一致可积鞅.

往证必要性.首先,假设(M_t)为一致可积鞅.此时,(M_t)有如下形式:

$$M_t = M_{t\wedge\tau_1} + \sum_{k=2}^{\infty}(M_{t\wedge\tau_k} - M_{\tau_{k-1}})I_{\{t\geq\tau_{k-1}\}}. \qquad (3)$$

事实上,若 $t < \tau$,(3)为恒等式.而当 $t \geq \tau$ 时,(3)的右端等于 $\lim\limits_{n\to\infty} M_{\tau_n} = M_{\tau-}$;而由(2)式,此时,$M_t = M_{\tau-}$.故当 $t \geq \tau$ 时(3)式亦成立.定义

$$X_t^{(k)} := (M_{t\wedge\tau_k} - M_{\tau_{k-1}})I_{\{t\geq\tau_{k-1}\}}, t \geq 0.$$

则 $X_t^{(k)}$ 是关于σ代数流 $\mathscr{G}_t = \mathscr{F}_{(t\wedge\tau_k)\vee\tau_{k-1}} = \mathscr{F}_{\tau_{k-1}} \vee \sigma\{X_{s\wedge\tau_k}, \tau_{k-1} \leq s \leq t\}$,$(t \geq 0)$,为一致可积鞅.于是,存在可测函数 h_k:$(\Omega\times\mathrm{R}_+\times E, \mathscr{G}_{k-1}\times\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)\times\mathscr{E}) \to (\mathrm{R}, \mathscr{B}(\mathrm{R}))$ 使得 $X_t^{(k)} = \mathbf{E}[h_k(\omega, \tau_k, X_{\tau_k}) \mid \mathscr{G}_t]$.

因为 $\mathbf{E}\mid X_t^{(k)}\mid < \infty$,我们有

$$\mathbf{E}\int_{\mathrm{R}_+\times E} \mid h_k(\omega, s, x)\mid G_{k-1}(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) < \infty.$$

由单跳跃过程的结果(定理2及注2.1),存在可测函数 g_k:$(\Omega\times R_+\times E, \mathscr{G}_{k-1}\times\mathscr{B}(\mathrm{R}_+)\times\mathscr{E}) \to (\mathrm{R}, \mathscr{B}(\mathrm{R}))$,使得

$$X_t^{(k)} = \int_{\mathrm{R}_+\times E} I_{\{s\leq t\}} g_k(\omega, s, x)\mathrm{d}(\mu_k - \nu_k),$$

其中,$\mu_k(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \delta_{(\tau_k, x_k)}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x)I_{\{\tau_k<\infty\}}$,$\nu_k(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = G_{k-1}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x)I_{\{\tau_{k-1}<t\leq\tau_k\}}$.而

$$g_k(\omega, t, z) =$$

$$h_k(\omega, t, z) + I_{\{t<c(t)_{k-1}\}}\frac{1}{F_{k-1}(t)}\int_{[0,t]} h_k G(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x). \qquad (4)$$

于是,若令

$$g(\omega, s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{k+1}(\omega, s, x)I_{\{\tau_k<s\leq\tau_{k+1}\}}.$$

则对每个 $t \geq 0$,有 $M_t = M_t^g$.

往证 $g \in L_1^{loc}(d\mu)$.对每个 $n \geq 1$,令

$$T_n^k(\omega) = \inf\{t > 0: F_{k-1}(t) \leq \frac{1}{n^3}\}.$$

易见,$T_n^k \geq \tau_{k-1}$ a.s.且为 $\mathscr{G}_{k-1}$-可测,从而 T_n^k 为停时.参见定理2.6的证明,并注意到(4)式,有

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_{R_+ \times E} I_{[s \leq T_n^k]} \mid g_k \mid d\mu_k \leq \\
&\mathbf{E}[(1 + \frac{1}{F_{k-1}(T_n^k)})\int_{R_+ \times E} \mid h_k \mid dG_{k-1}] \leq \\
&(1 + n^3)\mathbf{E}\int_{R_+ \times E} \mid h_k \mid dG_{k-1} < \infty. \qquad (5)
\end{aligned}$$

现定义 $T_n = \tau_j \wedge T_n^j$,其中 $j := \min\{k: T_n^k \leq \tau_k\}$.则 T_n 为停时,且

$$P(T_n < \tau_n) \leq P(\bigcup_{k=1}^{n}[T_k < \tau_k]) \leq n\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

于是,$\sum P(T_n < \tau_n) < \infty$.由 Borel - Cantelli 引理立得 $P(\liminf[T_n \geq \tau_n]) = 1$,所以 $T_n \wedge \tau_n \uparrow \tau$ a.s..既然

$$\begin{aligned}
&\int_{R_+ \times E} \mid g \mid I_{[t \leq \tau_n]} d\mu = \\
&\mid g_1(\tau_1, X_1) \mid + \cdots + \mid g_n(X_0, \tau_1, X_1, \cdots, \tau_n, X_n) \mid,
\end{aligned}$$

由(5)式

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\int_{R_+ \times E} \mid g \mid I_{[t \leq \tau_n \wedge T_n]} d\mu \leq \\
&\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\int_{R_+ \times E} I_{[s < T_n^k]} \mid g_k \mid d\mu_k < \infty.
\end{aligned}$$

因为 $\tau_n \wedge T_n \uparrow \tau$,这便证明了 $g \in L_1^{loc}(d\mu)$.

最后,若 $(M_t)_{t \geq 0}$ 为 τ - 前局部鞅,则存在局部化停时列 $S_n \uparrow \tau$ 使得,对每个 n,$(M_{t \wedge S_n})_{t \geq 0}$ 为一致可积鞅,则 $\tau_n \wedge S_n \wedge T_n(\uparrow \tau)$ 即为新的局部化停时列且使得,对每个 n,

$$\mathbf{E}\int_{\mathbb{R}_+\times E}|g|I_{[t\leq\tau_n\wedge T_n\wedge S_n]}\mathrm{d}\mu<\infty$$

从而，$g\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$，这就完成了定理的证明.

注意到任一局部鞅必为 τ – 前局部鞅（$\tau=\infty$ a.s.时，τ – 前局部鞅即为局部鞅），我们有如下推论.

推论 1　设(M_t)为局部鞅.则存在 $g\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathrm{d}\mu)$ 使得，

$$M_t-M_0=\int_{\mathbb{R}_+\times E}I_{[s\leq t]}g(\omega,s,x)\mathrm{d}(\mu-\nu).$$

§4　补充与注记

本章内容大部取自 Davis[1]（参见 Davis[4, Appendix]）.相关的研究可参见 Boel, Varaiya & Wong[1], Chou & Meyer[1], Jacod[1].Chou & Meyer[1]仅对特殊的点过程（所有跃度均为 1 的实值跳跃过程）证明了类似的结果.Borel, Varaiya & Wong[1]假定了基本过程的跳跃时刻是完全不可及时（totally inaccessible stopping time）且 $\tau\equiv\infty$. Jacod[1]的结果与 Davis[1]更接近，但证明主要是应用正鞅的指数公式与 Radon – Nikodym 定理.

§1 结果的证明由于 27 章的离散型流理论而得以简化.

由于我们放弃了初始分布集中于一个状态的限制，§2 关于单跳跃过程及其鞅的结果的表述较 Davis[4]更一般且便于应用.例如定理 2.1 的 2）与定理 2.4，通过引进"具有性质（P）的序列"的概念，使结果的表达更深刻.其次，定理 2.6 的证明是新的.

本章主要结果定理 3.2 由刘国欣得到.本定理的充分性部分为 Davis[1]的命题 7；Davis[1]的主要结果定理 2 为本定理的推论（推论 3.1）.或许正是由于没有定理 3.1，Davis[2,4]在他的 PDP（piecewise deterministic process）的广义生成算子理论中限定所论过程的正则性（亦即 $\tau=\infty$ a.s.），而没有如 Davis[1]讨论跳跃过程及其鞅那样一般化.

· 参考文献 ·

Anokhin A V

1 On linear impulsive systems for functional differential eguations, Soviet Math. Dokl. 1986(33):220 ~ 223

Anosov D V and Arnold V I

1 Dynamical Systems I, Berlin: Springer – Verlag, Eds. 1988

Asmussen S

1 Applied Probability and Queues, New York: John Wiley, 1987

2 Risk theory in a Markovian environment. Scand. Actuariat J., 1989, 66 ~ 100

Bäuerle N

1 Some results about the expected ruin time in Markov – modulated risk models. Insurance: Math. Econ., 1996(18):119 ~ 127

Bhat U N

1 Transient behavior of multiserver queues with recurrent input and expinential service times, J. Appl. Prob., 1968(5):158 ~ 168

Billingsley P

1 Convergence of Probability Measures, New York: John Wiley, 1968

2 Probability and Measures, 2nd ed. New York: John Wiley, 1986

Black F and Scholes M

1 The pricing of options and corporate liabilities, J. Polit. Econom., 1973 (81):637 ~ 659

Boel R, Varaiya P and Wong E

1 Martingales on jump processes I: representation results. SIAM J. Control and Optimization, 1975(13):999 ~ 1021

Boukas E K and Liu Z K

1 Jump linear regulator with controlled jump rate, IEEE Trans. Auto. Control,

1999,45,(5):(to appear)

Boukas E K, Liu Z K and Liu G X

1 Delay - dependent robust stability of jump linear systems with time - delay, Preprint, 1999

陈木法

1 跳过程与粒子系统.北京:北京师范大学出版社,1986

2 From Markov Chains to Non - Equilibrium Particle Systems, Singapore: World Scientific Press, 1992

陈兰荪

1 数学生态模型与研究方法.北京:科学出版社,1991

程侃,曹晋华

1 可靠性数学引论.北京:科学出版社,1987

Chung K L

1 Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 2nd ed. New York: Springer, 1967

2 A Course in Probability Theory, 2nd ed., new York: Academic Press, 1974

Chung K L and Doob J L

1 Fields, optionality and measurability, Amer. J. Math, 1965(87):397 ~ 424

Chung K L and Wu Rong

1 随机过程新导引.新加坡:世界科学出版社,1998

Chou C S and Meyer P A

1 Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels, Sém. Probab, IX, LN in Math., 465, Berlin: Springer - Verlag, 1975

Cinlar E

1 Markov additive preesses I. Z.W., 1972(24):85 ~ 93

2 Introduction to Stochastic Processes, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1975

Cinlar E and Kaspi H

1 Regenerative systems and Markov additive processes, Seminar on Stochastic Processes, Boston: Birkhauser, 1982, 123 ~ 147

Cohn D L

1 Measure Theory, Boston: Birkhauser, 1980

Costa O L V

1 Stationary distributions for piecewise – deterministic Markov Processes. J. Appl. Prob., 1990(27):60 ~ 73

Costa O L V and Davis M H A

1 Approximations for optimal stopping of a piecewise – deterministic processes. Math. Control Signals Systems, 1988(1):123 ~ 46

2 Impulse control od piecewise – deterministic processes. Math. Control Signals Systems, 1989(2):187 ~ 206

Cox D R

1 The analysis of non – Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. Proc. Camb. Phil. Soc., 1955(51):433 ~ 41

Cramér H

1 On the Mathematical Theory of Risk. Jubilee Volume of Försäkringsaktiebogalet Skandia, 1930

2 Mathematical Methods of Statistics. Princeton: Princeton University Press, 1945

3 Collective Risk Theory. Jubilee Volume of Försäkringsaktiebogalet Skandia, 1955

Dassios A and Embrechts P

1 Martingales and insurance risk. Commun. Statist. – Stochastic Models, 1989, 5(2):181 ~ 217

Davis M.H.A

1 The representeation of Martingales of jump processes. SIAM J. Control and Optimization, 1976(14):623 ~ 38

2 Piecewise – deterministic Markov processes: a general class of non – diffusion stochastic models, J.R. Statist. Soc. B, 1984(46):353 ~ 388

3 Control of piecewise – deterministic processes via discrete – time dynamic programming, in Stochastic Differential Systems (ed. M. Kohlmann), Lecture Notes in Control and Information Sciences 78, Berlin: Springer – Verlag, 1986

4 Markov Models and Optimization, London: Chapman and Hall, 1993

Davis M H A and Lopes E P

1 Optimal stopping of piecewise – deterministic processes via the penalty meth-

od. Applied Math. and Optimization, 1992
Davis M H A, Dempster M A H, Sethi S P and Vermes D
1 Optimal capacity expansion under uncertainty. Adv. Appl. Prob., 1987 (19): 156 ~ 76
Delbaen F and Haezendonck J
1 Classical risk theory in an economic environment. Insurance: Mathematics and Economics 1987(6): 85 ~ 116
2 Classical risk theory in an ecnomic environment, Commun. Statist. – Stoch. Models, 1987(5): 181 ~ 217
Dempster M A H
1 Optimal control of piecewise – deterministic Markov processes, in Applied Stochastic Analysis (ed. M.H.A.Davis and R.J.Elliott), New york: Gordon and Breach, 1991
Dempster M A H and Ye J J
1 A maximum principle for control of piecewise – deterministic Markov processes, in Approximation, Optimization and Computing: Theory and Applications (ed. A.G. Law and C.L.Wang), North Holland, Amsterdam, 1990
2 Necessary and sufficient optimality conditions for control of pisewise – deterministic Markov processes. Stochastics and Stochastics Reports, 1992(40)
Doob J L
1 Cdassical Polential Theory and It's Probabilistic Counterpart, New York: Sprirger – Verlag, 1984
Dynkin E B
1 Markov Processes Ⅰ, Berlin: Springer – Verlag, 1965
Elliott R J
1 Stchastic Calculus and Applications, Berlin: Spring – Verlag, 1982
戴永隆
1 随机点过程.广州:中山大学出版社,1984
戴世强
1 两层流体界面上的孤立波.北京:应用数学与力学,1982,3(6):721 ~ 731
邓永录,梁之舜
1 随机点过程及其应用.北京:科学出版社,1992

童洋清,刘克

1 无界报酬折扣模型半马氏最优策略的结构.中国科学,1985(A):975 ~985

童洋清,宋京生

1 无界报酬半马氏折扣模型的初筹方法.科学通报,1987(11):809~812

Embrechts P and Schmidli H

1 Ruin estimation for a general insurance risk model. Adv. Appl. Probab. 1994(36):404~422

Embrechts P, Grandell J and Schmidli H

1 Finite - time Lundberg inequalities in the Cox case. Scandinavian Actuarial Journal, 1993,17~41

Ethier S N and Kurtz T G

1 Markov Processes: Characterization and Convergence, New York: John Wiley, 1986

Feller W

1 An Introduction to Probability Theory and its Applications 2, New York: John Wiley, 1966

Fitzgibbon W E

1 Strongly damped quasilinear evolution equations, J. Math. Anal Appl. 1981 (79):536~550

Furrer H J and Schmidli H

1 Exponential inequalities for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics 1994(15):23~36

Gatarek D

1 Optimality conditions for impulsive control of piecewise deterministic processes. Math. Control Signals Systems, 1992(5):217~32

Gerber H U

1 Martingales in risk theory, Mitteilungen der Vereinigung Schweizer Versicherungsmatematiker, 1973(73):205~216

2 An Introduction to Mathematical Risk Theory, Illinois: Irwin, 1979

Gihman I I and Skorohod A V

1 The Theory of Stochastic Processes II, Berlin: Springer - Verlag, 1983

Grandell J

1 Aspects of Risk Theory. Springer Series in Statistics, New York: Springer Verlag, 1991
Gugerli U S
1 Optimal stopping of piecewise – deterministic Markov processes. Stochastics, 1986(19): 221 ~ 36
管克英,高歌
1 Burgers – KdV 混合型方程行波解的定性分析.中国科学(A),1987(1): 64 ~ 72
郭大钧,孙经先,刘兆理
1 非线性常微分方程泛函方法.济南:山东科学技术出版社,1995
Harrison J M
1 Ruin problems with compounding assets. Stoch. Proc. Appl. 1977(5): 67 ~ 79
Hordijk A and van der Schouten
1 Discretization and weak convergence in Markov decision drift processes. Math. Operat. Res. 1984(9): 112 ~ 141
Hordijk A and Spieksma F
1 On ergodicity and recurrence properties of a Markov chain with an application to an open Jackson network. Adv. Appl. Prob., 1992(24): 343 ~ 376
侯振挺
1 Q 过程的唯一性准则.中国科学,1974(2): 115 ~ 130
2 Q 过程的唯一性准则.长沙:湖南科学技术出版社,1982
侯振挺,刘再明,邹捷中
1 *QNQL* – processss—(*H*, *Q*) – processes and their applications. Chinese Science Bulletin., 1997, 42(11): 881 ~ 886
2 *QNQL* 过程:(*H*、*Q*)过程及其应用举例.科学通报,1997,42(9): 1003 ~ 1008
3 具有马尔可夫骨架的随机过程.经济数学,1997,14(1): 1 ~ 13
4 马尔可夫骨架过程的有穷维分布.经济数学,1997,14(2): 1 ~ 8
5 马尔可夫骨架过程,长沙铁道学院学报,1999,17(2): 1 ~ 10; 17(3): 1 ~ 6
侯振挺,郭青峰
1 齐次可列马尔可夫过程.北京:科学出版社,1978

侯振挺,邹捷中,袁成桂

1 输入过程(独立同分布情形).经济数学,1996,13(1):1~8

侯振挺,刘再明,周弋

1 输入过程(成批到达情形).经济数学,1996,13(2):1~3

侯振挺,刘再明,邹捷中,李学伟

1 Markov 骨架过程,科学通报,1998,43(5):457~466

2 Markov skeleton processes. Chinese Science Bulletin. 1998,43(11):881~889

侯振挺等

1 马尔可夫过程的 Q 矩阵问题.长沙:湖南科学技术出版社,1994

2 生灭过程.长沙:湖南科学技术出版社,2000

侯振挺,刘再明

1 数学生态学随机模型.生物数学学报,2000

侯振挺,刘再明,郭先平

1 *QNQL* 过程(IV):$(H_m, Q_m)_{m=1}^{\infty}$-过程及其在排队论中的应用.长沙:"马尔可夫过程与受控马尔可夫链"国际会议,1999.8

侯振挺,郭先平

1 马尔可夫决策过程.长沙:湖南科学技术出版社,1998

侯振挺,刘国欣,周弋

1 半马尔科夫过程(I):向前方程和正则性充要条件.1996(1)

2 半马尔科夫过程(II):半马氏过程的数字特征及状态分类.1996(2)

3 半马尔科夫过程(III):积分型泛函的分布和矩.1996(3)

Hou Z T, Liu G X and Zhou Y

1 Moments of First Passage Time of Semi-Markov Processes, Proceedings of the 2nd International Sympoium on Semi-Markov Models: Theroy and Applications, Universite De Technologie Compiegne. 1988

何声武,汪嘉冈,严加安

1 半鞅与随机分析.北京:科学出版社,1995

黄志远

1 随机分析学基础.武汉:武汉大学出版社,1988

Ikeda N, Nagasawa M and Watanabe S

1 Branching Markov processes and I, II, III, Math J. Kyoto Univ., 8,233~278,9,95~160,1968

Ikeda N and Watanabe

1 Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Noth – Holland: Amsterdam, 1981

Isaacson D L and Madson R W

1 Markov Chains Theory and Applications, New york: John Wiley, 1976

Jacod J

1 Multivariate point processes: predictable projections, Radon – Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. Wahrscheinlchkeitstheorie ver. Geb., 1975(31): 235 ~ 53

Kendall D G

1 Some problems in the theory of queues, J. Roy. Statist. Soc., B, 1951 (13): 151 ~ 185

2 Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the methods of the imbedded Markov chain, Ann. Math. Statist., 1953(24): 338 ~ 354

Karatzas I and Shreve S E

1 Brownian Motion and stochastic calculus. New York: Springer, 1988

Корокж В С and Туроин А Х

1 полуарковскне процессч ц цх Прплложецня Кцев Наукова Дуцка, 1976

Laojos Takaes

1 The transient behavior of a single server queueing process with a poisson input, proceeding of the Fourth Berkeley symposium on Mathematical statistics and probability, 1960

Lenhart S M and Liao Y C

1 Integro – differential equations associated with optimal stopping of a piecewise – deterministic processes, Stochastics, 1985(15): 183 ~ 207

Lenhart S M and Yamada N

1 Viscosity solutions associated with switching game for piecewise – deterministic processes. Stochastics and Stochastics Reports, 1991(38): 27 ~ 47

Levy P

1 Semi – Markovian processes, Proc.: III Internat. Congr. Math. (Amsterdam), 1954, 416 ~ 426

李俊平，侯振挺

1 Markov 骨架过程积分型泛函的分布和矩及其应用举例.长沙:"马尔可夫过程与受控马尔可夫链"国际会议,1999.8

李樟南,吴荣

1 随机过程教程.北京:高等教育出版社,1987

刘国欣

1 Almost sure congvergence of a class of random series and its applications to Markov chains. The Fifth Japan – China Symposium on Statistics. (ed. M. Ichimura, S. S. Mao and G. Z. Fan), Tokyo: University Education Press, 1994, 157 ~ 160

2 Kolmogorov 三级数定理的推广.数学物理学报,1995,15(3):311 ~ 314

3 逐段决定的马尔可夫过程:[博士学位论文].长沙:长沙铁道学院,1998

4 A class of strong law of large numbers for depdendent variables.数理统计与应用概率,1998,13(2):119 ~ 124

5 On the conditional version of Kolmogorov's three – series theorem, Acta Math. Sci. 1999,19(3):300 ~ 306

Liu G X and Liu W

1 On the strong law of large numbers for functionals of countable nonhomogeneous Markov chains, Stoch. Proc. Appl. 1994(50):375 ~ 391

Liu G X and Hou Z T

1 Piecewise deterministic processes and Markov modeling of stochastic systems with continuous parameter, Proceedings of the 2nd International Symposium on Semi – Markov Models: Theory and Applications eds by J Janssen and N. Limnios, 1998

Liu W

1 Relative entropy densities and a class of limit theorems of the sequence of m – valued random variables Ann. Probab. 1990(18):829 ~ 839

Liu W and Liu G X

1 A class of strong laws for functionals of countable nonhomogeneous Markov chains, Statistics and Probability Letters, 1995(22):87 ~ 96

刘万荣,刘再明,侯振挺

1 马尔可夫骨架过程的构造.经济数学,2000,17(2):38 ~ 41

2 Markov 骨架过程的随机时变换.系统科学与数学,2000,20(3):361 ~

366
刘再明,侯振挺

1 Applications of the (H,G,Π) - processes in the Insurance Risk Models. Beijing:"The 26th International Conference on Stochastic Processes and their Applications",1999.6

刘再明,侯振挺,邹捷中

1 Markov skeleton processes and some of their applications. Ulm(Germany): "10th INORMS Applied probability Conference",1999.7

2 Nonhomogeneus Markov Skeleton processes and Their Applications. Changsha: "International Workshop On Markov Processes & Controlled Markov Chains",1999.8

Lomdah P S, Serensen O H and Christiansen P L

1 Soliton excitations in Josephson tunnel junctions, Phys. Rev. B, 1982(25): 5737 ~ 5748

Lundberg F

1 I. Approxmerad Framställning av Scannolikhetsfunktionen. II. terförsäkring av Kollektivrisker. Almqvist & Wiksell, Uppsala,1903

2 Försäkringsteknisk Riskutjämning. F. Englunds boktryckeri A. B., Stockholm,1926

Markov A A

1 Extension of the law of large numbers to dependent quantities in Russian. IZV. FIZ - Matem. Obsch. Kazan Univ. (2nd Ser),1906(15):135 ~ 156

Meyn S P and Tweedie R L

1 Stability of Markovian processes I: Criteria for discrete time chains. Adv. Appl. Prob.,1992(24):542 ~ 74

2 Markov Chains and Stochastic Stability, Control and Communication in Engineering, New York:Springer - Verlag, 1993

Merton R C

1 Theory of rational option pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, 1973(4):141 ~ 183

2 Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous, Journae of Financial Economics, 1976(3):125 ~ 144

Mil'man V D and Myshkis A D

1 On the stability of motion in the presence of impulses. Siberian Math. J., 1960 (1): 233 ~ 237

Muller C M

1 Stochastic differential equations for ruin probabilities. J. Appl. Prob. 1995 (32): 74 ~ 89

Nagume J, Arimoto S and Yoshizawa S

1 An active pulse transmission line simulating nerve axon, Proc. IRE, 1962 (50): 2061 ~ 2070

Pao C V

1 A mixed initial boundary – value problem arising in neurophysidogy, J. Math. Anal. Appl., (1975(52): 105 ~ 119

Paul Embrechts and Hanspeter Schmidli

1 Ruin estimation for a general Insurance risk model, Adv. Appl. Prob. 1994 (26): 404 ~ 422

Paulsen J

1 Risk theory in a stochastic environment. Stoch. Proc. Appl., 1993(46): 327 ~ 361

Paulsen J and Gjessing H K

1 Ruin Theory with stochastic return on investments. Adv. Appl. Prob. 1997 (29): 965 ~ 985

Pyke R.W

1 Markov renewal processes: definitions and preliminary properties. Ann. Math. Statist. 1961(32): 1231 ~ 1242

钱敏平,龚光鲁

1 随机过程论(第二版).北京:北京大学出版社,1995.11

Reinhard

1 On a class of semi – Markov risk models obtained as classical risk models in a Markovian environment. Astin Bulletin 1984(14): 23 ~ 43

Revuz D and Yor M

1 Continuous Martingales and Brownian Motion, Berlin: Springer – Verlag, 1991

Richard F

1 serfozo. Random time transformations of semi – Markov processes. The Annal

of Mathematical statistics, 1971, 42(1): 176 ~ 188

Schäl M

1 On piecewise deterministic Markov control processes: Control of jumps and of risk processes in insurance, Insurance: Math. Econ. 1998(22): 75 ~ 91

Schmidli H

1 An extention to the renewal theorem and an application to risk theory. Ann. Appl. Probab. 1997, 7(1): 121 ~ 133

Sharpe M

1 General Theory of Markov Processes, San Diego: Academic Press, 1998

Shiryayev A N

1 Probability. Berlin: Springer – Verlag, 1984

Smith R L

1 Regenerative stochastic processes, Edinburgh: Proc. Roy. Soc., (A), 1955 (232): 6 ~ 31

Solomon Fred

1 Random Walks in a Random enviroment. Swarthmore Collge, Annals of Prob., 1975(3): 1 ~ 31

Stroock D W and Varadhan S R S

1 Multidimentional Diffusion Processes. Berlin: Springer – Verlag, 1979

申建华

1 有关脉冲泛函微分方程的基本理论与稳定性问题:[博士学位论文]. 长沙:湖南大学, 1995.12

Showalter R E

1 Regularization and approximation of second order evolution equations, SIAM J. Math. Anal., 1976(7): 461 ~ 472

Takács L

1 The transient behavior of a single server queuing process with a Poisson input, Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Satist. and Prob. Berkeley and Los Angeles, Univ. of California press, 2, 535 ~ 567, 1961

宋京生

1 转移速率族非一致有界的连续时间马氏决策规划. 中国科学(A), 1987(12): 1258 ~ 1267

Toda M

1 Waves in nonlinear lattice, progr. Theor. Phys., Supp. 1970(45):174 ~ 200

Tweedie R L

1 Sufficient conditions for ergodicity and recurrence of Markov chains on a general state space. Suoch. Proc. Appl., 1975(3):385 ~ 403

Vermes D

1 Optimal control of piecewise – deterministic Markov processes. Stochastics, 1985(14):165 ~ 208

王梓坤

1 On distributions of functions of birth and death processes and their applications in the theory of queues, Scientia Sinica, 1961(2):160 ~ 170

2 随机过程论.北京:科学出版社,1962

3 生灭过程与马尔可夫链.北京:科学出版社,1980

王过京

1 经典风险过程的推广和带干扰风险过程的破产理论:[博士学位论文].天津:南开大学,1999

吴方

1 关于排队过程 GI/M/n.数学学报,1961(11):295 ~ 305

吴立德

1 齐次可数马尔可夫过程积分型泛函的分布.数学学报,1963(B):1

Waters H, et al

1 Permanent Health Insurance, CMI Report 12, London:Institute of Actuaries, 1991

William J Anderson

1 Coutinuous – Time Markov Chains. Berlin:Springer – Verlag, 1991

Williams P

1 Diffusions, Markov Processes and Martingales I, John Wiley, Chichester, 1979

杨向群

1 可列马氏过程的积分型泛函和双边生灭过程的边界性质.数学进展,1964,7(4):397 ~ 424

2 生灭过程爆发后的存活时间分布.中国科学,1998,28(1):30 ~ 35

3 可列马尔可夫过程构造论.长沙:湖南科学技术出版社,1986

徐光辉

1 排队过程 GI/M/n 的瞬时性质.数学学报,1965(15):91~120

2 随机服务系统(第二版).北京:科学出版社,1988

Yushkevich A A

1 Continuous - time Markov decision processes with interventions. Stochastics, 1983(9):235~274

2 Bellman inequalitis in Markov decision deterministic drift processes. Stochastics, 1987(23):25~77

严加安

1 鞅与随机积分引论.上海:上海科技出版社,1981

严士健等

1 概率论基础.北京:科学出版社,1982

张卫国

1 Burgers 与组合 KdV 混合型方程的精确解.数学物理学报,1996,16(3):241~248

2 非线性波方程的长时间行为与随机干扰对孤波的影响:[博士学位论文].长沙:长沙铁道学院,1999.6

张健康

1 On the Generalized Birth and Death Pocesses. 数学物理学报,1984,4(2):241~259

张春生

1 带干扰风险模型及一类保险风险模型的若干问题:[博士学位论文].天津:南开大学,1997

张锦炎

1 常微分方程几何理论与分支问题.北京:北京大学出版社,1987

周弋

1 半马氏过程及其在排队论中的应用:[硕士学位论文].长沙:长沙铁道学院,1997

名词索引(按拼音排列)